UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL

Teoría de Juegos

Apunte 2 Rev 0

Romina Miccige – Matias Patterlini

Introducción a la teoría de juegos

En el análisis de decisiones un sólo tomador de decisiones busca seleccionar una alternativa de decisión óptima después de considerar los resultados posibles de uno o más eventos fortuitos. En la **teoría de juegos**, dos o más tomadores de decisiones, llamados jugadores, compiten como adversarios entre sí. Cada jugador selecciona una estrategia de forma independiente, sin conocer de antemano la estrategia del otro jugador o jugadores.
La combinación de estrategias de los competidores determina el valor del juego para los jugadores. La teoría de juegos se ha desarrollado para su aplicación en situaciones en que los jugadores que compiten son equipos, empresas, candidatos políticos, ejércitos y licitadores de contratos.

Juegos de suma cero para dos personas:

Dos personas significa que en el juego participan dos jugadores que compiten. *Suma cero* significa que
la ganancia (o pérdida) de un jugador es igual a la pérdida (o ganancia) correspondiente del otro jugador. Como resultado, la ganancia y la pérdida se equilibran de tal manera que el juego da como resultado la suma de cero. Lo que un jugador gana, el otro lo pierde. Mostremos un juego de dos personas con suma cero y su solución al considerar a dos empresas que compiten por su participación de mercado.

Competencia por la participación de mercado

Suponga que dos empresas son los únicos fabricantes de un producto en particular y compiten entre ellas por participación de mercado. En la planeación de una estrategia de mercado para el próximo año, cada empresa considera tres estrategias diseñadas para ganar la participación de mercado de su competidor. Las tres estrategias, suponiendo que son las mismas para ambas empresas, son las siguientes:
Estrategia 1 Incrementar la publicidad
Estrategia 2 Proporcionar descuentos por cantidad
Estrategia 3 Extender la garantía del producto

A continuación se presenta una tabla de resultados que muestra la ganancia en porcentaje de la participación de mercado esperada para la empresa A para cada combinación de estrategias. Las notaciones a_1, a_2 y a_3 identifican las tres estrategias de la empresa A; las notaciones b_1, b_2 y b_3 denotan las tres estrategias de la empresa B. Es un juego de suma cero debido a que cualquier ganancia en la participación de mercado para la empresa A es una pérdida de participación de mercado para la empresa B.

		Empresa B		
		Aumentar la publicidad b_1	Descuentos por cantidad b_2	Extensión de la garantía b_3
Empresa A	Aumentar la publicidad, a_1	4	3	2
	Descuentos por cantidad a_2	−1	4	1
	Extensión de la garantía, a_3	5	−2	0

Al interpretar las entradas de la tabla vemos que si la empresa A aumenta la publicidad (a_1) y la empresa B aumenta la publicidad (b_1), la empresa A lleva ventaja debido a que tiene un incremento en la participación de mercado de 4%. Por otra parte, si la empresa A proporciona descuentos por cantidad (a_2) y la empresa B aumenta la publicidad (b_1), se proyecta que la empresa A perderá una participación de mercado de 1%, misma que ganará la empresa B. La empresa A busca valores de resultados que muestren aumentos relativamente

grandes en su participación de mercado. La empresa B, en cambio, busca valores de resultados que muestren

disminuciones o pequeños incrementos en la participación de mercado de la empresa A y que por ende sean
mejores resultados para ella.

Este juego que involucra la participación en el mercado cumple con los requisitos de un juego de dos personas con suma cero. Las dos empresas son los dos jugadores y la suma cero ocurre debido a que lo que la empresa A gana en participación de mercado es igual a lo que la empresa B pierde en participación de mercado. Debido al horizonte de planeación, cada empresa debe seleccionar una estrategia antes de conocer la estrategia de la otra
empresa. ¿Cuáles son las estrategias óptimas para las dos empresas? La lógica de la teoría de juegos supone que cada empresa o jugador tiene la misma información y selecciona una estrategia que proporciona el mejor resultado posible desde su punto de vista. Suponga que la empresa A selecciona la estrategia a_1. Es posible un incremento en la participación de mercado de 4%, 3% o 2% dependiendo de la estrategia que siga la empresa B. Si la empresa B cree que la empresa A utilizará la estrategia a_1, entonces empleará la estrategia b_3. Bajo el supuesto de que la empresa B seleccionará la mejor estrategia para ella, la empresa A analiza el juego y se protege frente a las acciones de la empresa B. Al hacerlo, la empresa A identifica el resultado mínimo posible para cada una de sus acciones. Este resultado es el valor mínimo en cada fi la de la matriz de resultados. Estos mínimos de fi la se calculan en la tabla de resultados como sigue:

		Empresa B			
		Aumentar la publicidad b_1	Descuentos por cantidad b_2	Extensión de la garantía b_3	Mínimo
Empresa A	Aumentar la publicidad, a_1	4	3	2	2
	Descuentos por cantidad, a_2	−1	4	1	−1
	Extensión de la garantía, a_3	5	−2	0	−2

Máximo de mínimos de fila

Al considerar las entradas de la columna Mínimo, vemos que se puede garantizar a la empresa A un incremento en la participación de mercado de por lo menos 2% al seleccionar la estrategia que proporciona el máximo de los mínimos de fila (estrategia a1). Por tanto, la empresa A sigue un procedimiento maximin y selecciona la estrategia al como su mejor estrategia.

Veamos ahora la tabla de resultados desde el punto de vista del otro jugador, la empresa B. Las entradas de la tabla de resultados representan pérdidas en la participación de merca- do. Considere lo que ocurre a la empresa B si selecciona la estrategia b1. Las disminuciones en la participación de mercado de 4%, -1% y 5% son posibles. Bajo el supuesto de que la empresa A seleccionará la estrategia que es mejor para ella, la empresa B sabe que si selecciona la estrategia b1 podría incurrir en una pérdida en la participación de mercado de 5%. Por tanto, la empresa B analiza el juego considerando el valor máximo de cada columna, el

cual proporciona la disminución máxima en su participación de mercado para cada estrategia de la empresa A. Estos máximos de columna se calculan como sigue:

Empresa A \ Empresa B	Aumentar la publicidad b_1	Descuentos por cantidad b_2	Extensión de la garantía b_3	Mínimo
Aumentar la publicidad, a_1	4	3	2	2
Descuentos por cantidad, a_2	−1	4	1	−1
Extensión de la garantía, a_3	5	−2	0	−2
Máximo	5	4	2	

Mínimo de máximos de columna

Máximo de mínimos de fila

Al considerar las entradas de la fila Máximo, se puede garantizar a la empresa B una disminución en la participación de mercado de no más de 2% al seleccionar la estrategia que proporciona el mínimo de los máximos de columna (estrategia b3). Por tanto, la empresa B sigue un procedimiento minimax y selecciona la estrategia b3 como su mejor estrategia. Bajo la estrategia b3 la empresa B sabe que la empresa A no puede obtener más de 2% de participación de mercado.

Identificación de una estrategia pura

Siempre que el máximo de los mínimos de fila sea *igual que* el mínimo de los máximos de columna, los jugadores no pueden mejorar sus resultados al cambiar las estrategias. Se dice que el juego está en un **punto de equilibrio**. En el punto de equilibrio, las estrategias óptimas y el valor del juego no pueden mejorarse cuando cambian las estrategias de cualquier jugador. Por tanto, una **estrategia pura** se define como la estrategia óptima para ambos jugadores. El requisito para una estrategia pura es el siguiente:

$$\text{Máximo(mínimos de fila)} = \text{Mínimo(máximos de columna)}$$

Es decir, el valor maximin para el jugador A es igual al valor minimax para el jugador B. En este ejemplo, la solución del juego es que la empresa A aumente su publicidad (estrategia a_1) y la empresa B extienda la garantía de su producto (estrategia b_3). El valor del juego muestra que la solución óptima aumentará 2% la participación de mercado de la empresa A y disminuirá 2% la participación de mercado de la empresa B.

Con una estrategia pura, ningún jugador puede mejorar su posición al cambiar a una estrategia diferente. En nuestro ejemplo de marketing, la estrategia pura para la empresa A es a_1. Cuando la empresa B selecciona su estrategia pura b_3, el valor del juego muestra un incremento en la participación de mercado de la empresa A de 2%. Observe que si la em- presa B trata de cambiar a su estrategia pura b_3, la participación de mercado de la empresa A aumentará 4% si se selecciona b_1 o aumentará 3% si se selecciona b_2. La empresa B debe permanecer con su estrategia pura b_3 para

obtener el mejor resultado. De modo parecido, note que si la empresa A trata de cambiar su estrategia pura a_1, la participación de mercado de la empresa A aumentará sólo 1% si se selecciona a_2 o no aumentará en lo absoluto si se selecciona a_3. La empresa A debe permanecer con su estrategia pura a_1 para mantener su incremento de 2% en su participación de mercado. Por tanto, incluso si uno de los juga- dores descubre por adelantado la estrategia de su oponente, no podría obtener ventajas al cambiar a una estrategia diferente.
Cuando una estrategia pura es óptima para un juego de dos personas con suma cero, se realizan los pasos siguientes para encontrar la estrategia óptima para cada jugador:

Paso 1. Calcular el resultado mínimo para cada fila (jugador A).
Paso 2. Para el jugador A, seleccionar la estrategia que proporciona el *máximo* de los mínimos de fila.
Paso 3. Calcular el resultado máximo para cada columna (jugador B).
Paso 4. Para el jugador B, seleccionar la estrategia que proporciona el *mínimo* de los máximos de columna.
Paso 5. Si el valor maximin (paso 2) es igual al valor minimax (paso 4), existe una estrategia pura óptima para ambos jugadores. La estrategia óptima para el jugador A se identifica en el paso 2 y la estrategia óptima para el jugador B se identifica en el paso 4. El valor del juego está dado por el valor del punto de equilibrio en el que las estrategias óptimas para ambos jugadores se interceptan.
Si en el paso 5 el valor maximin para el jugador A no es igual al valor minimax para el jugador B, una estrategia pura no es óptima para el juego de dos personas con suma cero. En este caso se recomienda una *estrategia mixta*. En la siguiente sección mostramos cuán- do es necesario emplear una estrategia mixta.

Juegos de estrategia mixta

Considere el juego de dos competidores y suma cero que ocurre en un partido de futbol americano. Los dos jugadores competidores son los dos equipos de futbol. En cada partido, el juego es suma cero porque las yardas ganadas por un equipo son iguales a las yardas per- didas por el otro. Como suele ocurrir en la teoría de juegos, cada equipo debe seleccionar su estrategia antes de conocer la estrategia que selecciona el otro equipo. En este ejemplo, el equipo A está a la ofensiva que trata de ganar yardas, y el equipo B es el que está a la defensiva que trata de mantener en un mínimo las yardas ganadas por el equipo A. Las estrategias de ofensiva para el equipo A se definen como sigue:

a_1 = avance por carrera

a_2 = avance por pase

Las estrategias defensivas para el equipo B son las siguientes:

b_1 = defensa frente a carrera

b_2 = defensa frente a pase

La tabla de resultados muestra las yardas que avanza el equipo A, dependiendo de las estrategias selección

		Equipo B	
		Defensa frente a carrera b_1	Defensa frente a pase b_2
Equipo A	Carrera, a_1	1	6
	Pase, a_2	15	0

dadas por los dos equipos. Al aplicar el procedimiento de cinco pasos utilizado para identificar una estrategia pura, los mínimos de fila y los máximos de columna son los siguientes:

		Equipo B		
		Defensa frente a carrera b_1	Defensa frente a pase b_2	Mínimo
Equipo A	Carrera, a_1	1	6	1
	Pase, a_2	15	0	0
	Máximo	15	6	

El máximo de los mínimos de fila es 1 y el mínimo de los máximos de columna es 6. Como los valores no son iguales, el juego de dos personas con suma cero no tiene una estrategia pura óptima. En este caso se recomienda una solución de **estrategia mixta**. Con una estrategia mixta la solución óptima para cada jugador es seleccionar al azar entre las estrategias de alternativas. En el ejemplo del futbol americano, por tanto, el equipo A a la ofensiva confundirá o variará su selección de jugadas de ataque por carrera (a_1) y pase (a_2), mientras que el equipo B a la defensiva confundirá o variará su selección de jugadas frente a carrera (b_1) y frente a pase (b_2).

Cuando usted piensa en un partido de futbol americano, queda claro que una estrategia pura como que el equipo A siempre seleccione un avance por carrera no funcionará. El equipo B reconocería la estrategia pura del equipo A y siempre estaría preparado con una defensa frente a la carrera. Por tanto, una estrategia mixta del equipo A de a veces correr y a veces enviar pases tendría sentido. Cuando se necesita una solución de estrategia mixta, la teoría de juegos determina las probabilidades óptimas de cada estrategia para cada jugador. Es decir, la solución de la teoría de juegos para el ejemplo del futbol americano indicará al equipo ofensivo las probabilidades óptimas para un avance por carrera y un avance por pase. Al mismo tiempo, la solución dirá al equipo defensivo las probabilidades óptimas para una defensa frente a carrera y una defensa frente a pase. La exposición siguiente muestra cómo calcular estas probabilidades de estrategia mixta.

Sea

p = la probabilidad de que el equipo A seleccione una jugada de carrera

$(1 - p)$ = la probabilidad de que el equipo A seleccione una jugada de pase a2

Cuando existe una solución de estrategia mixta, buscamos determinar la probabilidad p para el equipo A tal que el equipo B no pueda mejorar su resultado al cambiar su estrategia defensiva.

Primero asuma que el equipo B selecciona una defensa frente a carrera como muestra la columna b_1. Si el equipo A selecciona avanzar por carrera con probabilidad p y avanzar con pase con probabilidad $(1 - p)$, el valor esperado de las yardas ganadas para el equipo A se calcula como sigue:

Si el equipo B selecciona a_1:

$$\text{VE(yardas)} = 1p + 15(1 - p)$$

Si el equipo B selecciona su defensa frente a carrera como muestra la columna b_2, el valor esperado de las yardas ganadas por el equipo A será el siguiente:

Si el equipo B selecciona b_2:

$$\text{VE(yardas)} = 6p + 0(1 - p) + 6p$$

Para garantizar que el equipo B no cambie su estrategia y disminuya el valor esperado de las yardas ganadas por el equipo A, se establece la igualdad de los dos valores esperados y se calcula el valor de p.

$$1p + 15(1 - p) = 6p$$

$$1p + 15 - 15p = 6p$$

$$20p = 15$$

$$p = 15/20 = 0.75$$

Con $p = 0.75$, $(1 - p) = 1 - 0.75 = 0.25$. Este resultado indica al equipo A que debe seleccionar una jugada de carrera con una probabilidad de 0.75 y una jugada de pase con una probabilidad de 0.25. El valor esperado de las yardas ganadas, que es el *valor del juego,* es

$\text{VE(yardas)} = 1p + 15(1 - p) = 1(0.75) + 15(0.25) = 4.5$ yardas por jugada Ahora

considere las probabilidades óptimas para el equipo B. Sea

q = la probabilidad de que el equipo B seleccione una defensa frente a carrera

$(1 - q)$ = la probabilidad de que el equipo B seleccione una defensa frente a pase

Con la misma lógica que empleamos para calcular las probabilidades óptimas del equipo A, queremos determinar el valor de q tal que el equipo A no pueda aumentar el valor esperado de las yardas ganadas al cambiar su estrategia ofensiva. Primero calculamos el valor esperado de las yardas para el equipo B para los dos casos siguientes:

Si el equipo A selecciona a_1:

$$\text{VE(yardas)} = 1q + 6(1 - q)$$ Si el

equipo A selecciona a_2:

$$\text{VE(yardas)} = 15q + 0(1 - q) = 15q$$

Para garantizar que el equipo A no cambie su estrategia y afecte el valor esperado de las yardas para el equipo B, se establece la igualdad de los dos valores y se calcula el valor de q como sigue:

$$1q + 6(1 - q) = 15q$$

$$1q + 6 - 6q = 15q$$

$$20q = 6$$

$$q = 6/20 = 0.30$$

Con $q = 0.30$, $(1 - q) = 1 - 0.30 = 0.70$. Este resultado indica al equipo B que debe seleccionar una defensa frente a carrera con una probabilidad de 0.30 y una defensa frente a pase con una probabilidad de 0.70. Las yardas esperadas ganadas, que es el valor del juego, seguirán siendo 4.5 yardas por jugada.

Por tanto, tenemos una solución de estrategia mixta para el ejemplo del partido de futbol americano. Cualquier juego de estrategia mixta de 2 X 2, de dos personas con suma cero puede resolverse algebraicamente como muestra este ejemplo. Si un juego de dos personas con suma cero más grande involucra una estrategia mixta, resolverlo es un poco más complicado.

Un juego más grande de estrategia mixta

Considere el juego siguiente de dos personas con suma cero:

		Jugador B		
		b_1	b_2	b_3
Jugador A	a_1	0	−1	2
	a_2	5	4	−3
	a_3	2	3	−4

Con el procedimiento usual para identificar una estrategia pura, calculamos los mínimos de fila y los máximos de columna:

		Jugador B			
		b_1	b_2	b_3	**Mínimo**
Jugador A	a_1	0	−1	2	−1
	a_2	5	4	−3	−3
	a_3	2	3	−4	−4
	Máximo	5	4	2	

El máximo de los mínimos de fila es –1 y el mínimo de los máximos de columna es 2. Como los valores maximin y minimax no son iguales, el juego de dos personas con suma cero no tiene una estrategia pura óptima. No obstante, con un problema mayor que 2 X 2, no podemos utilizar la solución algebraica para las probabilidades de estrategia mixta como lo hicimos en el ejemplo anterior.

Si un juego mayor que 2 X 2 requiere una estrategia mixta, primero buscamos estrategias dominadas con el fin de reducir el tamaño del juego. Una **estrategia dominada** existe si otra estrategia *es al menos tan buena* sin importar lo que haga el oponente. Por ejemplo, considere las estrategias a_2 y a_3. La tabla de resultados muestra que en la columna b_1 5 > 2; en la columna b_2 4 > 3, y en la columna b_3 -3 > -4. Por tanto, haga lo que haga el jugador B, el jugador A siempre preferirá los valores mayores de la estrategia a_2 comparados con la estrategia a_3. Por tanto, la estrategia a_3 está dominada por la estrategia a_2 y puede pasar inadvertida por el jugador A. La eliminación de las estrategias dominadas del juego reduce el tamaño del mismo. Después de eliminar a_3 el juego reducido se vuelve

		Jugador B		
		b_1	b_2	b_3
Jugador A	a_1	0	−1	2
	a_2	5	4	−3

A continuación buscamos más estrategias dominadas. El jugador A no encuentra otras estrategias dominadas. Sin embargo, considere las estrategias b_1 y b_2 para el jugador B. Recuerde que el jugador B está interesado en valores pequeños. La tabla de resultados muestra que en la fila a_1, -1 < 0, y en la fila a_2, 4 < 5. Por tanto, sin importar lo que haga el jugador A, el jugador B siempre preferirá los valores menores de la estrategia b_2 en comparación con la estrategia b_1. Así que la estrategia b_1 está dominada por la estrategia b_2 y puede eliminarse del juego. Con la eliminación de esta estrategia dominada, el juego reducido se vuelve

		Jugador B	
		b_1	b_3
Jugador A	a_1	−1	2
	a_2	4	−3

Al eliminar sucesivamente las estrategias dominadas, reducimos el juego a uno de 2 X 2. Ahora se puede utilizar el procedimiento de solución algebraica descrito en esta sección para identificar las probabilidades óptimas para la solución de estrategia mixta.

Por último, es importante darse cuenta de que ninguna regla rígida identifica las estrategias dominadas. Básicamente, el analista debe hacer comparaciones por pares de las estrategias de decisión en un intento por identificar las estrategias dominadas. El objetivo es identificar y eliminar las estrategias dominadas en secuencia para reducir el juego a uno de 2 X 2, de modo que se pueda utilizar un procedimiento de solución algebraica para resolver las probabilidades de estrategia mixta.

Resumen de los pasos para resolver los juegos de suma cero para dos personas

El resumen siguiente lista los pasos empleados para resolver los juegos de suma cero para dos personas:

1. Utilice el procedimiento maximin para el jugador A y el procedimiento minimax para el jugador B con el fin de determinar si existe una solución de estrategia pura. (Consulte los pasos previos para identificar una estrategia pura.) Si existe una es- trategia pura, es la solución óptima.
2. Si no existe una estrategia pura y el juego es mayor que 2 X 2, identifique una estrategia dominada para eliminar una fila o columna. Elabore la tabla de resultados reducida y continúe con la dominancia para eliminar el mayor número de filas y columnas posible.
3. Si el juego reducido es 2 X 2, calcule las probabilidades de una estrategia mixta óptima posible.

Si el juego no se puede reducir a uno de 2 X 2, utilice un modelo de programación lineal para calcular las probabilidades de estrategia mixta óptima. La formulación de un modelo de programación lineal para resolver estos problemas de la teoría de juegos más grandes está fuera del ámbito de este libro.

Extensiones

Presentamos el modelo básico para juegos de suma cero para dos personas. Sin embargo, los modelos de la teoría de juegos se extienden más allá de los juegos de suma cero para dos personas. Una extensión es un juego de dos personas con suma constante que ocurre cuando los resultados de las estrategias elegidas suman una constante diferente de cero. Además, la teoría de juegos puede extenderse para incluir juegos de *n* personas más generales. Los juegos de cooperativa donde se permite a los jugadores comunicarse antes de jugar son otra variante. Por último, algunos modelos de la teoría de juegos permiten que un número infinito de estrategias estén disponibles para los jugadores.

- Si existe una estrategia pura, es la solución óptima para el juego.
- La identificación y eliminación de estrategias dominadas puede reducir el juego a uno de 2 X 2. Si esto ocurre, es posible utilizar un procedimiento algebraico para determinar la solución de la estrategia mixta.
- Antes de 1944, cuando Von Neumann y Morgenstern publicaron su libro Theory of Games and Economic Behavior, la literatura sobre las decisiones que implican riesgos consistía principalmente en aplicaciones que involucraban el uso de la probabilidad en los juegos.
- En 1994 John Harsanui, John Nash y Reinhard Selten recibieron el Premio Nobel de economía por su trabajo en la teoría de juegos no cooperativos.

Bibliografía:

- **T Anderson Seeney . Métodos Cuantitativos para los Negocios. Séptima Edición. Thomson Editores - 2003**