UTN HAEDO

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL HAEDO

MECÁNICA ORBITAL

MANIOBRAS ORBITALES

Repaso de formulas de orbita

Todas las orbitas

$$\boxed{h = r\, v_\perp}$$

$$r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e\cos\theta}$$

$$v_r = \frac{\mu}{h} e \sin\theta$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\perp^2}$$

$$\tan\gamma = \frac{v_r}{v_\perp}$$

Repaso de formulas de orbita

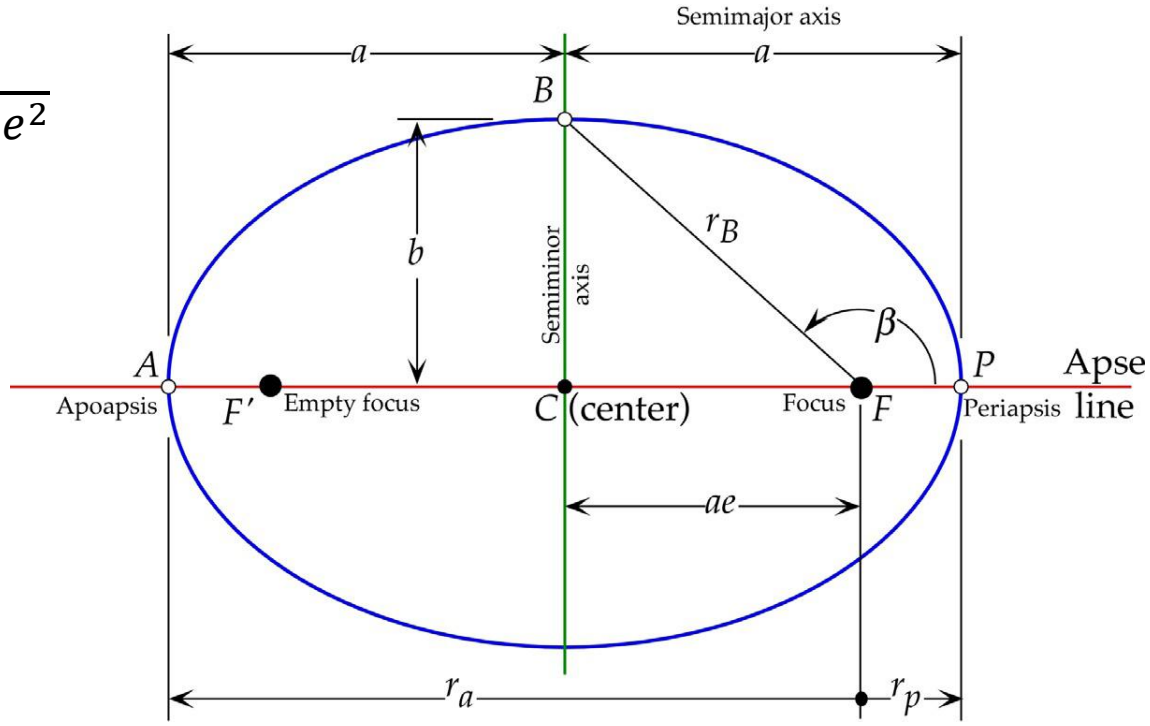
Elipticas ($0 < e < 1$)

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1 - e^2}$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$$

$$T = \frac{2\,\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2}$$

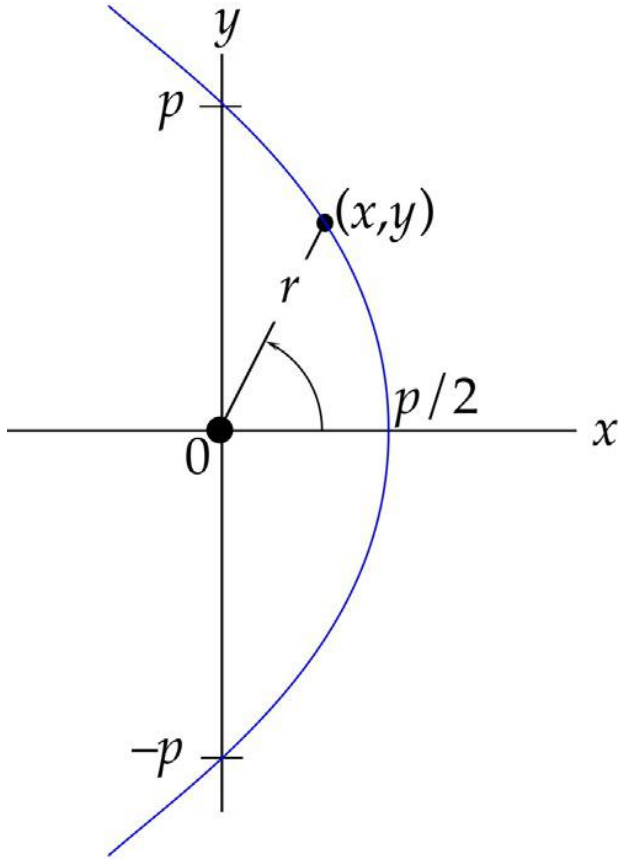
$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$



Repaso de formulas de orbita

Parabólicas $(e = 1)$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = 0$$



Repaso de formulas de orbita

Hiperbólicas $(e > 1)$

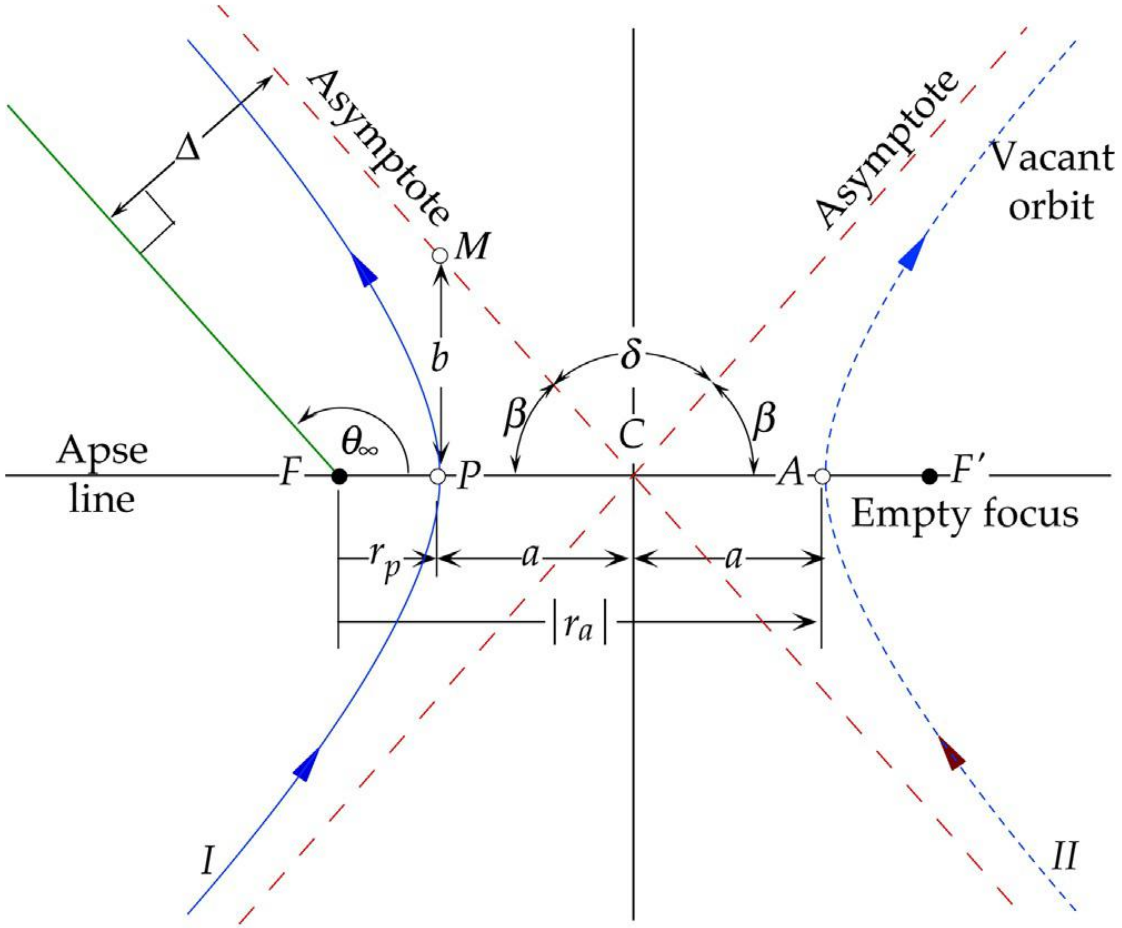
$$\theta_\infty = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{e}\right)$$

$$\delta = 2\,sin^{-1}\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$\Delta = a\sqrt{e^2 - 1}$$

$$a = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{e^2 - 1}$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{\mu}{2a}$$



Repaso de formulas de orbita

Hiperbólicas $(e > 1)$

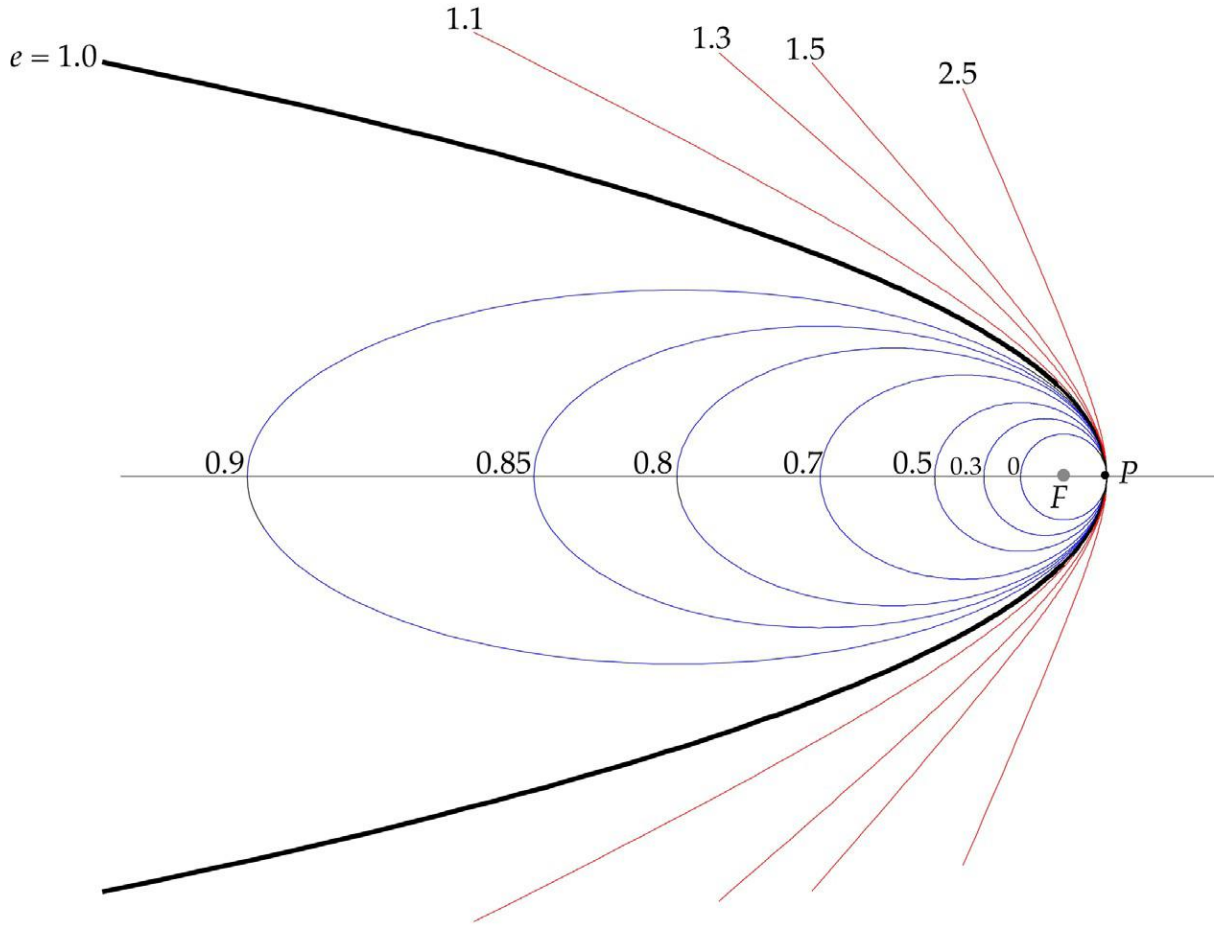
Notar que estas dos ultimas ecuaciones pueden reescribirse como sigue (donde a es positivo),

$$-a = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1-e^2} \qquad \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2(-a)}$$

Es decir, si suponemos que el semieje mayor de una hipérbola tiene un valor negativo, entonces la fórmula del semieje mayor y la ecuación de energia se vuelven idénticas para elipses e hipérbolas. No hay ninguna ventaja en este punto en exigir que las hipérbolas tengan semiejes mayores negativos. Sin embargo, será necesario hacerlo para la formulación de la variable universal que se presentará en próximas unidades.

Repaso de formulas de orbita

Confines de comparación, la Figura muestra una variedad de trayectorias, desde un círculo hasta hipérbolas, todas con un foco y periapsis comunes. La parábola es la demarcación entre las órbitas cerradas de energía negativa (elipses) y las órbitas abiertas de energía positiva (hipérbolas).



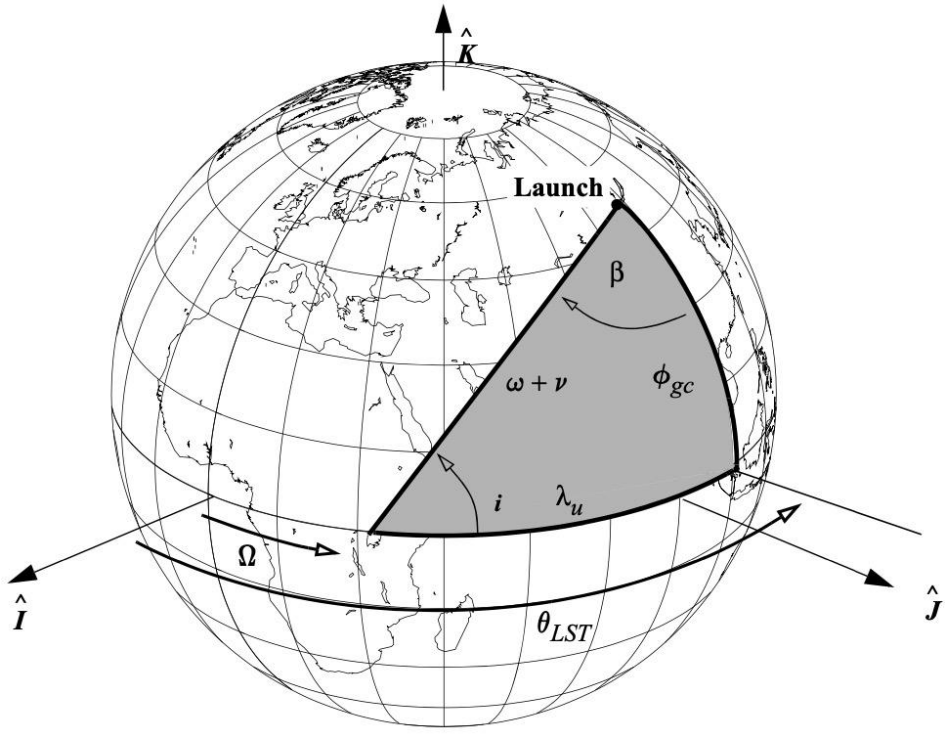
Limitaciones de acceso al espacio

Los lanzamientos directos (es decir, aquellos que van de forma directa a la órbita deseada) tienen limitaciones geométricas:

La inclinación i de una orbita será mayor o igual a la latitud de lanzamiento ϕ_{gc}

El ángulo β de azimut de lanzamiento, determina la dirección de lanzamiento y se puede calcular como:

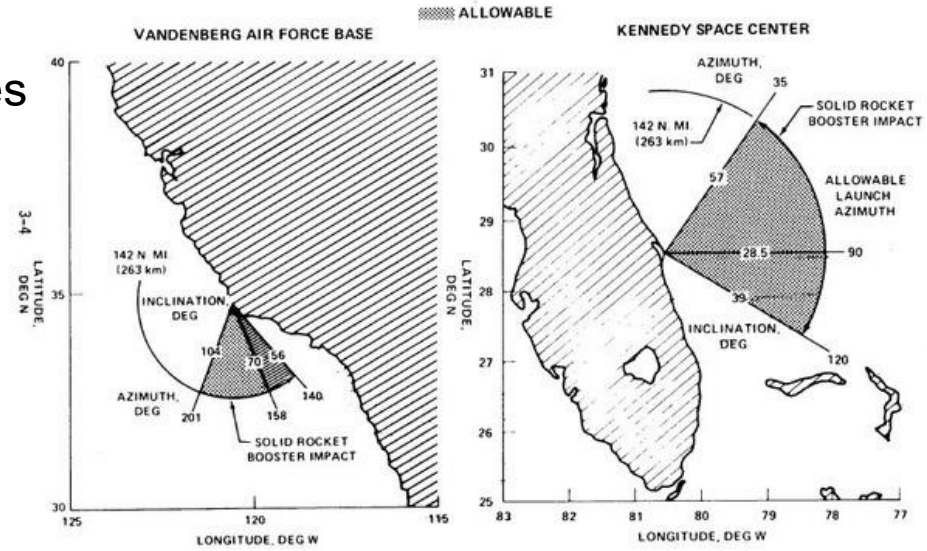
$$\sin\beta = \frac{\cos i}{\cos\phi_{gc}}$$

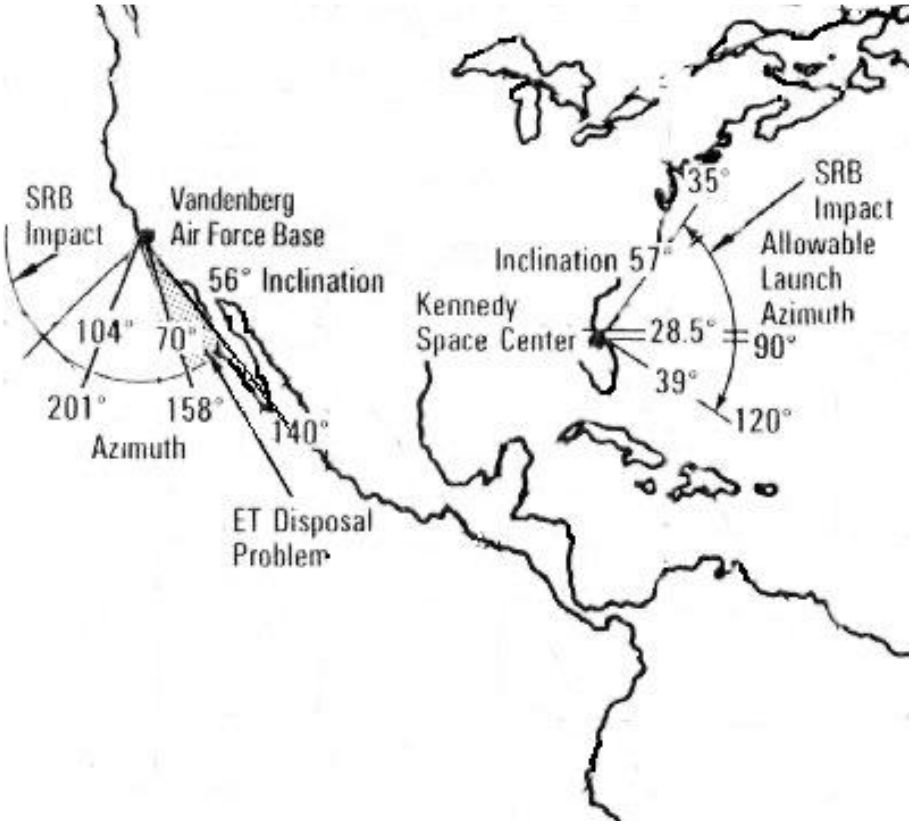


Limitaciones de acceso al espacio

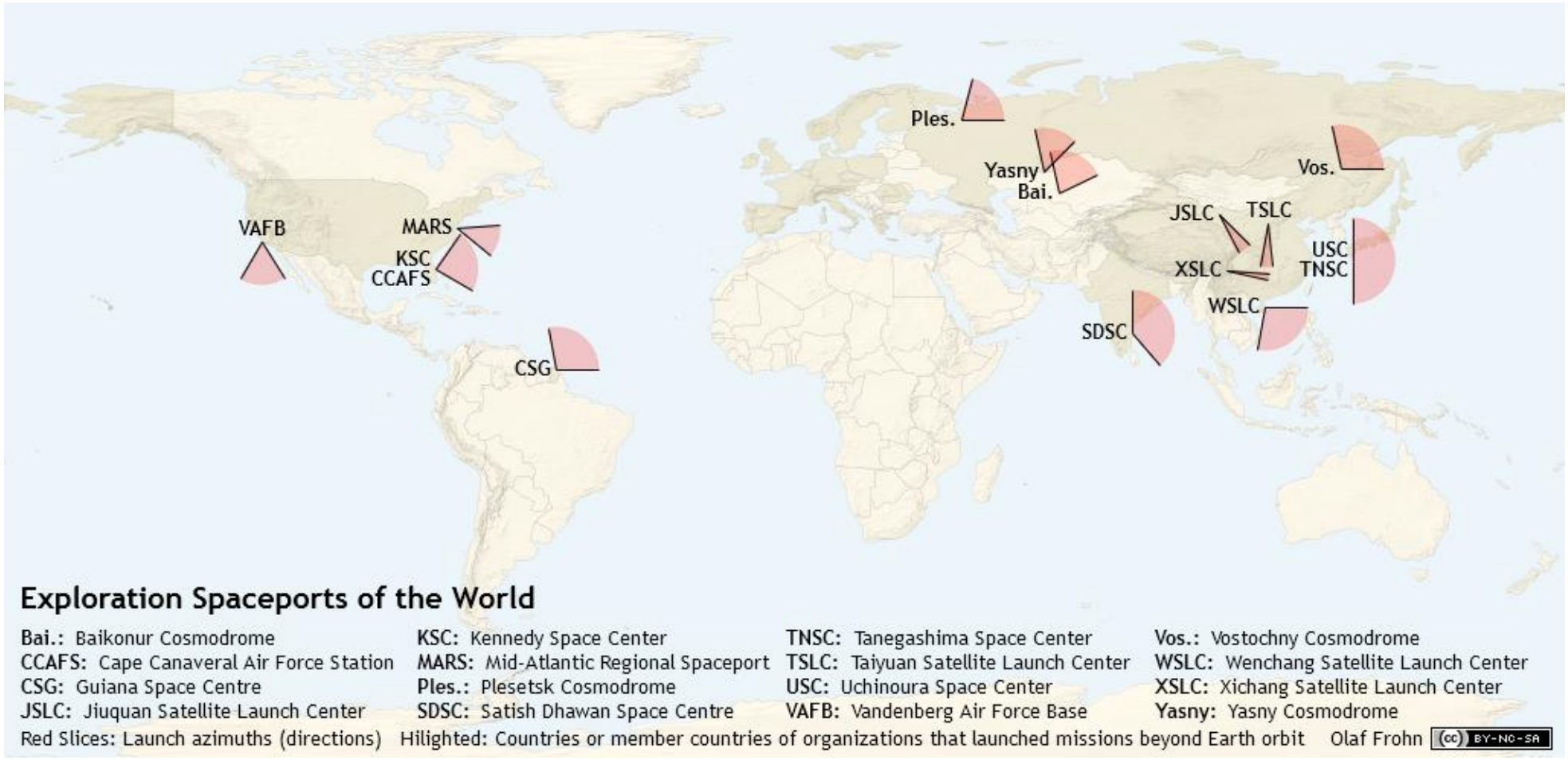
Más allá de las limitaciones geométricas, se tienen limitaciones por seguridad:

- Áreas pobladas
- Espacio aéreo restringido
- Conflictos internacionales



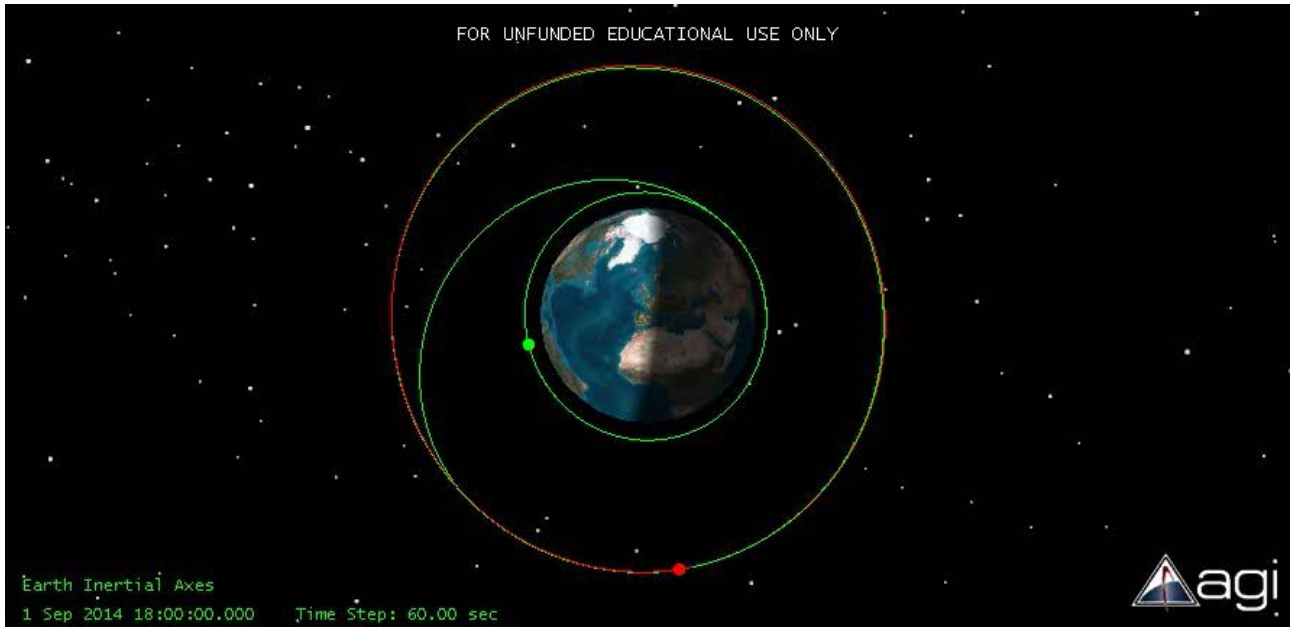


Limitaciones de acceso al espacio



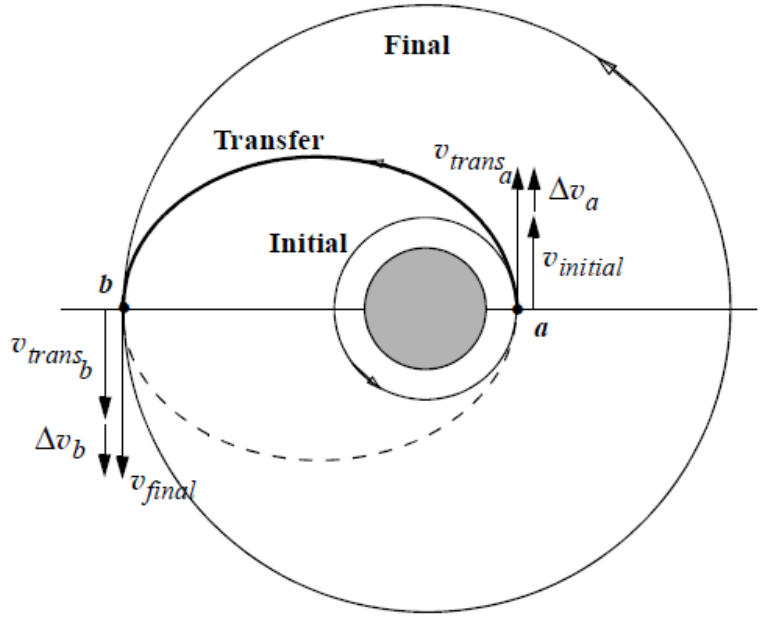
Introducción

Las maniobras orbitales permiten modificar la trayectoria de una nave espacial mediante la aplicación controlada de empuje. Estas maniobras pueden utilizarse para transferir un vehículo entre distintas órbitas, corregir errores de inserción orbital, realizar encuentros espaciales (*rendezvous*), modificar la inclinación orbital o incluso escapar del campo gravitatorio de un planeta.



Maniobras impulsivas

Las maniobras impulsivas constituyen una idealización. En este modelo se supone que el encendido de los motores produce un cambio instantáneo de velocidad mientras que la posición de la nave espacial permanece inalterada durante la maniobra. Esta hipótesis valida para sistemas de propulsión de alto empuje cuyos tiempos de combustión son pequeños en comparación con los tiempos de vuelo libre de la nave (*coasting time*).

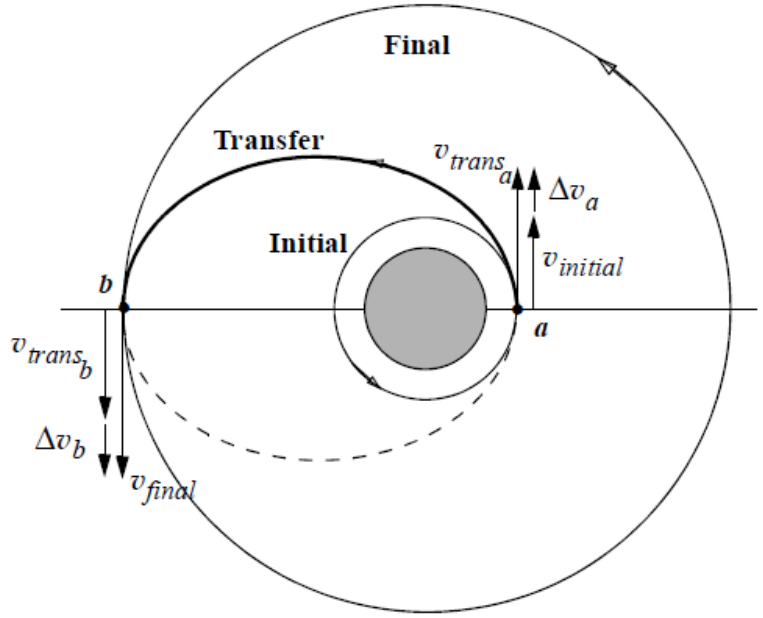


Maniobras impulsivas

El parámetro fundamental para caracterizar una maniobra impulsiva es el incremento de velocidad $\boldsymbol{\Delta v}$, definido como la variación del vector velocidad producida por el encendido de los motores. El $\boldsymbol{\Delta v}$ puede representar:

- Un cambio en la magnitud de la velocidad (*pumping maneuver*).
- Un cambio en la dirección de la velocidad (*cranking maneuver*).
- Variaciones simultáneas en magnitud y dirección.

El presupuesto total de una misión espacial suele expresarse en términos de Δv, ya que este parámetro determina directamente la cantidad de propelente requerida.



Maniobras impulsivas

La magnitud Δv del incremento de velocidad está relacionada con Δm, la masa de propelente consumida, mediante la ecuación ideal del cohete de Tsiolkovsky:

$$\Delta v = Isp\ g_0 \ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right)$$

Desarrollando:

$$\frac{\Delta m}{m} = 1 - e^{-\frac{\Delta v}{I_{sp} g_0}}$$

Donde Isp es el impulso específico (medido en segundos), g_0 es la gravedad estándar y m es la masa de la nave.

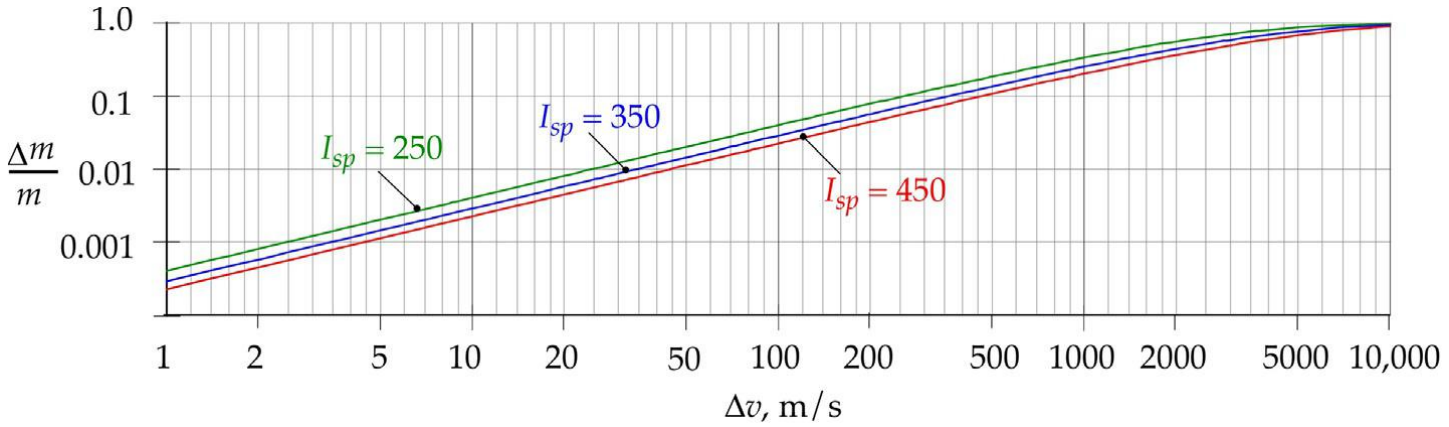
Maniobras impulsivas

El impulso específico Isp se define como el empuje por la tasa de peso a nivel del mar (por segundo) del consumo de propelente, y es una medida del rendimiento de un sistema de propulsión de cohete

$$I_{sp} = \frac{\mathrm{T}}{\dot{m}\, g_0}$$

Table 6.1 Some typical specific impulses

Propellant	I_{sp} (s)
Cold gas	50
Monopropellant hydrazine	230
Solid propellant	290
Nitric acid/monomethylhydrazine	310
Liquid oxygen/liquid hydrogen	455
Ion propulsion	>3000



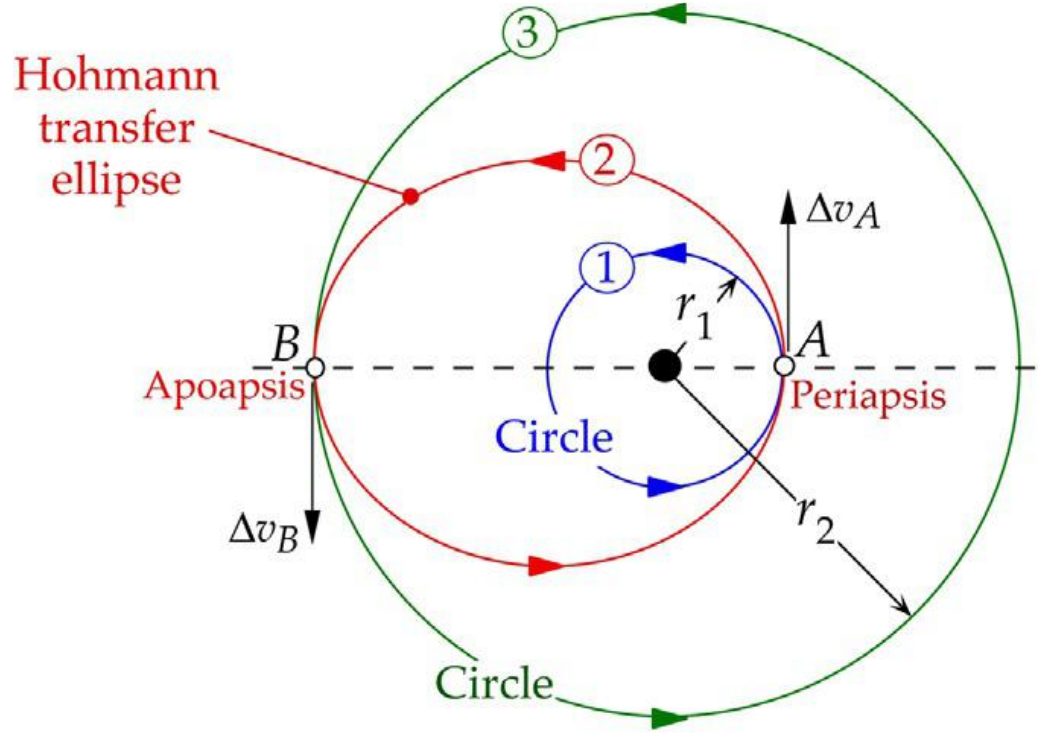
Transferencia de Hohman

La transferencia de Hohmann es una maniobra orbital de dos impulsos utilizada para transferir una nave espacial entre dos órbitas coplanares que comparten un mismo foco.

Se realiza en dos etapas:

- **Primer impulso (** Δv_A **)**: aumenta o disminuye la energía orbital para ingresar a una órbita elíptica de transferencia.
- **Segundo impulso (**Δv_B**)**: circulariza la órbita en el nuevo radio.

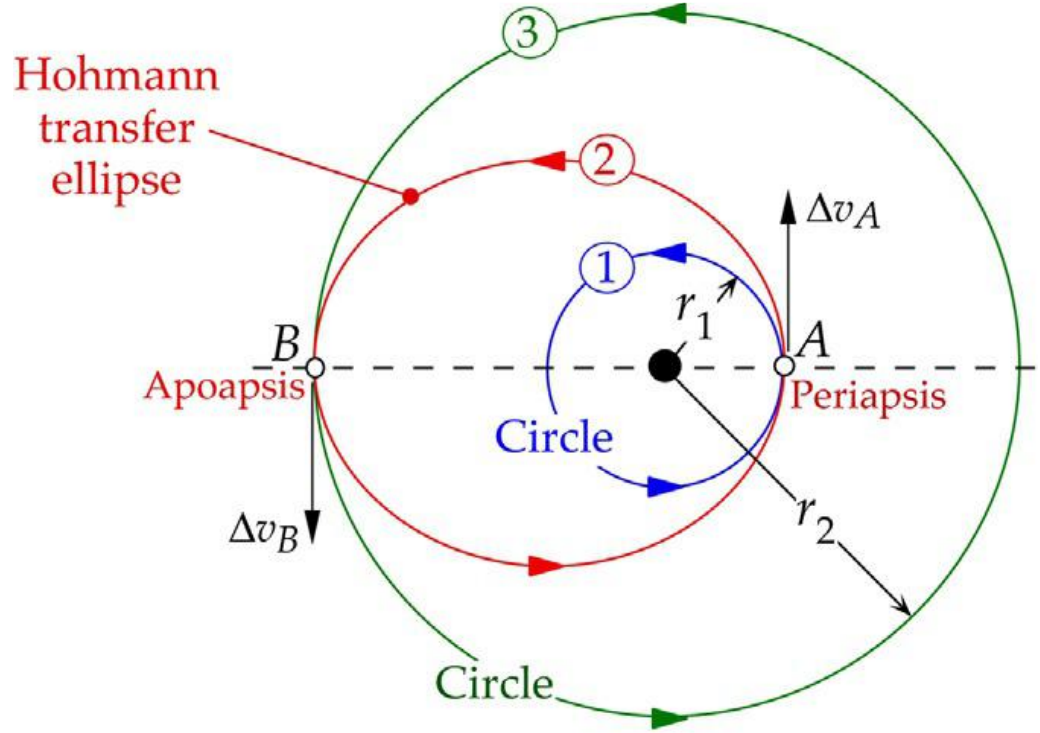
Logra el cambio orbital con el menor consumo de propelente posible entre todas las transferencias de dos impulsos



Transferencia de Hohman

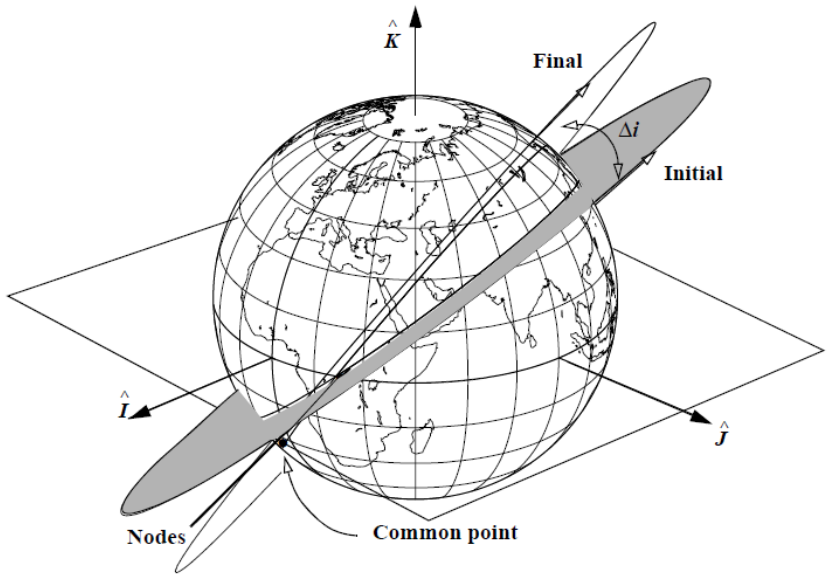
Para desarrollar las ecuaciones clásicas de la transferencia de Hohmann se realizan las siguientes hipótesis:

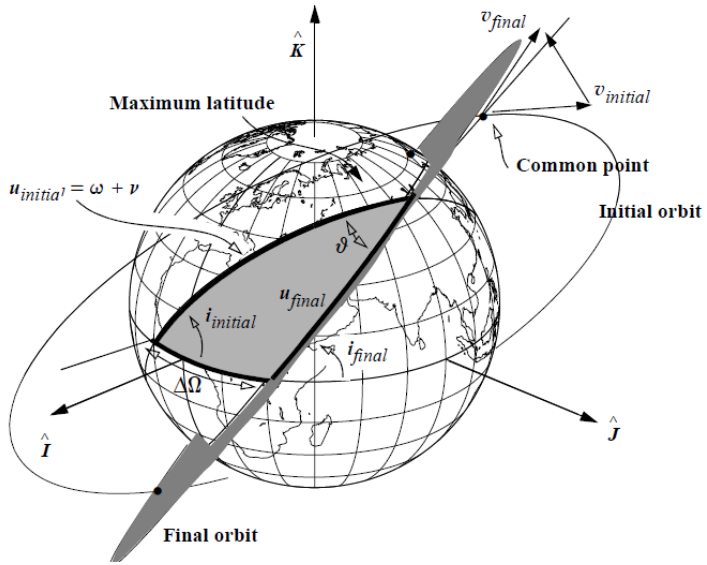
- Las órbitas inicial y final son coplanares.
- Las órbitas son coapsidales.
- Los impulsos son tangenciales a la trayectoria.
- Las maniobras son instantáneas.

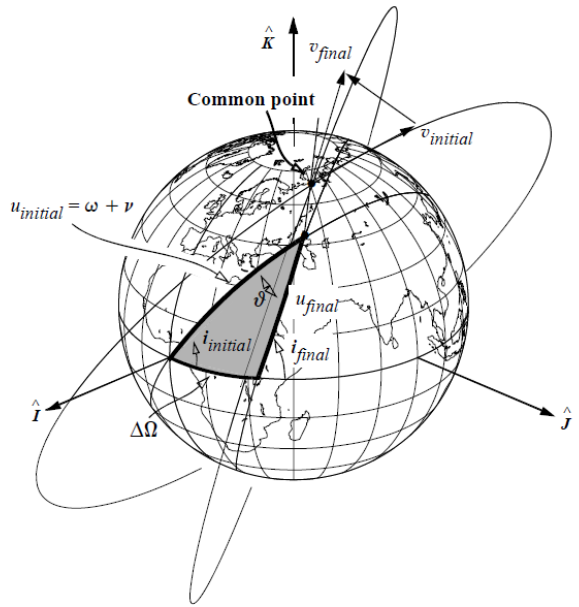


Órbitas coplanares

Dos órbitas son coplanares cuando se encuentran contenidas en un mismo plano orbital. En términos de elementos orbitales clásicos, esto implica que ambas órbitas poseen la misma inclinación orbital y la misma ascensión recta del nodo ascendente. La hipótesis de coplanaridad elimina la necesidad de realizar cambios de plano orbital, los cuales suelen requerir cantidades muy elevadas de Δv

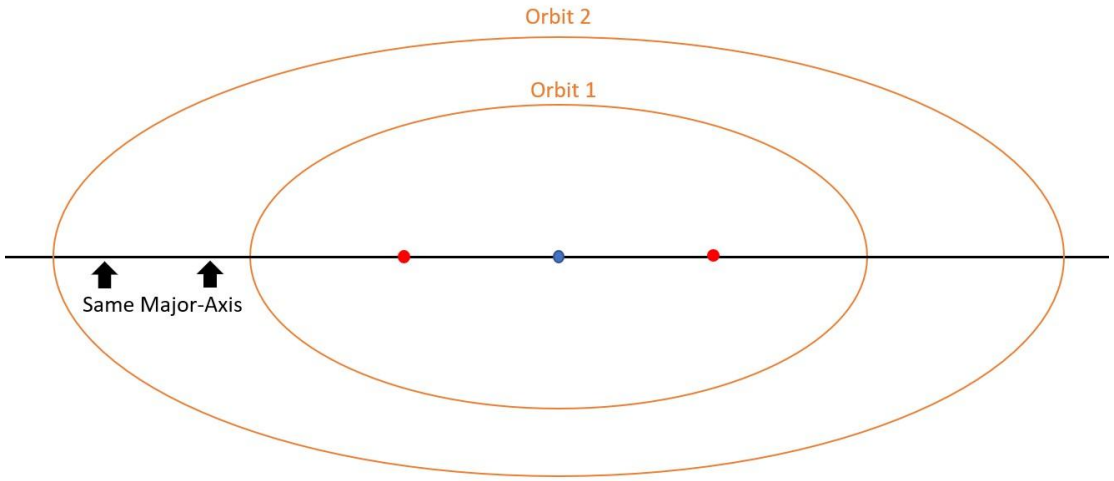


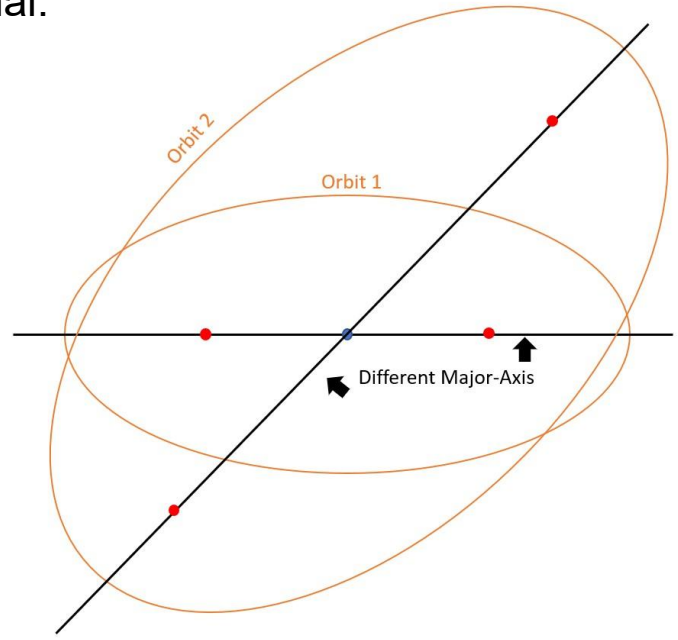




Órbitas coapsidales

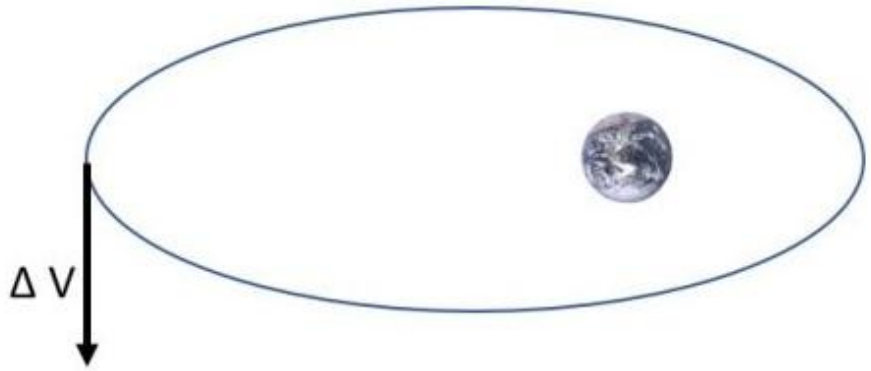
Dos órbitas son coapsidales cuando la línea que une el periapsis y el apoapsis tiene la misma orientación en ambas órbitas. Para órbitas circulares esta condición equivale a que sus centros geométricos se encuentren alineados. Para órbitas elípticas implica que sus líneas de ápsides poseen la misma orientación. Esta condición permite definir una única órbita de transferencia tangente simultáneamente a las órbitas inicial y final.

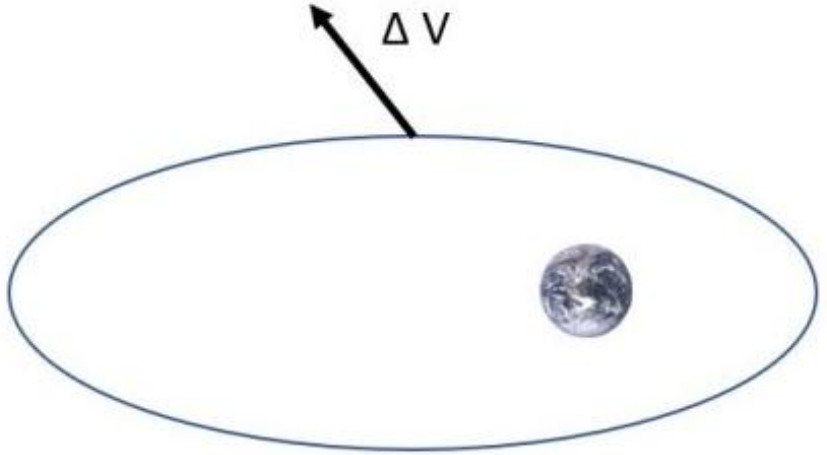




Impulsos tangenciales

En una transferencia de Hohmann los impulsos se aplican paralelamente al vector velocidad. Por lo tanto, el empuje actúa únicamente modificando la energía orbital sin introducir componentes adicionales destinadas a cambiar la dirección instantánea de la trayectoria. Cualquier desviación respecto de la dirección tangencial incrementa el Δv requerido y reduce la eficiencia de la maniobra.





Impulsos instantáneos

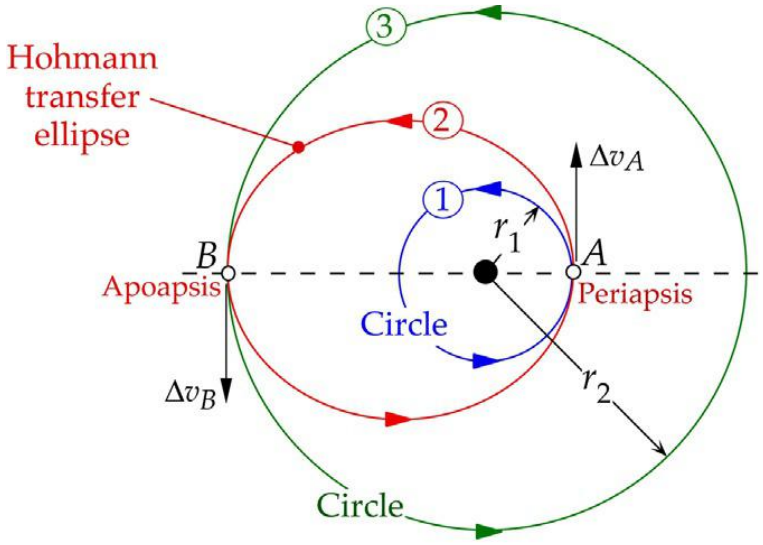
Aunque físicamente ningún encendido ocurre de forma instantánea, en Mecánica Orbital suele asumirse que la duración de la combustión es despreciable frente a los tiempos característicos del movimiento orbital. Bajo esta aproximación, la posición permanece constante durante la maniobra y únicamente se modifica la velocidad de la nave espacial. Esta hipótesis simplifica considerablemente el análisis matemático de las transferencias orbitales.

Circular a circular

La transferencia de Hohmann consiste en una órbita elíptica tangente a ambas órbitas circulares sobre su línea de ápsides, tal como se muestra en la figura. El periapsis y el apoapsis de la elipse de transferencia coinciden con los radios de la órbita circular interior y exterior, respectivamente.

Evidentemente, durante la maniobra solo se recorre la mitad de la elipse, pudiendo realizarse la transferencia en cualquiera de los dos sentidos:

- Desde la órbita interior hacia la exterior.
- Desde la órbita exterior hacia la interior.

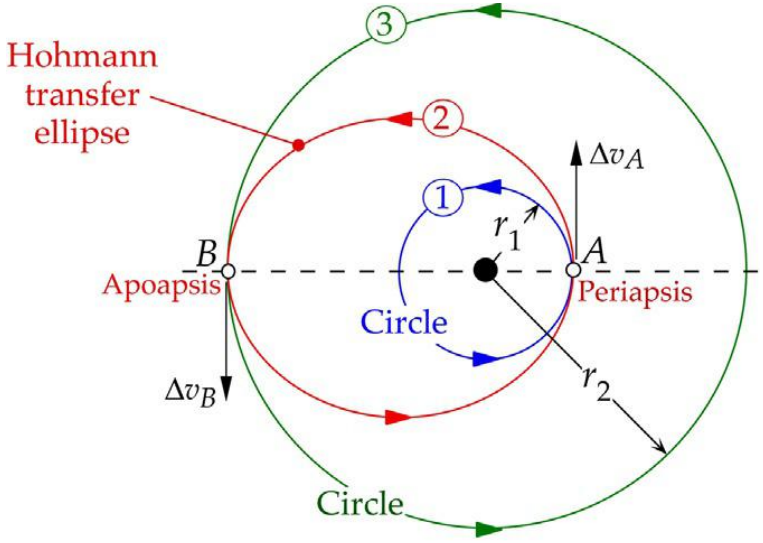


Circular a circular

Puede resultar útil recordar que la energía orbital depende únicamente del semieje mayor a. Para una órbita elíptica, la energía específica es

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{2a}$$

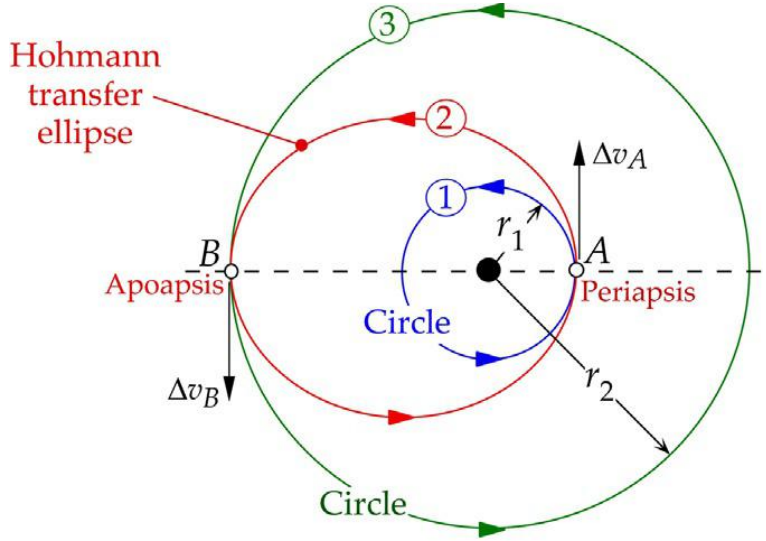
Como la energía específica es negativa, aumentar la energía implica reducir su magnitud, es decir, hacer que ε sea menos negativa. Por lo tanto, cuanto mayor sea el semieje mayor a, mayor será la energía de la órbita. En la figura anterior, la energía aumenta a medida que se pasa de la órbita circular interior a la exterior.



Circular a circular

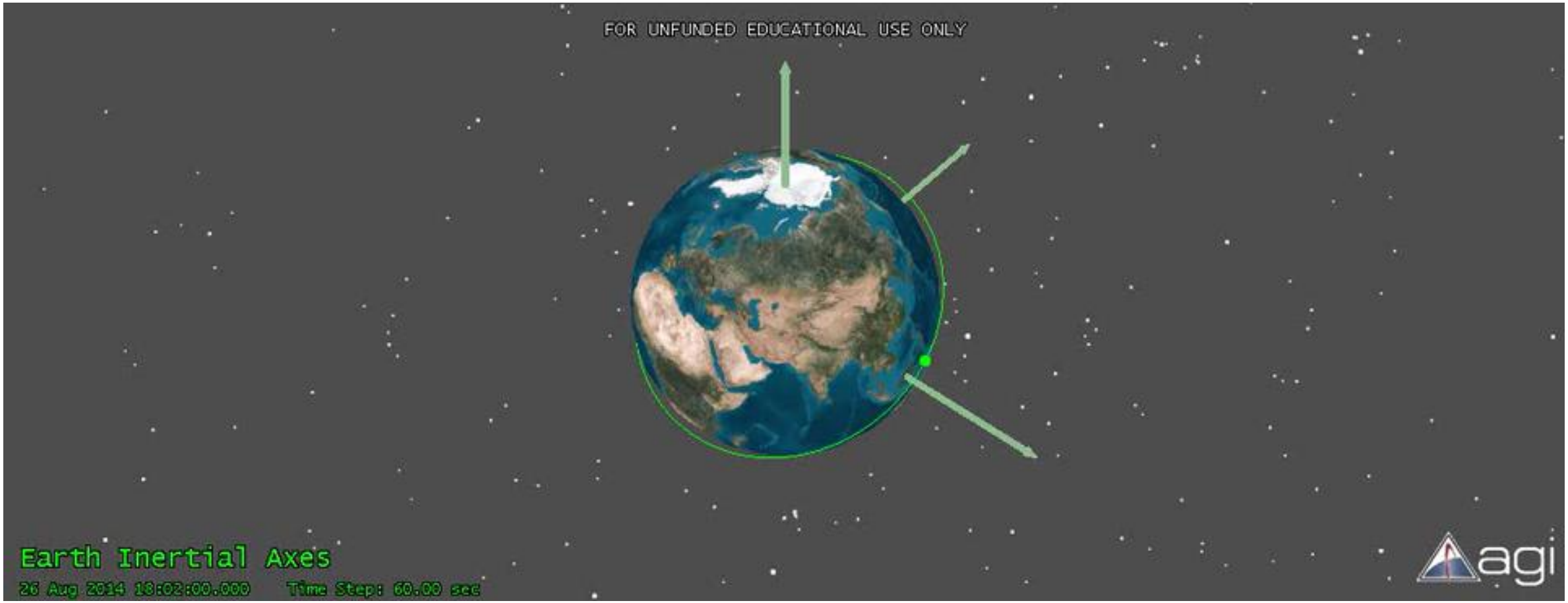
Comenzando en A en el círculo interior (orbita 1), se requiere un incremento de velocidad Δv_A en la dirección del vuelo para impulsar la nave a la trayectoria elíptica (orbita 2 u orbita de transferencia) de mayor energía $\left(\varepsilon = -\frac{\mu}{2a}\right)$.

Después de viajar desde A hasta B, otro incremento de velocidad hacia adelante Δv_B coloca la nave en la órbita circular exterior (orbita 3), de mayor energía. Sin esto, la nave permanecería en la orbita de transferencia, y volvería al punto A.

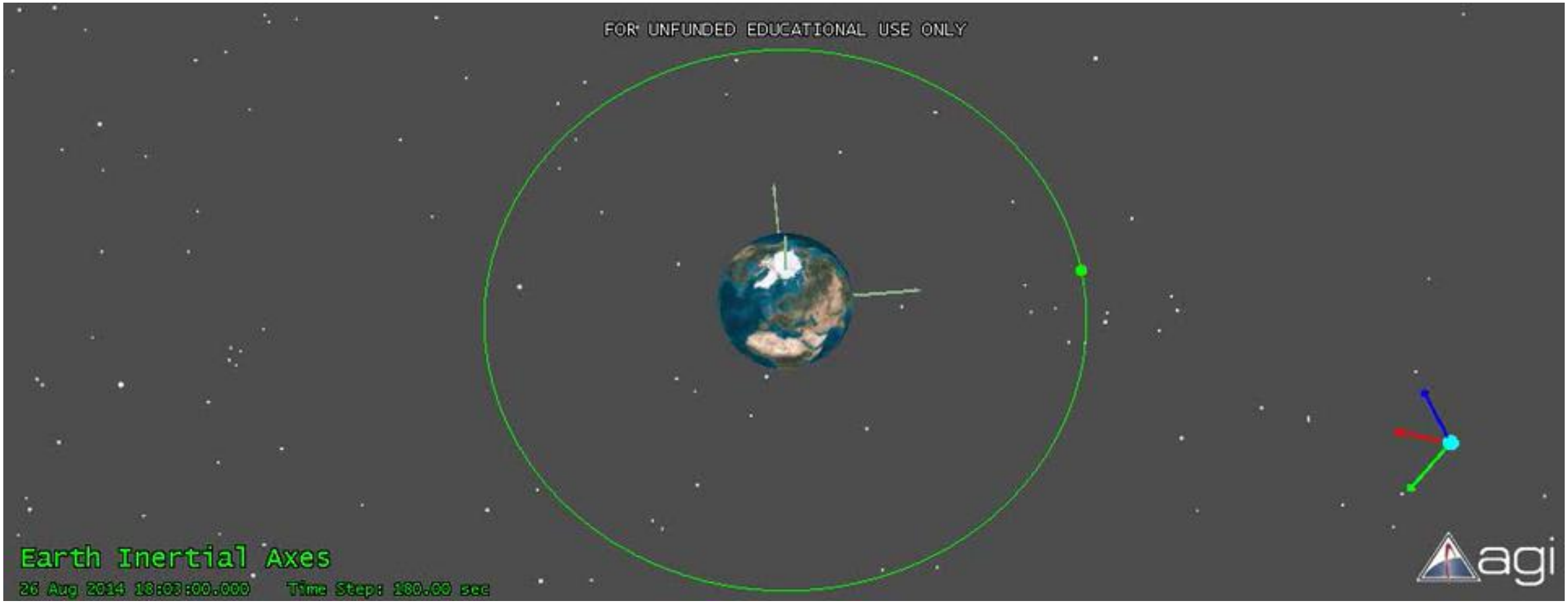


El gasto total de energía seria $\Delta v_{total} = \Delta v_A + \Delta v_B$, y es el mismo si la transferencia comienza en B y voy hacia A (los Δv deben realizarse mediante retrodisparos, es decir, el empuje del cohete de maniobra se dirige en sentido opuesto a la dirección del vuelo para actuar como freno.)

Circular a circular



Circular a circular



Circular a circular

Usando las expresiones de excentricidad de orbita elíptica y de radio, podemos despejar el momento angular:

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \qquad r_p = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e}$$

$$r_p = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+\frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}} \rightarrow r_p = \frac{h^2}{\mu}\frac{r_a + r_p}{2\,r_a} \rightarrow \boxed{h = \sqrt{2\mu}\sqrt{\frac{r_a r_p}{r_a + r_p}}}$$

Caso de orbita circular

Si $r_a = r_p$

$$\boxed{h = \sqrt{\mu\, r}}$$

Y la ecuación de energía:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2\,a} \rightarrow v = \sqrt{2\,\mu}\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}}$$

Caso de orbita circular

Si $r_a = r_p$

$$v_{circular} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$

Circular a circular

Otro dato importante es el tiempo de vuelo (TOF) de esta orbita. Como sabemos que es la mitad del período de la órbita, podemos calcular lo siguiente con cualquiera de las ecuaciones de TOF:

$$TOF = \frac{1}{2}\left(2\,\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\right)$$

$$TOF = \pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

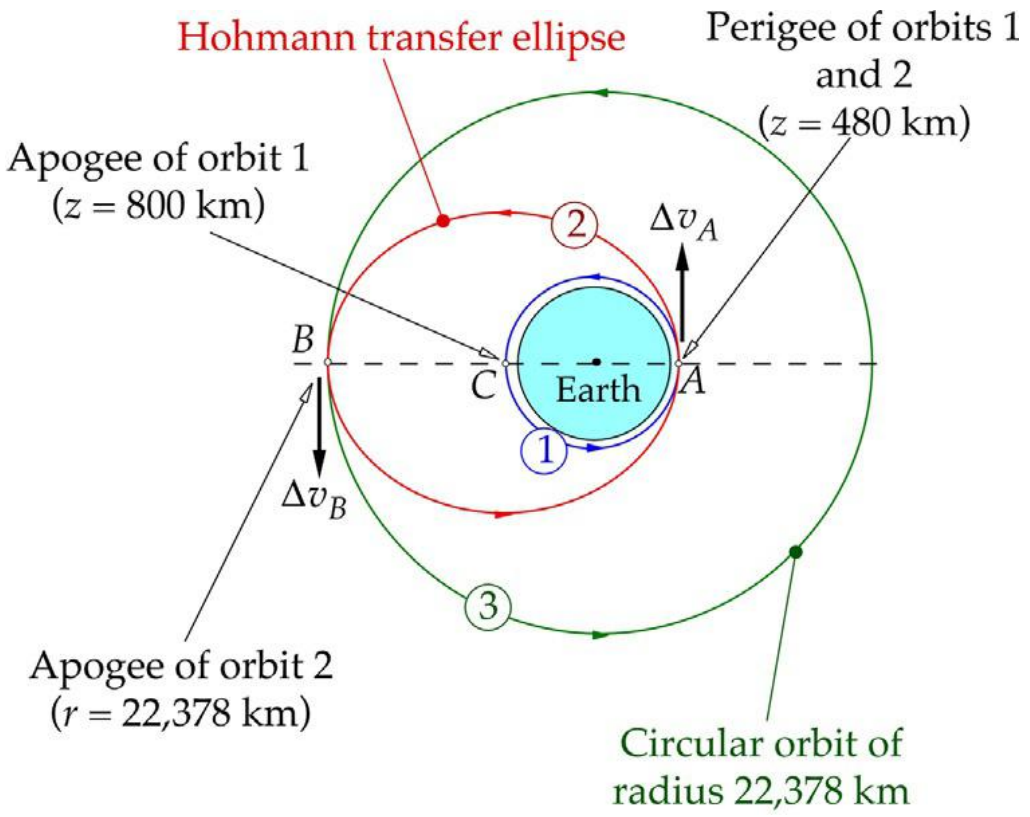
Ejercicio

Una nave espacial de 2000 kg está en una órbita terrestre de 480 km por 800 km (orbita 1). Encontrar

a) El Δv requerido en el perigeo A para colocar la nave espacial en una elipse de transferencia de 480 km por 16,000 km (órbita 2).

b) El Δv (impulso en el apogeo) requerido en B de la órbita de transferencia para establecer una órbita circular de 16,000 km de altitud (órbita 3).

c) El propelente total requerido si el impulso específico es de 300 s.



Ejercicio

Calculo de radios y momentos angulares específicos:

Orbita 1

$r_p = 6378 + 480 = 6858\ km \qquad r_a = 6378 + 800 = 7178\ km$

$$h_1 = \sqrt{2 * 398600}\sqrt{\frac{7178 * 6858}{7178 + 6858}} = 52876\frac{km}{s^2}$$

Orbita 2

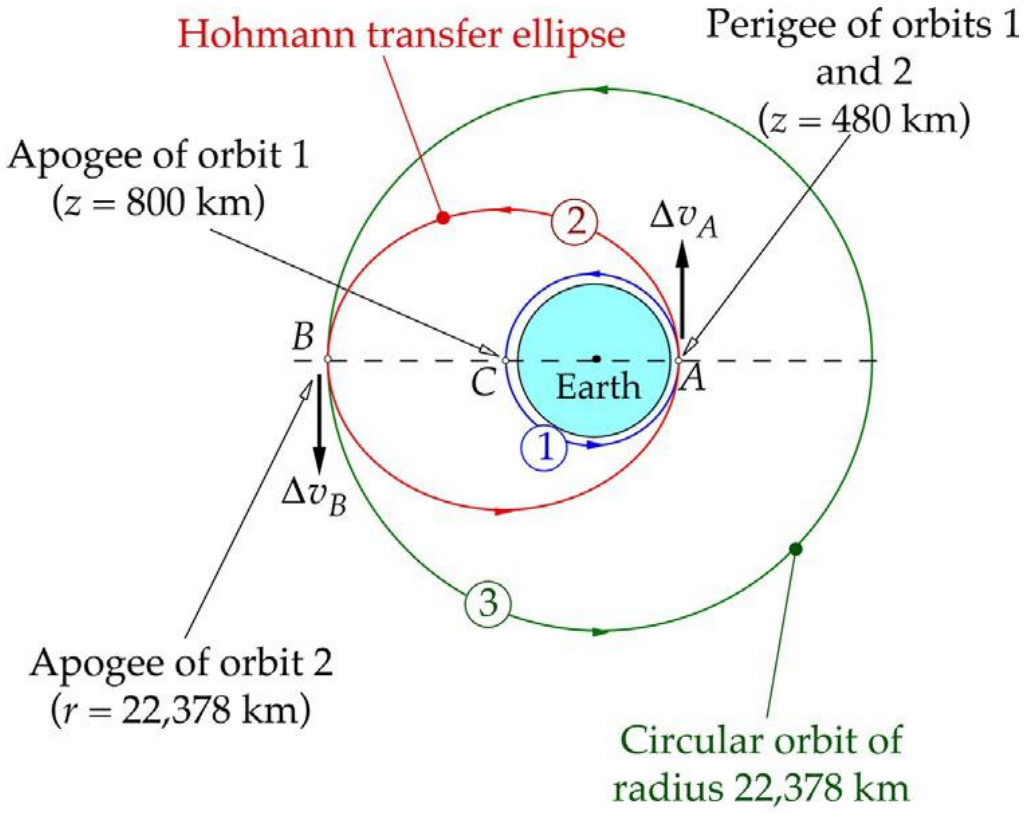
$r_p = 6378 + 480 = 6858\ km \qquad r_a = 6378 + 16000 = 22378 km$

$$h_2 = \sqrt{2 * 398.600}\sqrt{\frac{22378 * 6858}{22378 + 6858}} = 64689.5\frac{km}{s^2}$$

Orbita 3

$$r_a = r_p = 22378\ km$$

$$h_3 = \sqrt{398600 * 22378} = 94445.11\ km/s^2$$



Ejercicio

Calculo de Δv:

La velocidad en la orbita 1 en el punto A

$$v_{A_1} = \frac{h_1}{r_A} = \frac{53876}{6858} = 7{,}71019\,\frac{km}{s}$$

La velocidad en la orbita 2 en el punto A

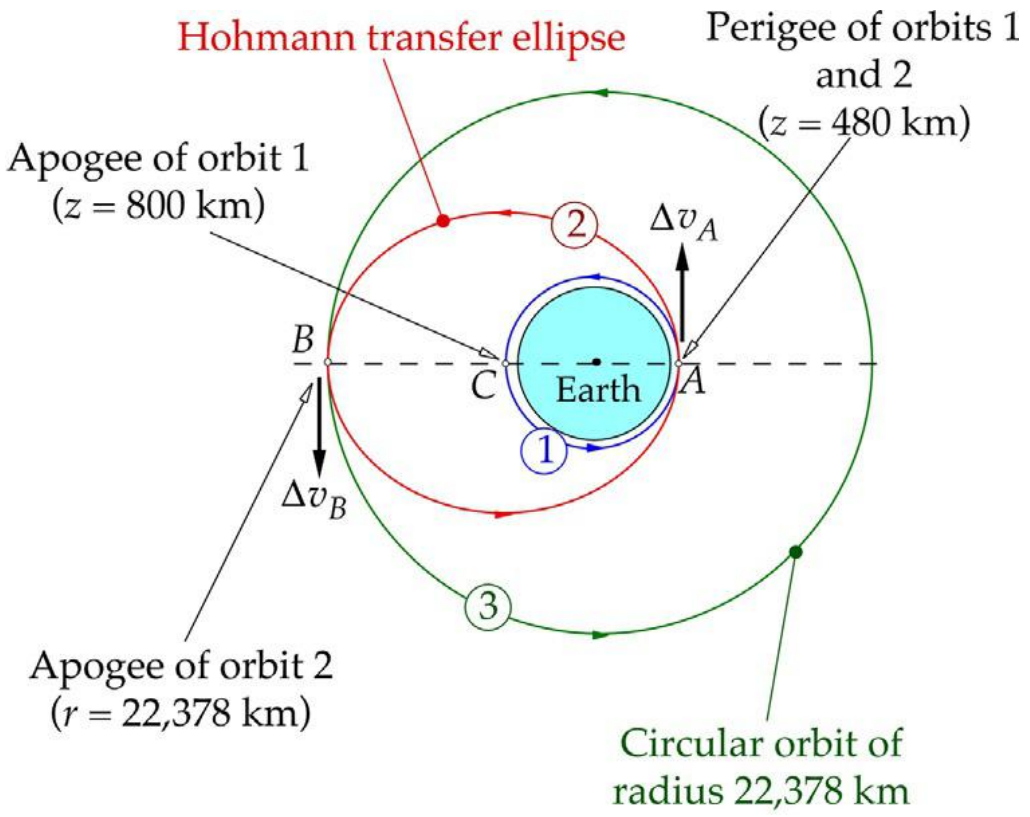
$$v_{A_2} = \frac{h_2}{r_A} = \frac{64689{,}5}{6858} = 9{,}43271\,\frac{km}{s}$$

El Δv_A

$$\Delta v_A = v_{A_2} - v_{A_1}$$

$$\Delta v_A = 9{,}43271\,\frac{km}{s} - 7{,}71019\,\frac{km}{s}$$

$$\Delta v_A = 1{,}7225\,\frac{km}{s}$$



Ejercicio

Calculo de Δv:

La velocidad en la orbita 2 en el punto B

$$v_{B_2} = \frac{h_2}{r_B} = \frac{64689,5}{22378} = 2,89076 \frac{km}{s}$$

La velocidad en la orbita 3 en el punto B

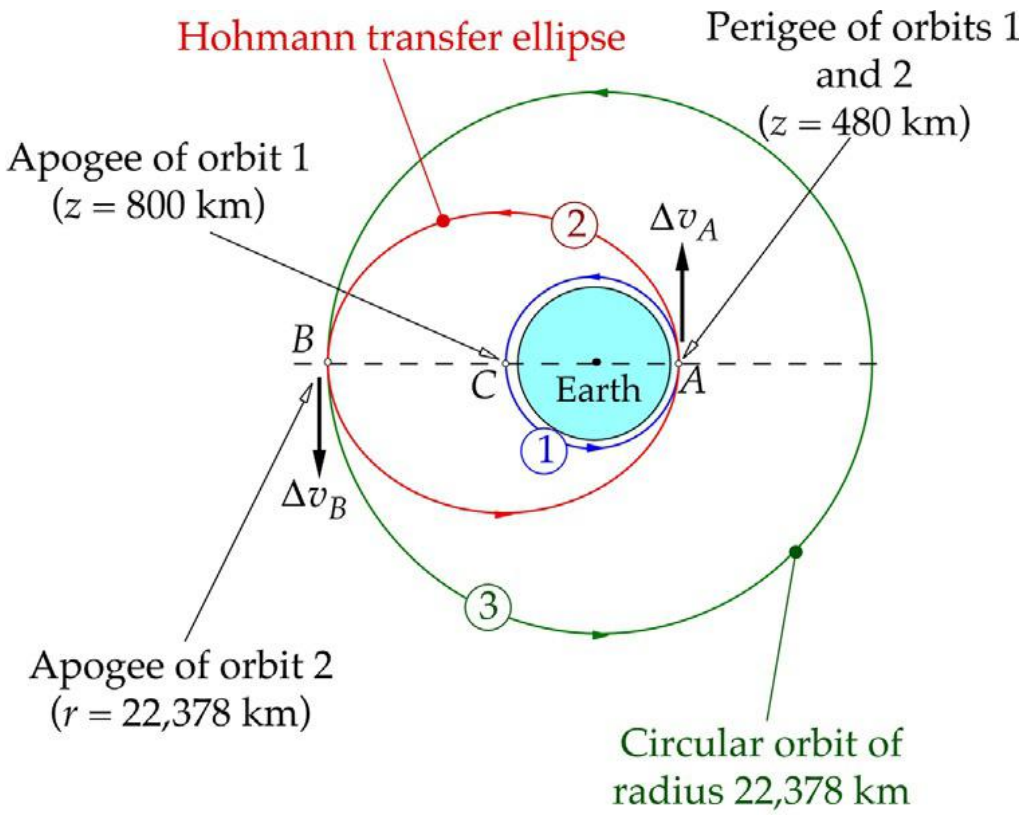
$$v_{B_3} = \frac{h_3}{r_B} = \frac{94445,1}{22378} = 4,22044 \frac{km}{s}$$

El Δv_b

$$\Delta v_B = v_{B_2} - v_{B_1}$$

$$\Delta v_B = 4,22044 \frac{km}{s} - 2,89076 \frac{km}{s}$$

$$\Delta v_B = 1,3297 \frac{km}{s}$$



Ejercicio

Calculo de Δv total para la transferencia:

$$\Delta v_{total} = |\Delta v_A| + |\Delta v_B| = 1{,}7225\,\frac{km}{s} + 1{,}3297\,\frac{km}{s}$$

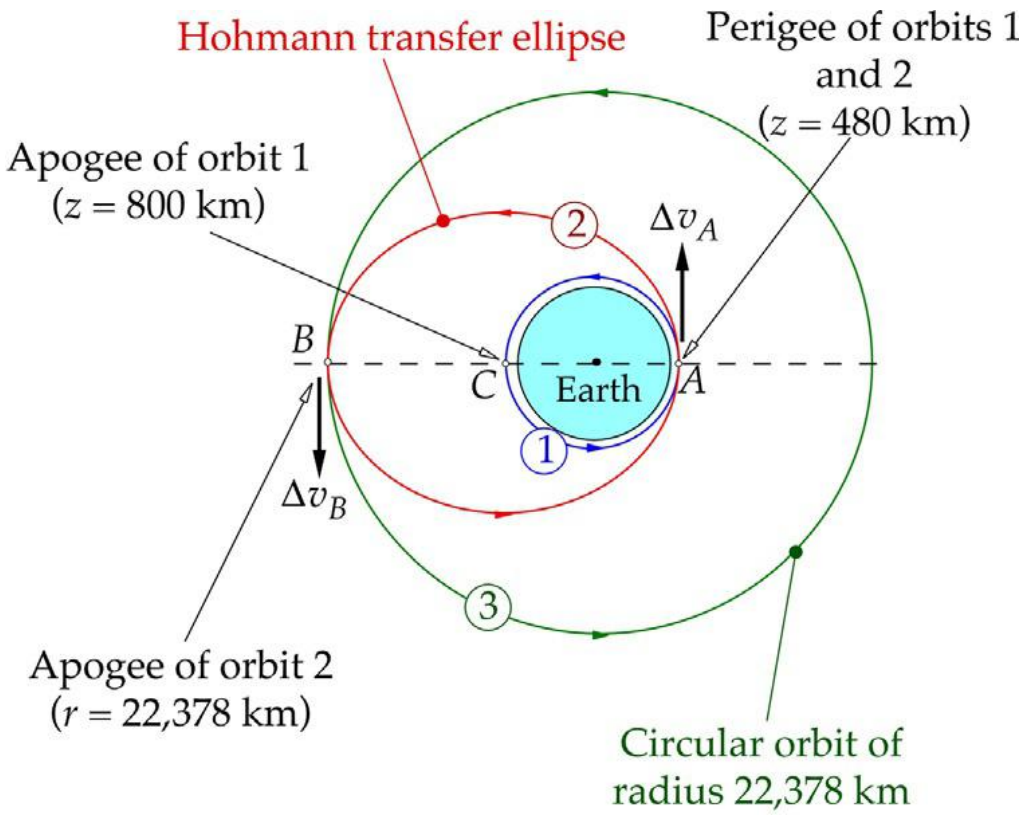
$$\Delta v_{total} = 3.0522\,\frac{km}{s}$$

El combustible utilizado:

$$\frac{\Delta m}{m} = 1 - e^{\frac{\Delta v_{total}}{Isp\ g_0}} = 1 - e^{-\frac{3052{,}2\frac{m}{s}}{300\ s\ 9.8\frac{m}{s^2}}}$$

$$\frac{\Delta m}{m} = 0{,}64563$$

$$\Delta m\ = 0{,}64563 * 2000 = 1291{,}3\ \text{kg}$$



Fórmulas

	Orbita 1 (Circular)	Orbita 2 (elíptica de transferencia)	Orbita 3 (circular)
Radios	r_1	$a = \frac{r_1 + r_3}{2}$	r_3
Momento angular especifico	$h = \sqrt{\mu\, r}$	$h = \sqrt{2\mu}\sqrt{\frac{r_a r_p}{r_a + r_p}}$	$h = \sqrt{\mu\, r}$
Energía especifica	$-\frac{\mu}{2r_1}$	$-\frac{\mu}{2a}$	$-\frac{\mu}{2\, r_2}$

Fórmulas

$$\Delta v_A = v_{A_2} - v_{A_1} = \frac{h_2}{r_A} - \frac{h_1}{r_A} = \sqrt{2\left(\frac{\mu}{r_A} + \varepsilon\right)} - \sqrt{\frac{\mu}{r_A}}$$

$$\Delta v_B = v_{B_3} - v_{B_2} = \frac{h_3}{r_B} - \frac{h_2}{r_B} = \sqrt{\frac{\mu}{r_B}} - \sqrt{2\left(\frac{\mu}{r_B} + \varepsilon\right)}$$

$$\Delta v_{total} = |\Delta v_A| + |\Delta v_B|$$

$$TOF = \pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

$$\frac{\Delta m}{m} = 1 - e^{\frac{\Delta v_{total}}{Isp\ g_0}}$$

Ejercicio 1

Considere un satélite en una órbita circular a 300 km de altitud sobre la superficie terrestre. El satélite realiza una maniobra de transferencia de Hohmann para alcanzar una órbita circular coplanar a 3000 km de altitud. Calcule:

a) Los momentos angulares específicos ($h_1, h_2\ y\ h_3$) de las orbitas

b) Calcule los Δv_1, Δv_2 y el Δv total de la maniobra.

c) El tiempo de la transferencia orbital

