UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL HAEDO

PRACTICA

GROUND TRACK

MECANICA ORBITAL

INGENIERÍA AERONÁUTICA/AEROESPACIAL

Ing. Anibal Cesar Vettorel

Ing. Carlos Mario Carbonel

INDICE

Efecto de la forma de la Tierra 3

Ground track 7

Algoritmo de resolución 10

Anexo: Funciones de matlab 12

atan2d_0_360.m 12
dcm_to_euler.m 12
sv_from_coe.m 13

Interpretaciòn gràfica 14

Introducción 14
Efecto de la rotación de la Tierra 15
Nodo ascendente, desplazamiento longitudinal, período orbital y semieje mayor 17
Inclinación orbital 22
Orbitas geosíncronas y geoestacionarias 22
Órbita geoestacionaria 23
Orbita geosíncrona inclinada 23
Excentricidad 24
Simetría axial 25
Simetría bisagra 25
RAAN 26
Identificación del perigeo 27
Orbitas geosíncronas excéntricas 31
Anomalia verdadera 33

Ejercicios 34

Ejercicio 1 34
Ejercicio 2 36
Ejercicio 3 37
Ejercicio 4 37

EFECTO DE LA FORMA DE LA TIERRA

La Tierra se aparta (al igual que el resto de los cuerpos celestes) de la forma de simetría perfecta de un cuerpo esférico. Esto se debe a su rotación alrededor de un eje que produce un desplazamiento de masa centrifuga generando un cuerpo axisimétrico que sobresale en el ecuador y se aplana en los polos. El radio ecuatorial de la Tierra es $21\ km$ mayor que el radio polar. De esta forma se define la elipticidad de un planeta como una relación entre el radio polar y el ecuatorial

$$\epsilon = 1 - \frac{R_p}{R_e}$$

Esta falta de simetría significa que la fuerza de gravedad sobre un cuerpo en órbita no está dirigida hacia el centro de la Tierra. Aunque el campo gravitatorio de un planeta perfectamente esférico depende solo de la distancia desde su centro, la oblaticidad causa una variación también con la latitud (es decir, la distancia angular desde el ecuador o el polo). Esto se llama variación zonal. El parámetro adimensional que cuantifica los principales efectos de la elipticidad en las órbitas es $J2$, el segundo armónico zonal, la cual no es una constante universal, ya que cada planeta tiene su propio valor.

Table 4.3 Oblateness and second zonal harmonics

Planet	Oblateness	J_2
Mercury	0.000	$60(10^{-6})$
Venus	0.000	$4.458(10^{-6})$
Earth	0.003353	$1.08263(10^{-3})$
Mars	0.00648	$1.96045(10^{-3})$
Jupiter	0.06487	$14.736(10^{-3})$
Saturn	0.09796	$16.298(10^{-3})$
Uranus	0.02293	$3.34343(10^{-3})$
Neptune	0.01708	$3.411(10^{-3})$
(Moon)	0.0012	$202.7(10^{-6})$

La forma axisimétrica de un planeta puede apartarse de una esfera de muchas otras formas. Para el cálculo debido a la desviación de todos estos efectos, se utilizan los armónicos esféricos que sirven para representar la variación de la gravedad con la latitud y longitud en la superficie de un cuerpo celeste, como la Tierra. En nuestro caso, utilizamos las llamadas constantes de Jeffery. Estas constantes son una serie de

parámetros que se utilizan para describir la forma y la masa de un cuerpo celeste en el modelado de la gravedad y permiten representar las variaciones de gravedad en la superficie. Los principales valores se denominan $J2$, $J3$ y $J4$ y se calculan a partir de los coeficientes de los armónicos esféricos.

- La constante $J2$ describe la forma del cuerpo como una elipse, en lugar de una esfera perfecta y se relaciona con el achatamiento del cuerpo.
- La constante $J3$ se utiliza para describir la asimetría del cuerpo en relación con su plano ecuatorial.
- La constante $J4$ se utiliza para describir la forma del cuerpo en términos de su curvatura.

Por ahora solamente nos concentraremos en el efecto del $J2$. La elipticidad causa que la ascensión recta Ω y el argumento del periapsis ω varíen significativamente con el tiempo:

$$\dot{\Omega} = -\left[\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\mu}J_2R^2}{(1-e^2)^2a^{7/2}}\right]\cos i \qquad \dot{\omega} = -\left[\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\mu}J_2R^2}{(1-e^2)^2a^{7/2}}\right]\left(\frac{5}{2}\sin^2 i - 2\right)$$

donde R y μ son el radio y el parámetro gravitacional del planeta, respectivamente; a y e son el semieje mayor y la excentricidad de la órbita, respectivamente; e i es la inclinación de la órbita.

En la ecuación de $\dot{\Omega}$, observe que si $0° \leq i < 90°$, entonces $\dot{\Omega} < 0$. Es decir, para órbitas progradas, la línea nodal va hacia el oeste. Dado que la ascensión recta del nodo disminuye continuamente, este fenómeno se llama regresión de los nodos. Si $90° < i \leq 180°$, vemos que $\dot{\Omega} > 0$. La línea nodal de las órbitas retrógradas, por lo tanto, avanza hacia el este. Para órbitas polares ($i = 90°$), la línea nodal está estacionaria.

En la ecuación $\dot{\omega}$ vemos que si $0° \leq i < 63{,}4°$ o $116{,}6° < i \leq 180°$, entonces $\dot{\omega}$ es positivo, lo que significa que el perigeo avanza en la dirección del movimiento del satélite (de ahí el nombre "avance del perigeo" para este fenómeno). Si $63{,}4° < i \leq 116{,}6°$, el perigeo retrocede, moviéndose en sentido opuesto al movimiento. $i = 63{,}4°$ e $i = 116{,}6°$ son las inclinaciones críticas en las que la línea de apsides no se mueve.

Observe que el coeficiente de los términos trigonométricos en las ecuaciones $\dot{\Omega}$ y $\dot{\omega}$ es idéntico, por lo que

$$\dot{\omega} = \dot{\Omega}\frac{(5/2)\sin^2 i - 2}{\cos i}$$

La siguiente figura es un gráfico de las ecuaciones anteriores para varias órbitas bajas circulares terrestres.

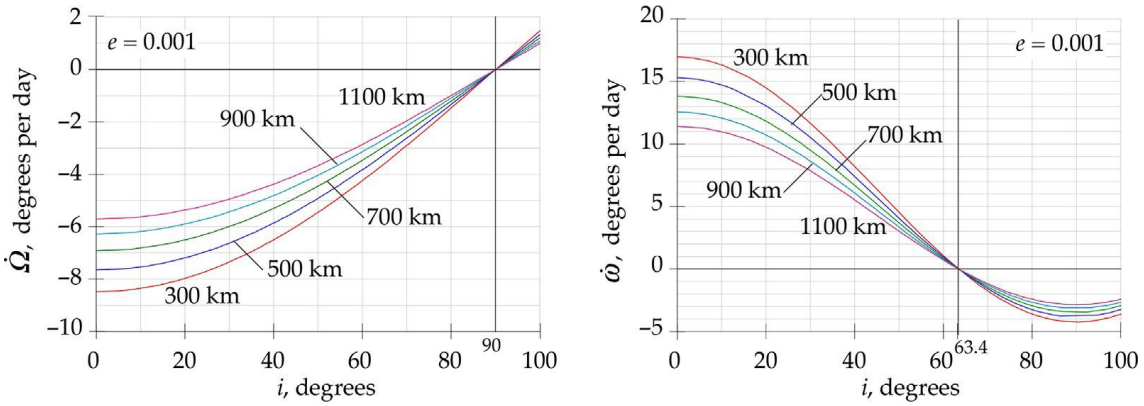


Figura 1. Regresión del nodo y avance del perigeo para órbitas casi circulares de altitudes de 300 a 1100 km.

El efecto de la elipticidad en ambos parámetros es mayor en inclinaciones bajas, donde la órbita está cerca del abultamiento ecuatorial por períodos más largos de cada revolución. El efecto disminuye con el aumento del semieje mayor porque el satélite se aleja del abultamiento y su influencia gravitatoria. Obviamente, $\dot{\Omega} = \dot{\omega} = 0$ si $J2 = 0$ (sin abultamiento ecuatorial).

El efecto de la inclinación de la órbita en la regresión del nodo y el avance del perigeo se aprovecha en dos tipos muy importantes de órbitas. Las órbitas heliosincrónicas son aquellas cuyo plano orbital forma un ángulo constante α con el radial desde el sol, como se ilustra a continuación

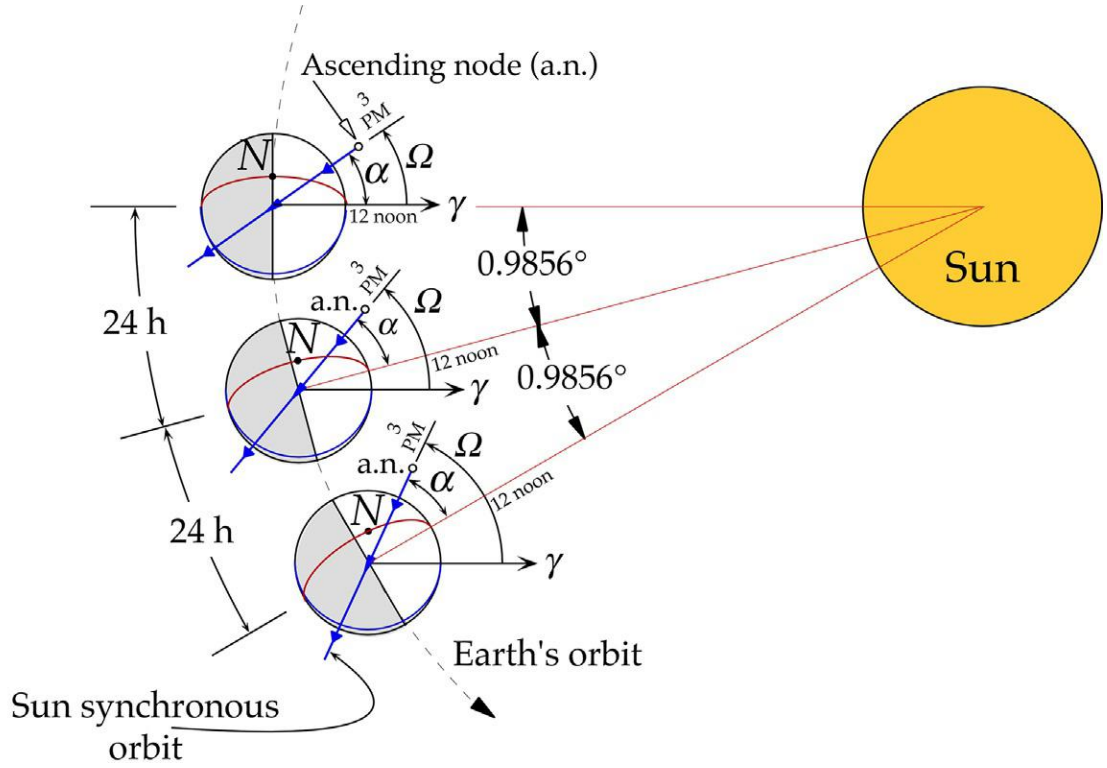


Figura 2.Orbitas heliosincrónicas

Para que eso ocurra, el plano orbital debe rotar en el espacio inercial con la velocidad angular de la Tierra en su órbita alrededor del sol, que es $360°$ por $365{,}26$ días, o $0.9856°$ por día. Con el plano orbital precesando hacia el este a esta velocidad, el nodo ascendente estará en una hora local fija. En la figura anterior, resulta ser las 3 p.m. Durante cada órbita, el satélite ve cualquier franja del planeta bajo condiciones casi idénticas de luz diurna o nocturna día tras día. El satélite también tiene una perspectiva constante del sol. Los satélites heliosincrónicos, como los Satélites Operacionales Ambientales Polares de la NOAA, se utilizan para la cobertura meteorológica global, mientras que Landsat y la serie francesa SPOT están destinados a la observación terrestre de alta resolución.

Si un satélite se lanza en una órbita con una inclinación de $63{,}4°$ (prograda) o $116{,}6°$ (retrógrada), entonces la ecuación $\dot{\omega}$ muestra que la línea de apsides permanecerá estacionaria. El programa espacial ruso hizo de esto un elemento clave en el diseño del sistema de satélites de comunicaciones Molniya. Todos los sitios de lanzamiento rusos están por encima de $45°$ de latitud, siendo el más septentrional, Plesetsk, ubicado a $62{,}8°N$. Como veremos más adelante, lanzar un satélite a una órbita geoestacionaria implicaría una costosa maniobra de cambio de plano. Además, recordemos del Ejemplo 3 de Orbitas Circulares, vimos que un satélite geoestacionario no puede ver efectivamente las latitudes del norte lejanas hasta donde se extiende el territorio ruso.

Los satélites de telecomunicaciones Molniya se lanzan desde Plesetsk en órbitas de inclinación de $63°$ con un período de 12 horas. De la ecuación $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2}$, concluimos que el eje mayor de estas órbitas es de $53.000\ km$ de largo. El perigeo (típicamente a 500 km de altitud) se encuentra en el hemisferio sur, mientras que el apogeo está a una altitud de 40.000 km sobre las latitudes del norte, más lejos que los satélites geoestacionarios. La siguiente figura ilustra una órbita típica de Molniya.

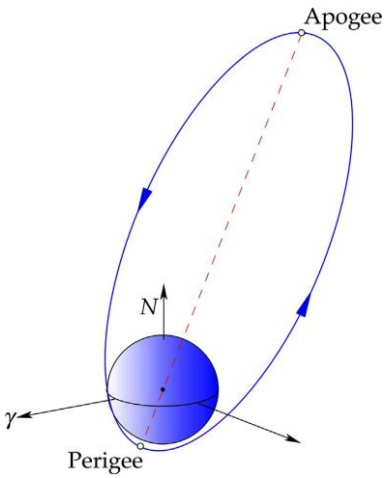


Figura 3. Órbita típica de Molniya

Una "constelación" Molniya consiste en ocho satélites en planos separados por 45°. Cada satélite está sobre la latitud 30°N durante más de 8 horas, avanzando y retrocediendo hacia y desde el apogeo.

GROUND TRACK

La proyección de la órbita de un satélite sobre la superficie de la Tierra se llama *ground track*. En un instante dado, podemos imaginar una línea radial trazada desde el centro de la Tierra hacia el satélite. Donde esta línea atraviesa la superficie esférica de la Tierra es un punto en la traza en el suelo. Localizamos este punto dando su latitud y longitud relativas a la Tierra. A medida que el satélite se mueve alrededor de la Tierra, la traza de estos puntos es su ground track.

Debido a que el satélite alcanza una latitud máxima y mínima ("amplitud") durante cada órbita, mientras pasa sobre el ecuador dos veces, en una proyección de Mercator, la traza en el suelo de un satélite en órbita baja a menudo se asemeja a una curva sinusoidal. Si la Tierra no rotara, habría solo una traza similar a una sinusoide, trazada repetidamente a medida que el satélite orbita la Tierra. Sin embargo, la Tierra rota hacia

el este bajo la órbita del satélite a 15,04 grados por hora, por lo que la traza en el suelo avanza hacia el oeste a esa velocidad.

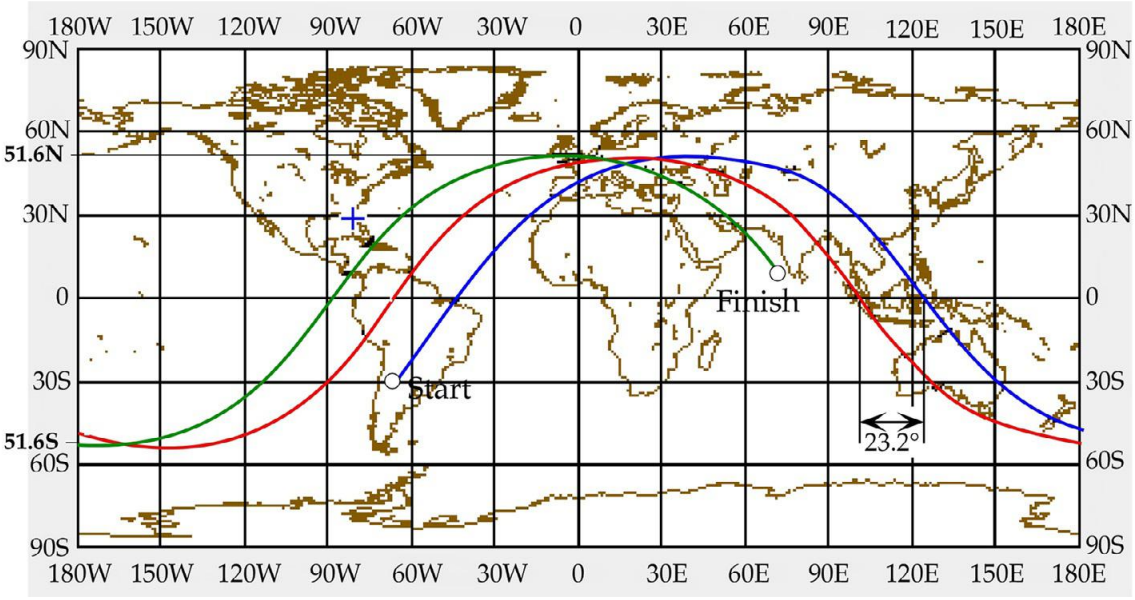


Figura 4. Ground track de un satelite

La anterior muestra aproximadamente dos órbitas y media de un satélite, con el principio y el final de esta porción del ground track etiquetados. La distancia entre dos cruces sucesivas del ecuador se mide en 23,2°, que es la cantidad de rotación de la Tierra en una órbita de la nave espacial. Por lo tanto, la traza en el suelo revela que el período del satélite es:

$$T = \frac{23{,}2°}{15{,}04°/h} = 1{,}54\ h = 92{,}6\ min$$

Este es un período orbital típico de baja altitud (LEO).

Dada la posición vectorial $\boldsymbol{r}$ de un satélite, podemos encontrar su ascensión recta y declinación relativas al marco ecuatorial geocéntrico XYZ, que está fijo en el espacio. La Tierra rota a una velocidad angular ω_T relativa a este sistema. Vamos a adjuntar un sistema de coordenadas cartesianas $x'y'z'$ a la Tierra con su origen ubicado en el centro de la Tierra, como se ilustra ea continuación

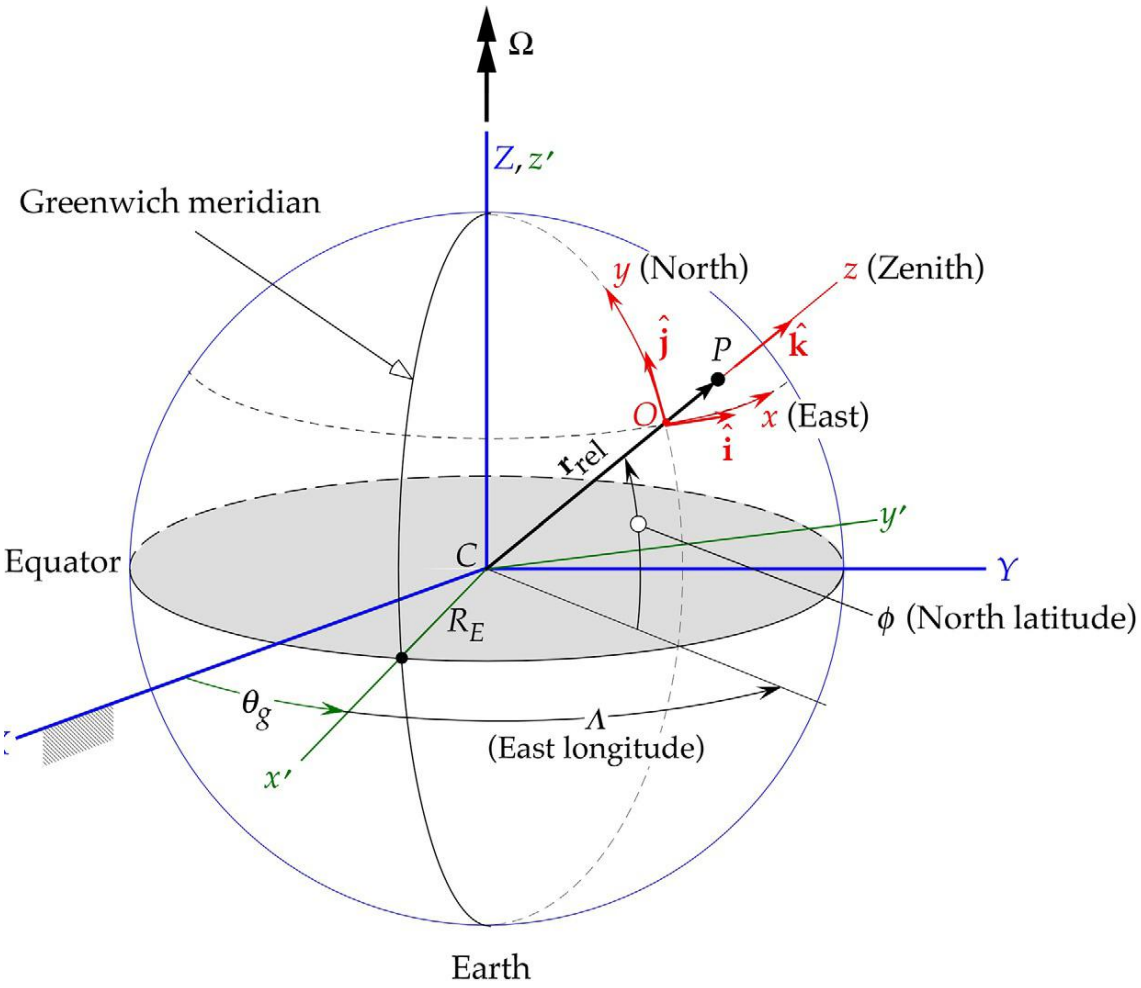


Figura 5. El marco inercial centrado en la Tierra (XYZ); el marco no inercial centrado en la Tierra $x'y'z'$ adjuntado y rotando con la Tierra; y un marco no inercial, horizonte-topocéntrico xyz adjunto a un punto O en la superficie de la Tierra.

Los ejes $x'y'$ yacen en el plano ecuatorial y el eje z' apunta hacia el norte. (En la figura anterior, el eje x' está dirigido hacia el meridiano principal, que pasa por Greenwich, Inglaterra.) Los ejes XYZ y $x'y'z'$ difieren solo por el ángulo θ entre el eje X estacionario y el eje x' rotante. Si los ejes X y x' se alinean en el tiempo t_0, entonces en cualquier tiempo t posterior el ángulo θ estará dado por $\omega_T(t - t_0)$. La transformación de XYZ a $x'y'z'$ está representada por la matriz de rotación elemental

$$[R_3(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \theta = \omega_T(t - t_0)$$

Así, si los componentes del vector de posición $\boldsymbol{r}$ en el marco inercial XYZ están dados por $\{\boldsymbol{r}\}_X$, sus componentes $\{\boldsymbol{r}\}_{x'}$ en el marco rotatorio, fijado a la Tierra $x'y'z'$ son

$$\{\boldsymbol{r}\}_{x'} = [R_3(\theta)]\{\boldsymbol{r}\}_X$$

Conociendo $\{\boldsymbol{r}\}_{x'}$, podemos determinar la ascensión recta (longitud al este de x') y la declinación (latitud) en el sistema fijado a la Tierra. Estos puntos suelen ser trazados en una proyección rectangular de Mercator de la superficie terrestre, como en la Figura 1.

Algoritmo de resolución

Dado los elementos orbitales iniciales $(h, e, a, T, i, \omega_0, \Omega_0, \theta_0)$ de un satélite en relación con el marco ecuatorial geocéntrico, calcular la ascensión recta α y la declinación δ relativas a la Tierra rotatoria después de un intervalo de tiempo Δt.

1. Calcular $\dot{\Omega}$ y $\dot{\omega}$ a partir de las ecuaciones:

$$\dot{\Omega} = -\left[\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\mu}J_2R^2}{(1-e^2)^2a^{7/2}}\right]\cos i \qquad \dot{\omega} = -\left[\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\mu}J_2R^2}{(1-e^2)^2a^{7/2}}\right]\left(\frac{5}{2}\sin^2 i - 2\right)$$

2. Calcular el tiempo inicial t_0 (tiempo desde el paso por el perigeo):

   a) Encontrar la anomalía excéntrica E_0 a partir de la ecuación

$$E = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

   b) Encontrar la anomalía media M_0 a partir de la ecuación

$$M_e = E - e\sin E$$

   c) Encontrar t_0 a partir de la ecuación

$$t = \frac{M_e}{2\pi}T$$

3. En el tiempo $t = t_0 + \Delta t$, calcular α y δ.

   a) Calcular la anomalía verdadera:

      i. Encontrar M a partir de la ecuación

$$M_e = \frac{2\pi}{T} t$$

ii. Encontrar E a partir de la ecuación (usando *kepler_E.m*[1])

$$M_e = E - e \sin E$$

iii. Encontrar θ a partir de la ecuación

$$\tan\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan\frac{\theta}{2}$$

b) Actualizar Ω y ω: $\Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega}\,\Delta t$ $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega_0} + \boldsymbol{\omega}\Delta t$.

c) Encontrar $\{\boldsymbol{r}\}_X$ usando *sv_from_coe.m*[2]

d) Encontrar $\{\boldsymbol{r}\}_{x'}$ usando las ecuaciones

$$[R_3(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \theta = \omega_T (t - t_0)$$

$$\{\boldsymbol{r}\}_{x'} = [R_3(\theta)]\{\boldsymbol{r}\}_X$$

e) Utilizar el *ra_and_dec_from_r.m*[3] para calcular α y δ a partir de $\{\boldsymbol{r}\}_{x'}$.

4. Repetir el Paso 3 para tiempos adicionales $(t = t_0 + 2\Delta t, t = t_0 + 3\Delta t, etc.)$

[1] Esta función utiliza el método de Newton para resolver la ecuación de Kepler $E - e \cdot sin(E) = M$ para la anomalía excéntrica, dada la excentricidad y la anomalía media.

[2] Esta función calcula el vector de estado (r,v) a partir de los elementos orbitales clásicos (coe).

[3] Esta función calcula la ascensión recta y la declinación a partir del vector de posición ecuatorial geocéntrico.

ANEXO: FUNCIONES DE MATLAB

atan2d_0_360.m

```
function t = atan2d_0_360(y, x)
% ------------------------------------------------------------------------
% Esta función calcula el arco tangente de y/x en grados y coloca el
% resultado en el rango [0, 360].
% t - ángulo en grados
%
% Funciones M del usuario requeridas: Ninguna
% ------------------------------------------------------------------------
if x == 0
    if y == 0
        t = 0;
    elseif y > 0
        t = 90;
    else
        t = 270;
    end
elseif x > 0
    if y >= 0
        t = atand(y / x);
    else
        t = atand(y / x) + 360;
    end
elseif x < 0
    if y == 0
        t = 180;
    else
        t = atand(y / x) + 180;
    end
end
end
```

dcm_to_euler.m

```
function [alpha, beta, gamma] = dcm_to_euler(Q)
% ------------------------------------------------------------------------
% Esta función encuentra los ángulos de la secuencia clásica simetrica de
% Euler dada por R3(gamma)*R1(beta)*R3(alpha) a partir de la matriz de
% cosenos directores.
%
% Q     - matriz de cosenos directores
% alpha - primer ángulo de la secuencia (grados)
% beta  - segundo ángulo de la secuencia (grados)
% gamma - tercer ángulo de la secuencia (grados)
%
% Función M del usuario requerida: atan2d_0_360
% ------------------------------------------------------------------------
alpha = atan2d_0_360(Q(3,1), -Q(3,2));
beta  = acosd(Q(3,3));
gamma = atan2d_0_360(Q(1,3), Q(2,3));

end
```

sv_from_coe.m

```
function [r, v] = sv_from_coe(coe,mu)
% ------------------------------------------------------------------------
% UTN -FRH
% MECANICA ORBITAL 2024
% ELEMENTOS ORBITALES Y VECTOR DE ESTADO
% ------------------------------------------------------------------------
%% Notas aclaratorias
% Esta función calcula el vector de estado (r,v) a partir de los
% elementos orbitales clásicos (coe).
%
% mu   - parámetro gravitacional (km^3/s^2)
% coe  - elementos orbitales [h e RA incl w TA]
% donde
%       h    - momento angular (km^2/s)
%       e    - excentricidad
%       RA   - ascensión recta del nodo ascendente (rad)
%       incl - inclinación de la órbita (rad)
%       w    - argumento del perigeo (rad)
%       TA   - anomalía verdadera (rad)
% R3_w - Matriz de rotación sobre el eje z a través del ángulo w
% R1_i - Matriz de rotación sobre el eje x a través del ángulo i
% R3_W - Matriz de rotación sobre el eje z a través del ángulo RA
% Q_pX - Matriz de transformación de perifocal a marco ecuatorial geocéntrico
% rp   - vector de posición en el marco perifocal (km)
% vp   - vector de velocidad en el marco perifocal (km/s)
% r    - vector de posición en el marco ecuatorial geocéntrico (km)
% v    - vector de velocidad en el marco ecuatorial geocéntrico (km/s)
%
% Funciones M del usuario requeridas: Ninguna
% ------------------------------------------
%% Datos de entrada
h    = coe(1);
e    = coe(2);
RA   = coe(3);
incl = coe(4);
w    = coe(5);
TA   = coe(6);

%% rp y vp
rp = (h^2/mu) * (1/(1 + e*cos(TA))) * (cos(TA)*[1;0;0] + sin(TA)*[0;1;0]);
vp = (mu/h) * (-sin(TA)*[1;0;0] + (e + cos(TA))*[0;1;0]);

%% Matriz de rotación sobre el eje z a través del ángulo w
R3_W = [ cos(RA) sin(RA) 0
        -sin(RA) cos(RA) 0
         0 0 1];

%% Matriz de rotación sobre el eje x a través del ángulo i
R1_i = [1 0 0
        0 cos(incl) sin(incl)
        0 -sin(incl) cos(incl)];

%% Matriz de rotación sobre el eje z a través del ángulo w
```

```
R3_w = [ cos(w) sin(w) 0
        -sin(w) cos(w) 0
         0 0 1];

%% Matriz de transformación de perifocal a marco ecuatorial geocéntrico
Q_pX = (R3_w*R1_i*R3_W)';

%% Vector estado
r = Q_pX*rp;
v = Q_pX*vp;

% Convertir de columna a fila:
r = r';
v = v';
end
% ------------------------------------------------------------------------
```

INTERPRETACIÒN GRÀFICA

Introducción

Una trayectoria terrestre (*ground track*) es la representación, sobre un mapa de la Tierra, de la proyección de la posición de un satélite sobre la superficie terrestre a medida que transcurre su movimiento orbital.

Aunque a primera vista una trayectoria terrestre puede parecer simplemente una sucesión de curvas, su geometría permite obtener información sobre distintos parámetros orbitales, entre ellos:

- período orbital;
- semieje mayor;
- inclinación;
- sentido de movimiento orbital;
- características de la excentricidad;
- posición del perigeo;
- argumento del perigeo;
- anomalía verdadera.

Sin embargo, no todos los elementos orbitales pueden determinarse a partir de un *ground track*. En particular, la RAAN no puede obtenerse directamente si el mapa no incluye una referencia al equinoccio vernal.

Efecto de la rotación de la Tierra

Para interpretar correctamente una trayectoria terrestre es fundamental considerar que la Tierra rota sobre su eje.

Si se supone, inicialmente, que la Tierra no rota, el plano orbital permanece fijo respecto de la superficie terrestre. En consecuencia, la trayectoria proyectada sobre la Tierra se repetiría exactamente sobre sí misma después de cada revolución. Para una órbita inclinada, la trayectoria tendría una forma aproximadamente sinusoidal y cada revolución pasaría por los mismos puntos de la superficie terrestre.

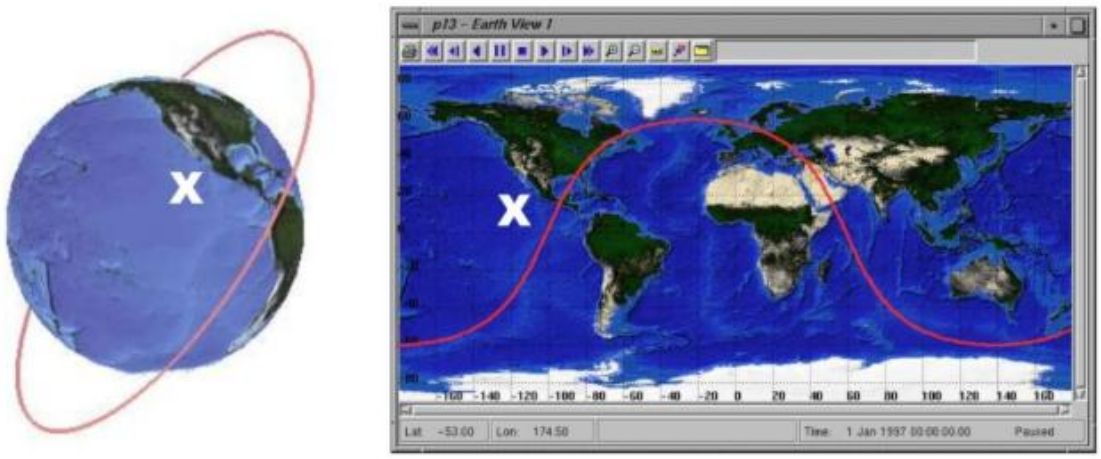


Figura 6. Tierra sin rotación junto a la trayectoria de una onda sinusoidal en el suelo.

Cuando se considera la rotación terrestre, la situación cambia. Mientras el satélite completa una revolución, la Tierra también gira alrededor de su eje. Por lo tanto, cuando el satélite vuelve a pasar por un determinado punto de su órbita, la superficie terrestre ya no se encuentra en la misma posición. Como consecuencia, la trayectoria terrestre se desplaza longitudinalmente de una revolución a la siguiente. En una órbita directa o prógrada, este desplazamiento se observa, en términos generales, hacia el oeste.

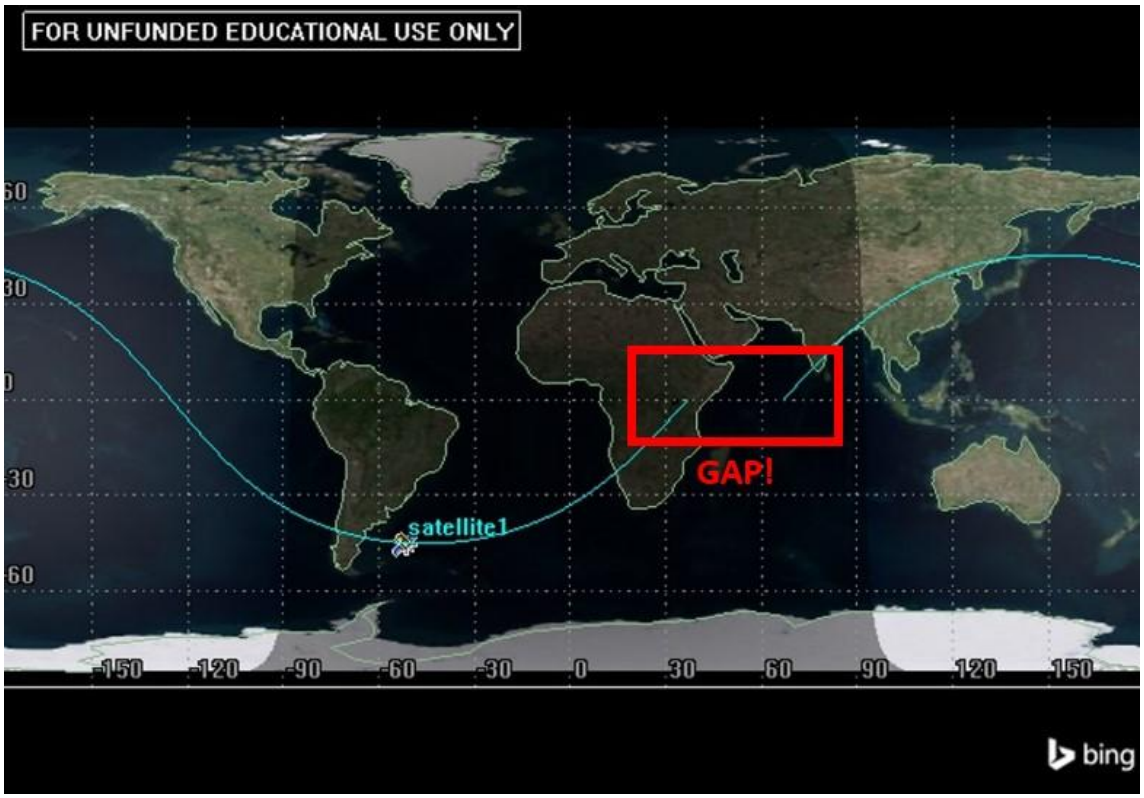


Figura 7. La diferencia observada en el ground track es consecuencia de analizar la órbita desde un sistema de referencia que rota junto con la Tierra.

Nodo ascendente, desplazamiento longitudinal, período orbital y semieje mayor

En una trayectoria terrestre es posible identificar puntos equivalentes pertenecientes a revoluciones sucesivas. En particular, pueden utilizarse los nodos ascendentes, definidos como los puntos donde el satélite cruza el ecuador desde el hemisferio sur hacia el hemisferio norte.

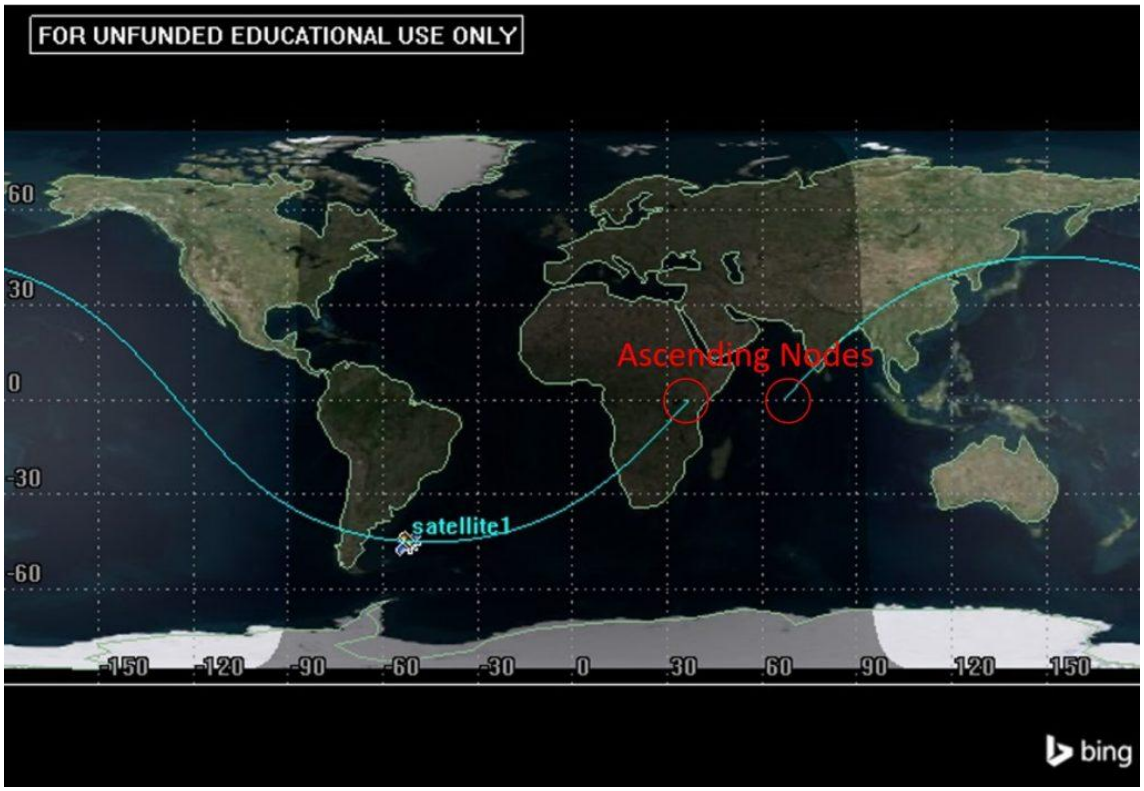


Figura 8. Ubicación de los nodos ascendentes

Si la Tierra no rotara, todos los nodos ascendentes de las distintas revoluciones aparecerían en el mismo punto del ecuador. Debido a la rotación terrestre, cada revolución presenta un nodo ascendente desplazado longitudinalmente respecto del anterior. La separación longitudinal entre estos puntos permite determinar el desplazamiento de la trayectoria terrestre entre revoluciones.

Esta separación puede medirse de dos formas. El primero es determinar la distancia longitudinal entre los nodos ascendentes y restarla de 360°.

$$\Delta N = 360º - longitud\ entre\ nodos\ ascendtes$$



Figura 9. Longitud entre nodos ascendentes

En la figura anterior podemos ver que la longuitud entre los nodos ascentes es de 330º, entonces

$$\Delta N = 360º - longuitud\ entre\ nodos\ ascendtes$$

$$\Delta N = 360º - 330º$$

$$\Delta N = 30º$$

Esta es una forma de calcular el desplazamiento nodal, pero existe otra, que puede ser útil y es menos matemática. Esta consiste en medir la distancia longitudinal entre los dos nodos ascendentes

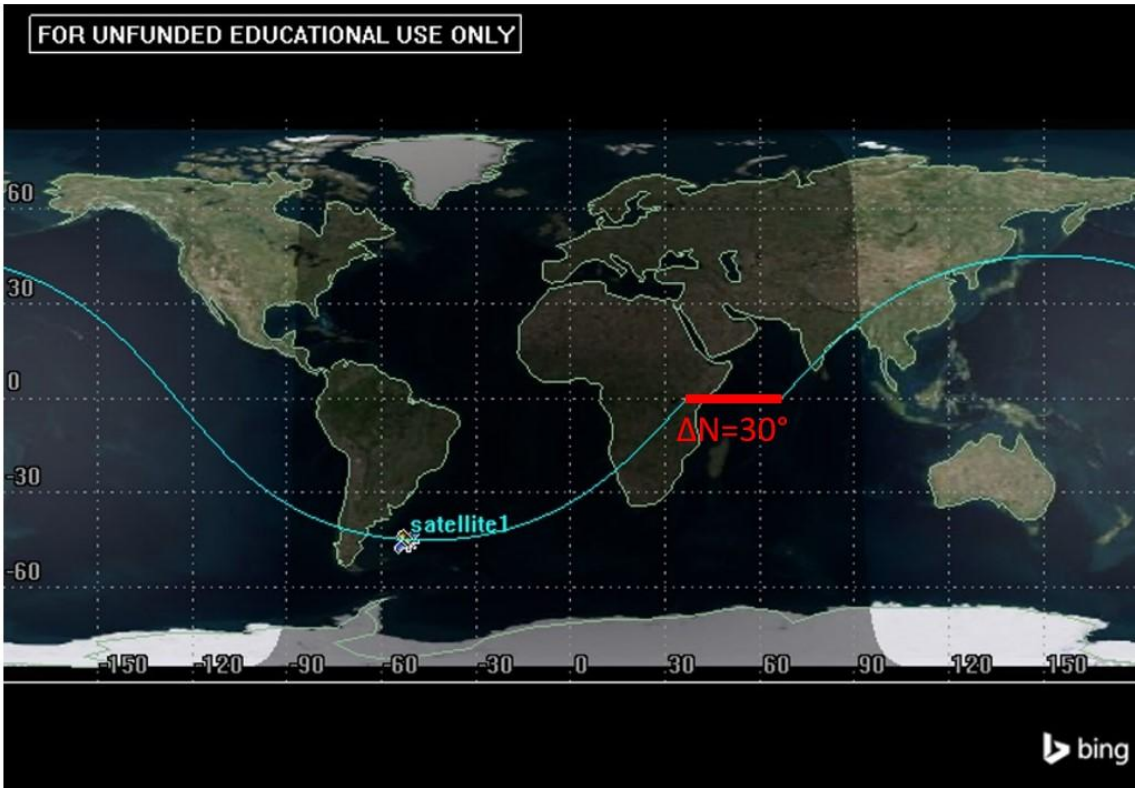


Figura 10. Brecha longitudinal entre los nodos ascendentes

El efecto de la rotación terrestre en el *groundtrack* depende directamente de la relación entre el período orbital y el período de rotación de la Tierra. Para una órbita directa:

- cuanto menor es el período orbital, menor es el desplazamiento longitudinal entre revoluciones;
- cuanto mayor es el período orbital, mayor es el efecto relativo de la rotación terrestre;
- cuando el período orbital se aproxima a un día sideral, la trayectoria terrestre tiende a repetirse aproximadamente sobre la misma región longitudinal.

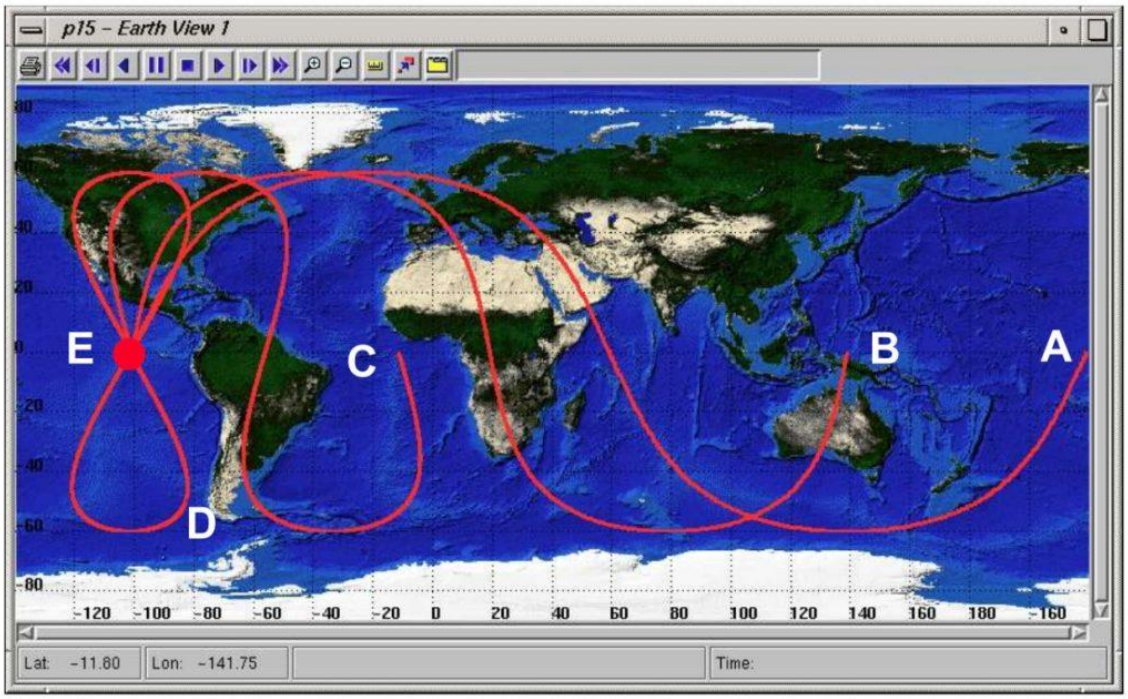


Figura 11. Orbita A con duración de 2,67h, B de 8h, C de 18h, y tanto D es geosincrónica, y E es geoestacionaria.

El día sideral tiene una duración aproximada de:

$$T_T = 23h56\,\text{min} = 23.9333\ h$$

Podemos decir que la Tierra gira

$$\omega_T = \frac{360º}{23.9333\ h} = 15.04\ º/h$$

Por lo tanto, la Tierra rota aproximadamente 15,04° por hora hacia el este. Esta relación permite vincular el desplazamiento longitudinal observado en el *ground track* con el período orbital de la siguiente forma

$$\mathrm{T_{orbita}} = \frac{\Delta \mathrm{N}}{15{,}04°/h}$$

Ejemplo

Supongamos que entre dos pasajes equivalentes de la trayectoria se observa una separación longitudinal de aproximadamente $30º$. Como la tierra gira a $15.04\ º/h$, el tiempo necesario para que la Tierra rote esos $30º$ es:

$$\mathrm{T_{orbita}} = \frac{30º}{15{,}04°/h} \cong 1.995\ h$$

Este valor permite estimar el período orbital en función de la geometría observada, teniendo en cuenta el sentido de la órbita.

Ahora supongamos que la separación longuitudinal es de 45º:

$$\mathrm{T_{orbita}} = \frac{45º}{15{,}04°/h} \cong 2.992\ h$$

Por otro lado, si la separación longitudinal es 360º:

$$\mathrm{T_{orbita}} = \frac{360º}{15{,}04°/h} \cong 23.936\ h$$

Que coincide con el periodo de rotación sideral de la Tierra.

Se observa que, a medida que aumenta el período orbital, también aumenta la separación longuitudinal entre pasajes equivalentes de la trayectoria terrestre. Cuando el período orbital es igual al período de rotación terrestre, la separación alcanza los 360º, situación característica de una órbita geosincrónica

Regla práctica: una separación longitudinal pequeña indica una órbita de período corto (típicamente LEO), mientras que una separación longitudinal grande indica una órbita de período elevado. Cuanto más cercana sea la separación a $360°$, más próximo estará el satélite a una órbita geosíncrona.

Una vez determinado el periodo orbital, puede determinarse el semieje mayor mediante la tercera ley de Kepler

$$a = \sqrt[3]{\mu \left(\frac{T}{2\,\pi}\right)^2}$$

Por lo tanto, la interpretación del desplazamiento longitudinal del *ground track* permite realizar una estimación indirecta del tamaño de la órbita.

Inclinación orbital

La inclinación (i) es uno de los elementos orbitales que puede identificarse con mayor facilidad a partir de una trayectoria terrestre. Para órbitas directas, la inclinación es la distancia latitudinal desde el ecuador hasta el máximo o mínimo de la trayectoria terrestre. Por ejemplo, si la trayectoria terrestre alcanza aproximadamente $+40º$ latitud norte, y $-40º$ latitud sur, entonces la $i = 40°$

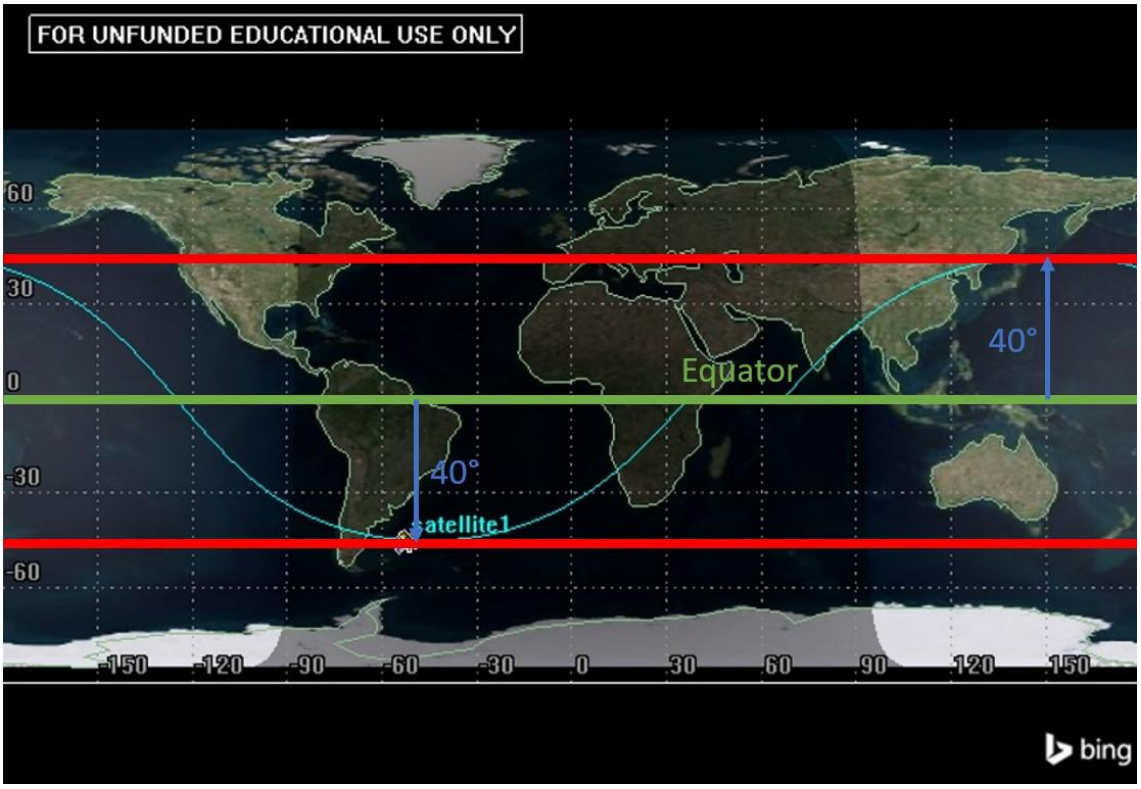


Figura 12. Cálculo de inclinación de una órbita prograda

Cabe destacar que un satélite en órbita terrestre baja con una inclinación de 0° sería una línea recta sobre el ecuador.

Orbitas geosíncronas y geoestacionarias

Un caso particular se presenta cuando el período orbital coincide con el período de rotación sideral de la Tierra:

$$T_T = 23.9333\ h$$

El satélite completa una revolución aproximadamente durante el mismo tiempo que tarda la Tierra en completar una rotación. Por lo tanto, los nodos ascendentes sucesivos aparecen aproximadamente igual sobre la misma longitud. Otra forma de expresarlo es considerar que, a lo largo de una revolución completa, el satélite recorre $360º$ respecto

de su movimiento orbital. La orbita es entonces geosíncrona. Sin embargo, no toda orbita geosíncrona es geoestacionaria.

Órbita geoestacionaria

Para que una órbita sea geoestacionaria deben cumplirse simultáneamente:

- periodo igual al periodo de rotación terrestre
- excentricidad aproximadamente nula (orbita circular)
- inclinación igual a cero

En este caso, el satélite permanece aparentemente fijo sobre un punto del ecuador. Por lo tanto, se *ground track* es un punto:

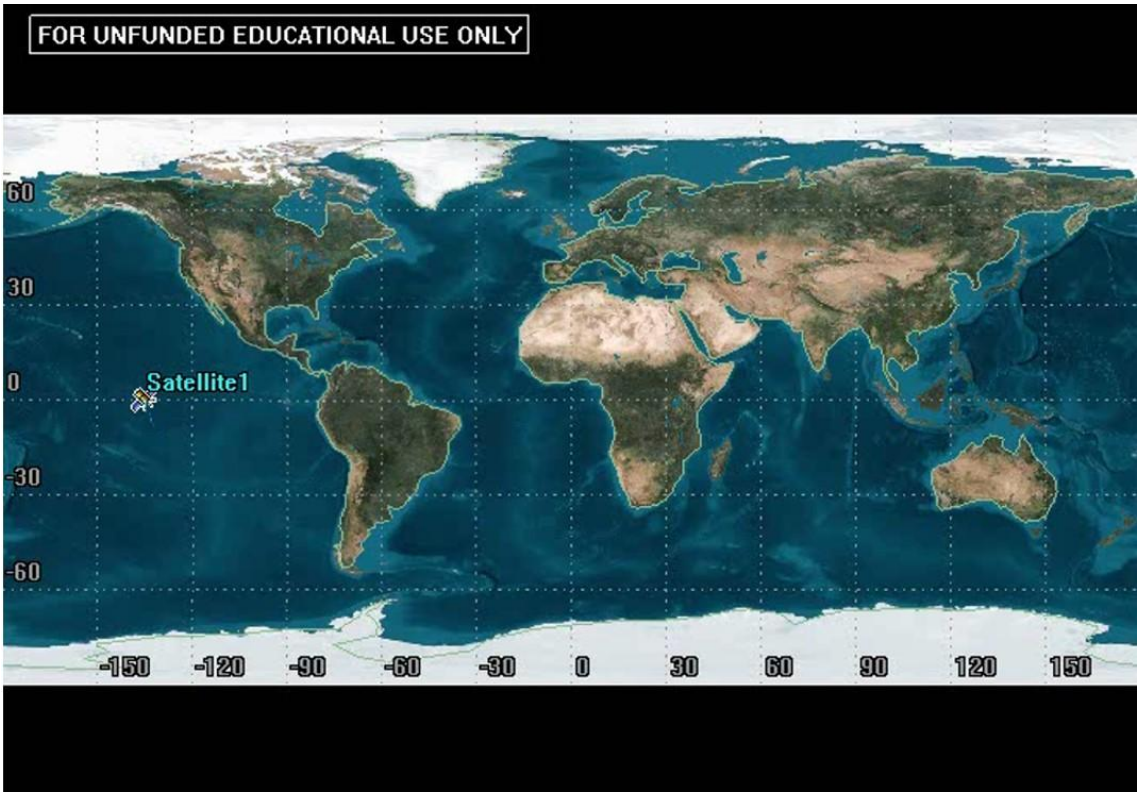


Figura 13. Groundtrack de satelite geoestacionario

Orbita geosíncrona inclinada

Si el periodo es igual al periodo de rotación terrestre, pero su inclinación no es nula, la órbita dejaría de ser geoestacionaria, pero seguiría siendo geosíncrona. En el caso circular, su trayectoria terrestre presenta una forma característica de “8”

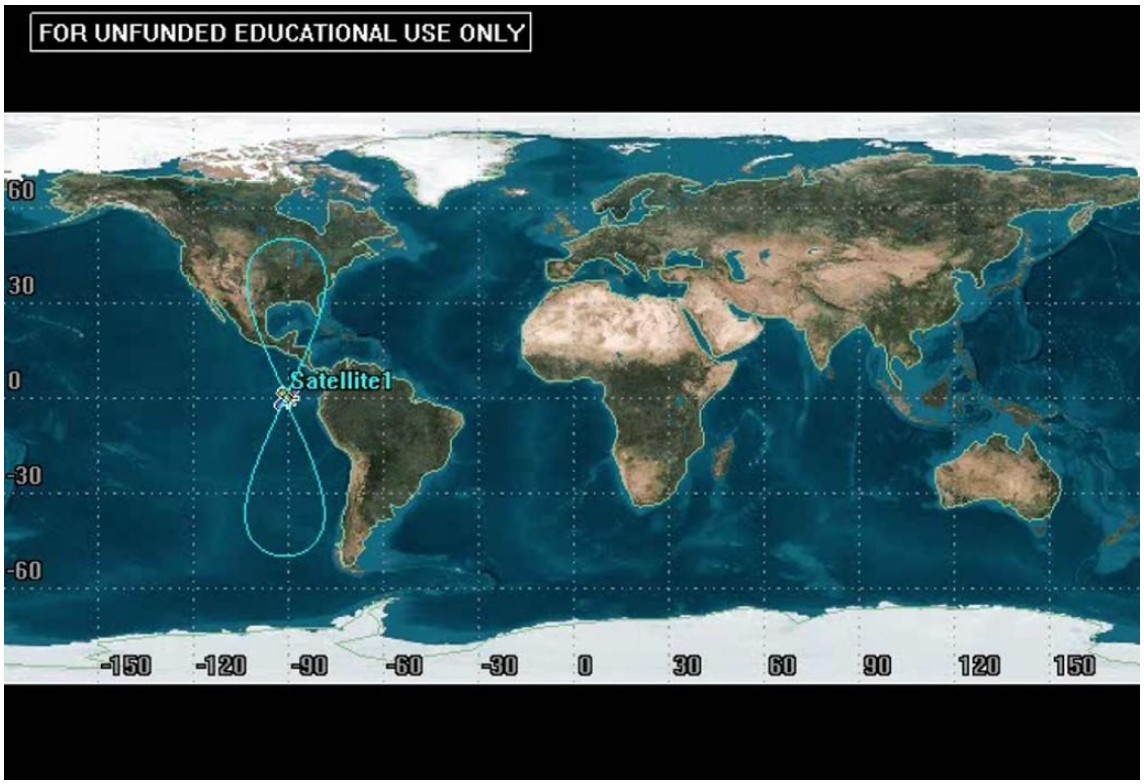


Figura 14. Trayectoria terrestre para el satélite geosíncrono

En una órbita geosincrónica, el satélite completa una revolución aproximadamente durante el mismo tiempo que tarda la Tierra en completar una rotación. Por lo tanto, los nodos ascendentes sucesivos aparecen aproximadamente igual sobre la misma longitud. Otra forma de expresarlo es considerar que, a lo largo de una revolución completa, el satélite recorre $360º$ respecto de su movimiento orbital

Esta distinción es importante para no confundir:

- la longitud geográfica de un punto del *ground track*;
- el ángulo recorrido por el satélite en su órbita.

Excentricidad

Una herramienta útil para analizar la circularidad de una órbita es estudiar la simetría de la trayectoria terrestre. Por esto, a partir de un *ground track* puede distinguirse, en determinados casos, entre una órbita circular y una elíptica, pero no es posible determinar directamente el valor numérico exacto de la excentricidad únicamente a partir de la geometría del mapa.

Para una órbita circular ($e = 0$) la trayectoria terrestre presenta una geometría regular y simétrica.

Para una órbita elíptica $(0 < e < 1)$ la velocidad orbital varía a lo largo de la órbita:

- máxima en el perigeo;
- mínima en el apogeo.

Esta variación de velocidad también modifica la forma de la trayectoria terrestre. Una órbita elíptica será asimétrica; es decir, más alargada en algunas partes y más comprimida o "achatada" en otras. Tenemos una forma de describir esto que no se limita a “estirado” o “comprimido”. Para determinarlo, consideraremos la simetría axial y la simetría de bisagra

Simetría axial

Se divide la trayectoria terrestre mediante el ecuador en una porción correspondiente al hemisferio norte y otra al hemisferio sur. Luego se analiza la simetría de cada porción respecto de un eje vertical que pase por sus puntos extremos. Si ambas partes presentan una geometría equivalente, se considera que existe simetría axial.

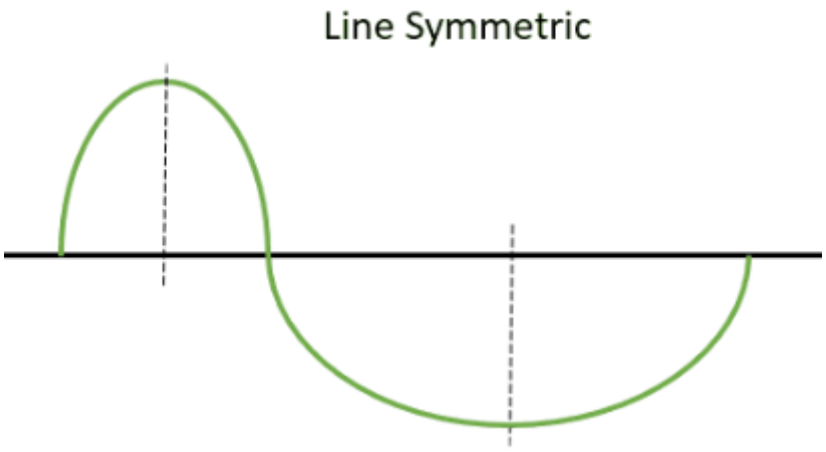


Figura 15. Simetria axial de una trayectoria terrestre

Simetría bisagra

En este caso se toma como referencia el punto de cruce con el ecuador. Se considera una de las mitades de la trayectoria y se imagina una rotación de $180º$ alrededor del nodo correspondiente. Si después de la rotación la trayectoria coincide con la otra mitad, existe simetría de bisagra.

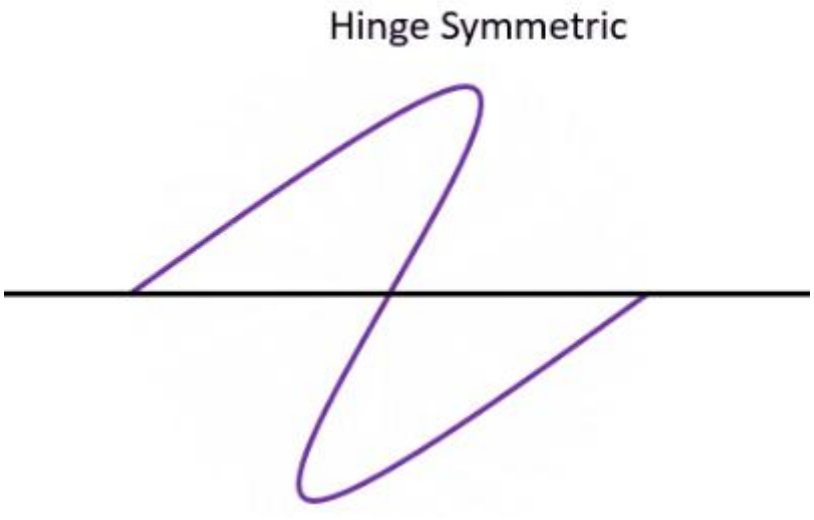


Figura 16. Simetría de bisagra de una trayectoria terrestre

Una trayectoria correspondiente a una órbita circular presenta ambas simetrías.

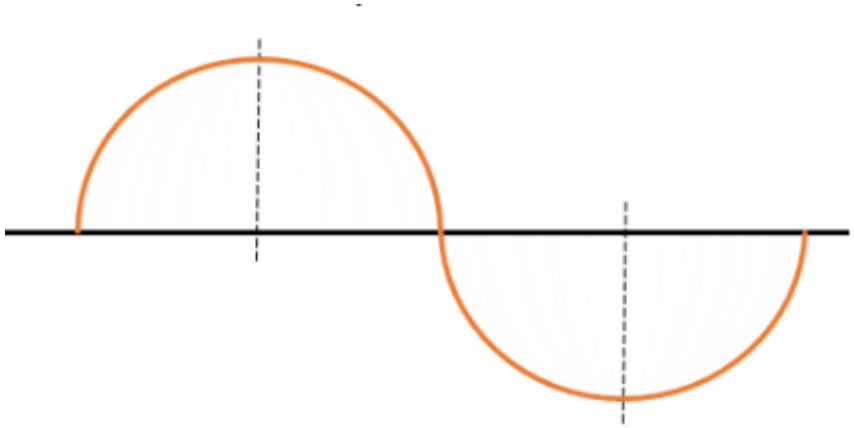


Figura 17. Simetría axial y de bisagra de una órbita circular

Si se pierde alguna de ellas, la órbita puede ser indicativa de una excentricidad distinta de cero.

RAAN

La ascensión recta del nodo ascendente (RAAN), se mide desde el equinoccio vernal hasta el nodo ascendente. Para determinarla es necesario disponer de una referencia que indique la dirección del equinoccio vernal. En un *ground track* convencional esta referencia normalmente no está representada.

Por lo tanto, el RAAN no puede determinarse directamente a partir de un *ground track* convencional a menos que el mapa incluya la referencia correspondiente al equinoccio vernal.

Identificación del perigeo

El perigeo es el punto de la órbita donde la distancia entre el satélite y el centro de la Tierra es mínima. En una órbita elíptica, la velocidad orbital es máxima en el perigeo y mínima en el apogeo. Esta propiedad puede utilizarse para interpretar la trayectoria terrestre.

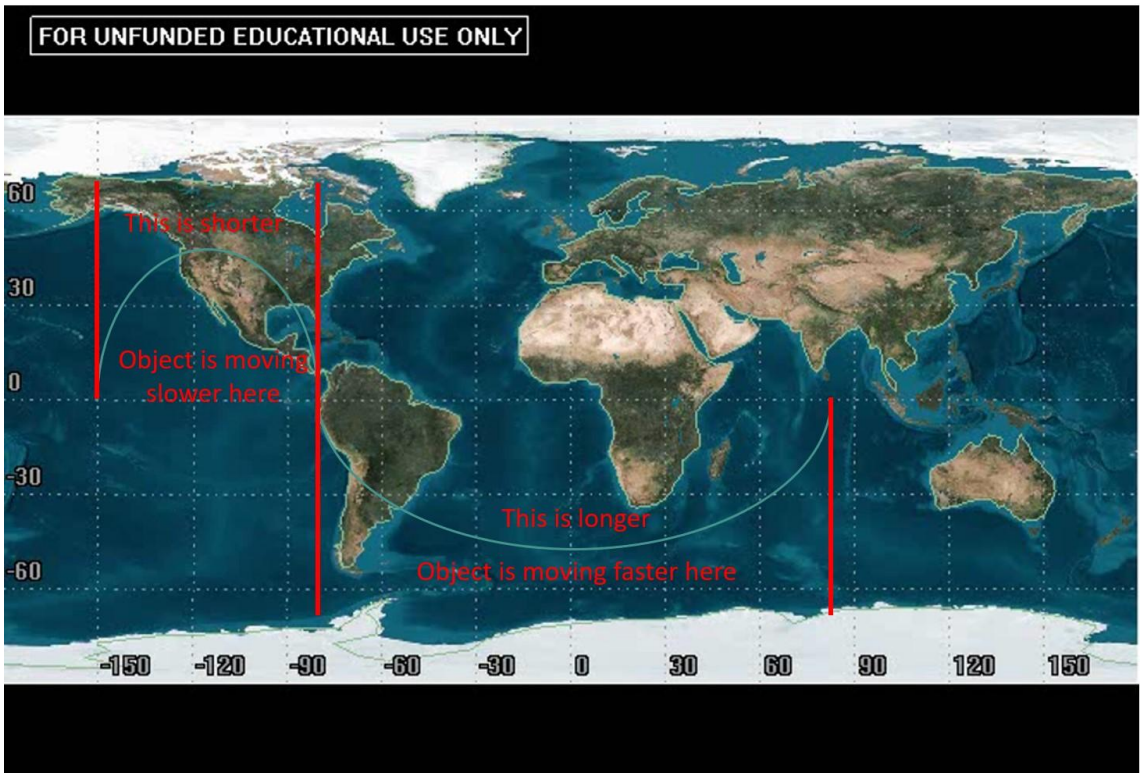


Figura 18. Tramos rápidos y lentos de una trayectoria.

Debido a la rotación terrestre, los distintos tramos de la trayectoria pueden presentar diferentes longitudes aparentes. En una órbita directa, un tramo en el que el satélite se desplaza rápidamente respecto de la superficie terrestre puede aparecer más extendido longitudinalmente, mientras que un tramo correspondiente a una menor velocidad relativa puede aparecer más comprimido. Por lo tanto, para localizar aproximadamente el perigeo se busca la región asociada con la mayor velocidad relativa del satélite respecto de la superficie terrestre. En una primera aproximación, el perigeo puede localizarse cerca del centro del tramo longitudinalmente más extendido

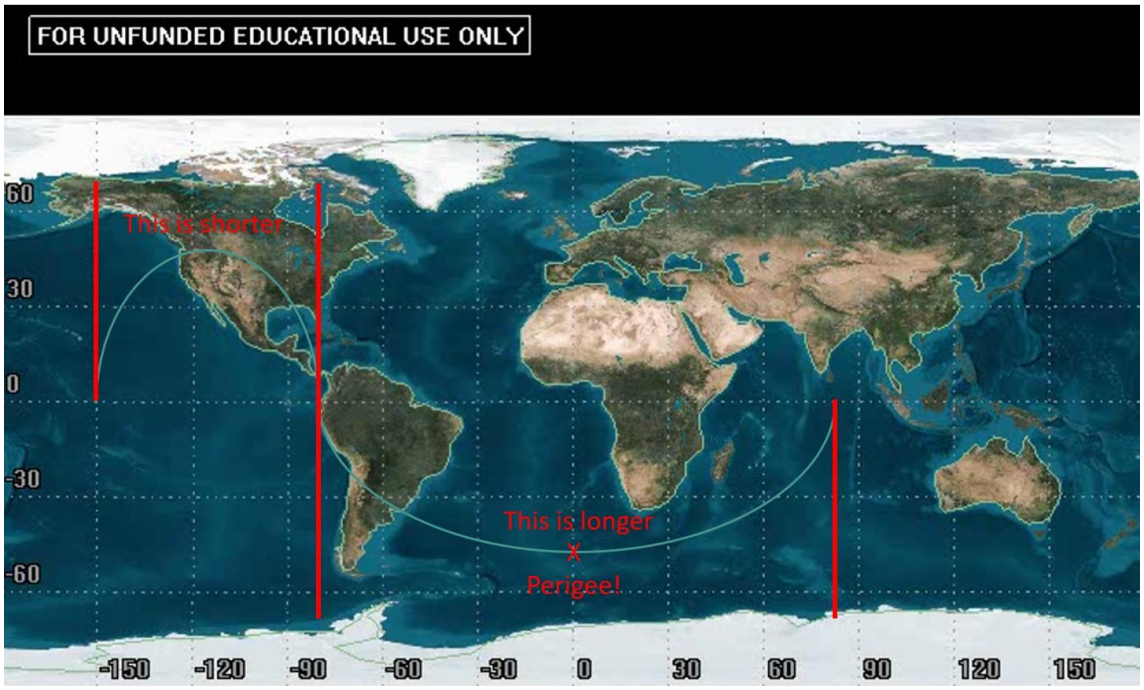


Figura 19. Posición del perigeo a la mitad en la mitad de la zona rápida

Una vez localizado el nodo ascendente y estimada la posición del perigeo, puede determinarse el argumento del perigeo. El ángulo se mide dentro del plano orbital y en el sentido del movimiento del satélite. Por lo tanto, no debe confundirse el argumento del perigeo con:

- la longitud geográfica del perigeo;
- la latitud del perigeo;
- la distancia longitudinal entre el nodo ascendente y el perigeo

Los pasos para determinar el argumento de perigeo (ω) son:

1. Identificar el nodo ascendente: Es el punto donde el satélite cruza el ecuador de sur a norte.
2. Localizar el perigeo: El satélite se mueve más rápido en el perigeo y más lento en el apogeo. En la trayectoria terrestre, las secciones más largas representan mayor velocidad, por lo que el perigeo se ubica aproximadamente en la mitad de la parte más larga de la onda trazada sobre el mapa.
3. Medir el argumento del perigeo: Se mide el ángulo desde el nodo ascendente inicial hasta el perigeo, a lo largo del recorrido orbital (no sobre el mapa).

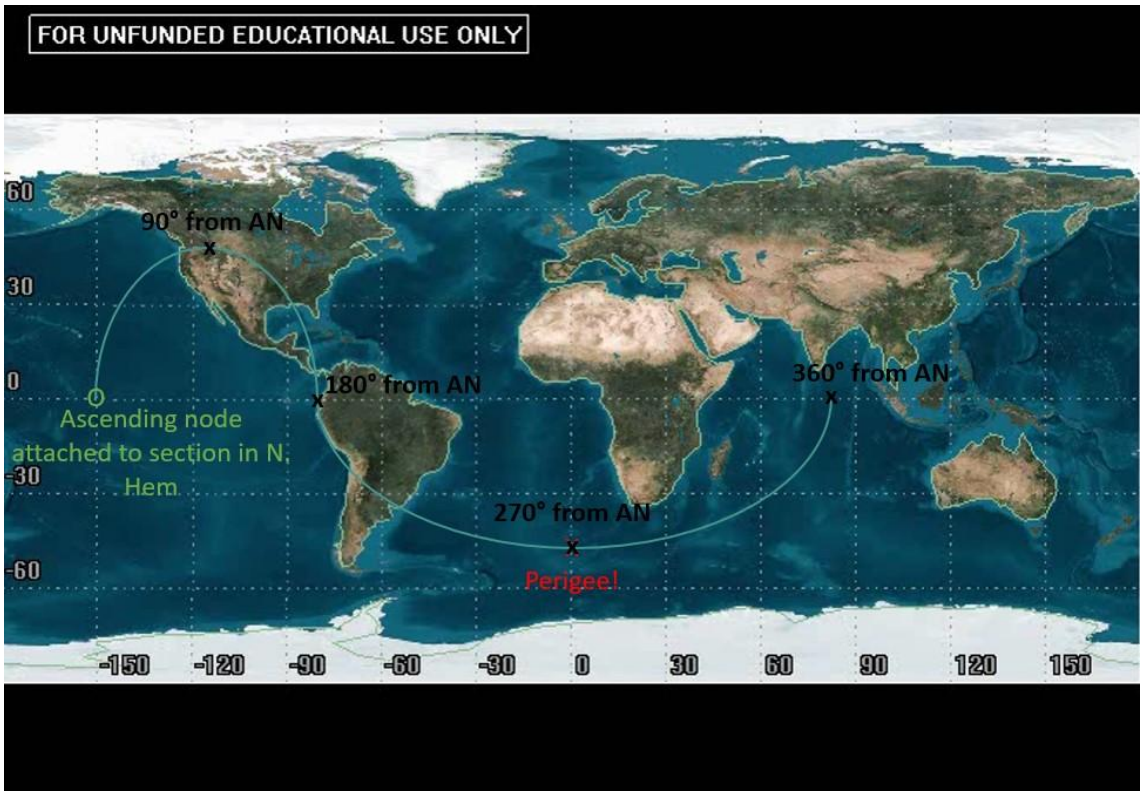


Figura 20. Cálculo de argumento de perigeo

Existen casos en que una trayectoria puede parecer desplazarse “hacia atrás” es decir, de derecha a izquierda sobre el mapa. El satélite no está retrocediendo en su órbita. Lo que ocurre es que, observado desde la superficie terrestre, el movimiento orbital del satélite se combina con la rotación de la Tierra. En determinadas regiones, la superficie terrestre puede desplazarse longitudinalmente más rápido que la proyección del satélite, generando un movimiento aparente hacia el oeste o "hacia atrás" (retrogrado).

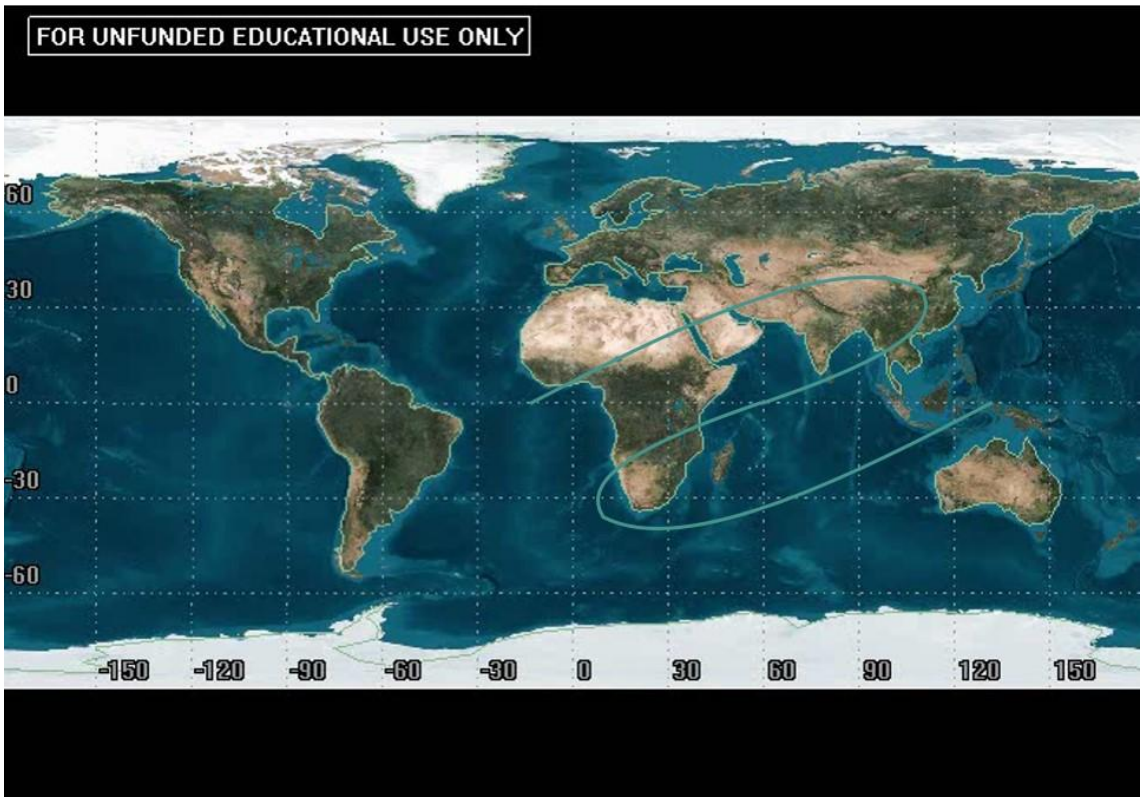


Figura 21. Movimiento de aparente retroceso

Para identificar el perigeo se debe determinar primero qué región corresponde a la mayor velocidad relativa. Una vez localizada esa región, el perigeo se encuentra aproximadamente en su punto medio. Por lo tanto, el perigeo no estará en el tramo en el que el satélite parece moverse hacia atrás. En el ejemplo mostrado anteriormente, eso elimina la mitad de la órbita. La otra mitad será "la sección rápida", por lo que el medio de esa será su parte más rápida y ese es el perigeo. Esa porción de la trayectoria terrestre termina dividiéndose uniformemente en dos secciones, lo que hace que la parte donde se corta sea el perigeo. Esto también resulta ser el nodo ascendente, por lo que la distancia entre el nodo ascendente y el perigeo conduce a un argumento de perigeo de $\omega = 0$

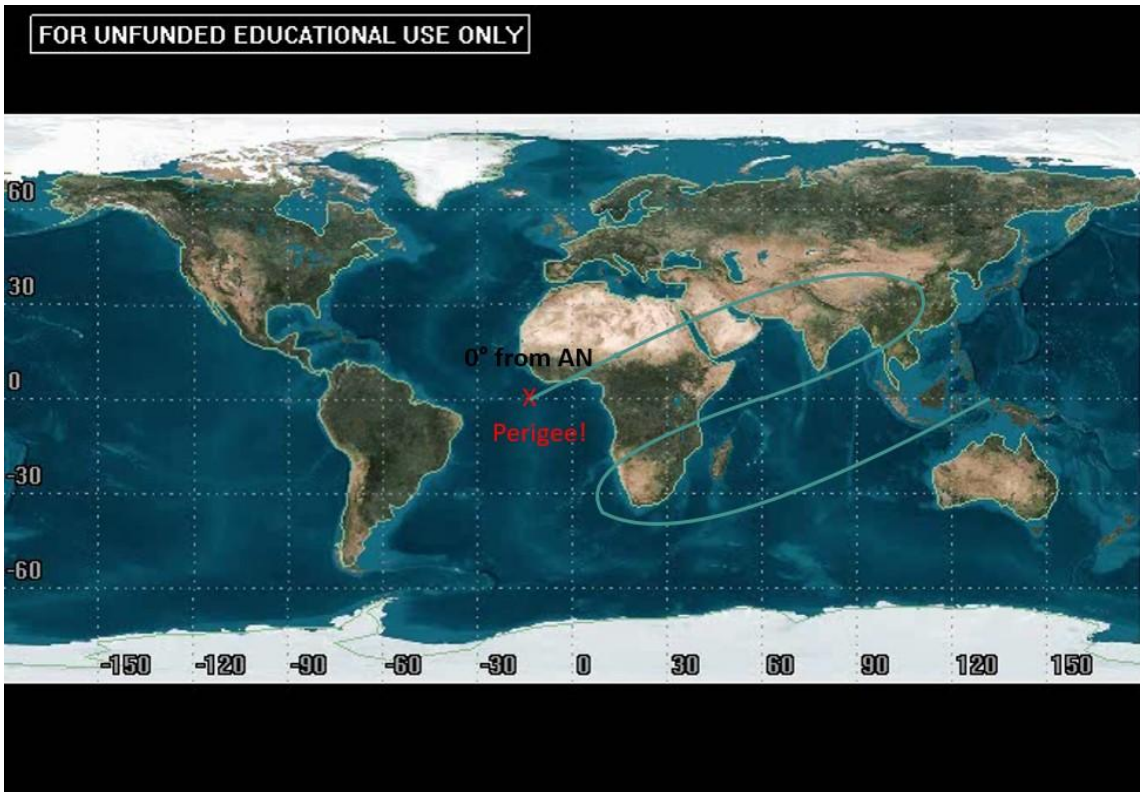


Figura 22. Argumento de perigeo para una ground track retrogrado

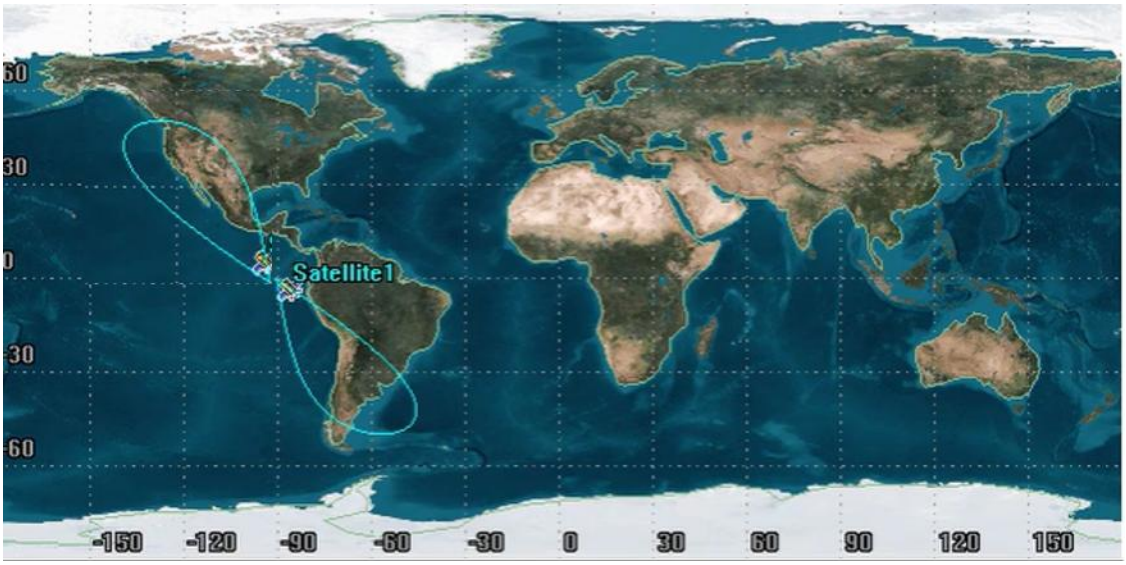
Cuando una órbita no es simétrica, puede resultar un poco más difícil interpretar el argumento del perigeo. En concreto, los satélites en órbita geosincrónicas tienen trayectorias terrestres de aspecto muy peculiar.

Orbitas geosíncronas excéntricas

Las órbitas geosíncronas con excentricidad distinta de cero presentan trayectorias terrestres particularmente interesantes. Pueden adoptar formas como:

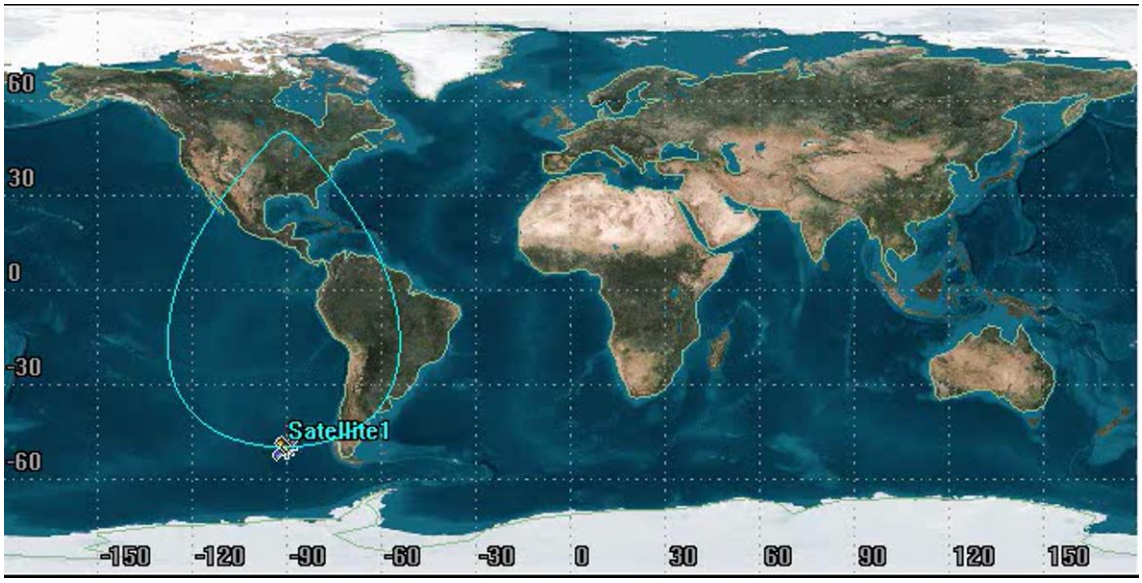
- figura de ocho;
- ocho desplazado;
- lágrima;
- trayectoria aparentemente circular;
- formas discontinuas.

Determinar el argumento del perigeo para órbitas geoestacionarias no circulares podemos utilizar el mismo proceso para determinarlo.



La primera parte está en el hemisferio sur y la segunda en el hemisferio norte. A lo largo de toda la órbita, el satélite está "retrocediendo" durante la mitad de la órbita, por lo que podemos descartar esa parte para la ubicación del perigeo. Eso significa que el perigeo estará a la mitad de la otra mitad. Esto aterriza justo en el ecuador, lo que significa que está en el nodo ascendente o descendente. Alcanza este punto en el nodo descendente. El nodo descendente siempre está a 180° del nodo ascendente. Esto nos deja con un argumento de perigeo de $\omega = 180$

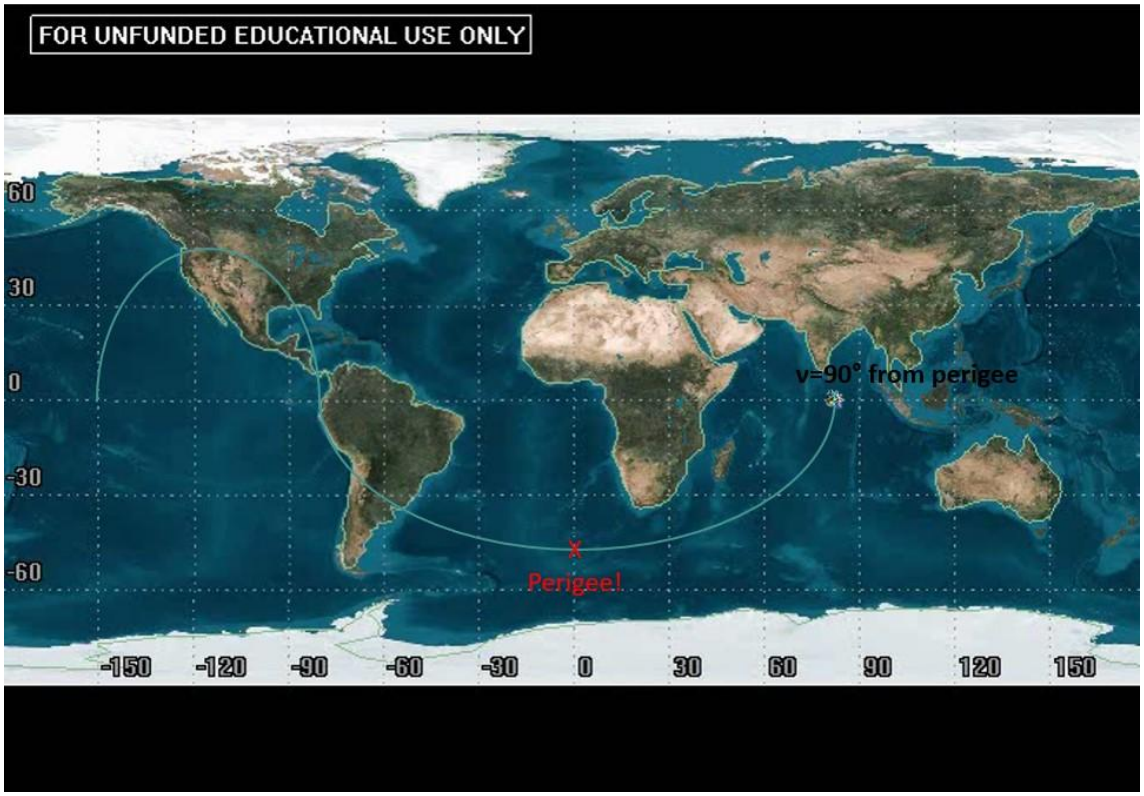
En algunas órbitas geosíncronas excéntricas puede aparecer una trayectoria con forma de lágrima. Para interpretar este tipo de trayectoria se debe determinar primero el sentido de movimiento del satélite. Una vez establecido el sentido de recorrido, se identifica la región donde el satélite presenta mayor velocidad relativa respecto de la superficie terrestre. Esa región permite localizar aproximadamente el perigeo. Posteriormente, el argumento del perigeo se obtiene midiendo el ángulo orbital desde el nodo ascendente hasta el perigeo, siguiendo el sentido del movimiento.



El satélite solo se desplaza hacia adelante durante la mitad inferior de la forma de lágrima. Por lo tanto, el perigeo se encuentra en la parte inferior de dicha forma de lágrima. Si dividimos la lágrima en cuatro partes —el nodo ascendente, la parte superior de la lágrima, el nodo descendente y la parte inferior de la lágrima, que se encuentran a 0°, 90°, 180° y 270° del nodo ascendente respectivamente— podemos definir el argumento del perigeo como. Nuevamente, tenga en cuenta que esto se mide desde el nodo ascendente hasta la parte inferior de la forma de lágrima en la dirección en que se desplaza el satélite.$\omega = 270$

Anomalia verdadera

Una vez localizado el perigeo, puede determinarse la anomalia verdadera, la cual resulta ser el angulo, medido en el plano orbtial, desde el perigeo hasta la posición instantánea del satélite, siguiendo el sentido del movimiento orbital. Recordar que es cero en el perigeo, y 180 en el apogeo.

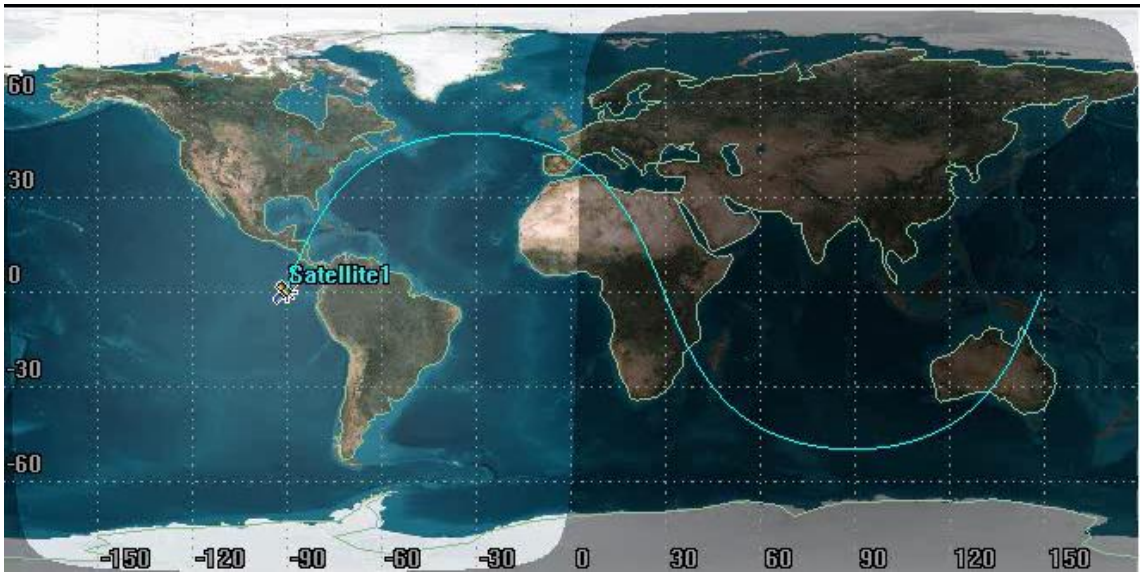


La anomalía verdadera no es necesariamente igual a la diferencia de longitud geográfica entre el satélite y el perigeo. Al igual que ocurre con el argumento del perigeo, debe considerarse el movimiento dentro del plano orbital.

EJERCICIOS

Ejercicio 1

Dada la trayectoria terrestre (*ground track*) que se muestra en la animación, determine la excentricidad, el período y la altitud.



Esta trayectoria terrestre parece tener simetría axial y de bisagra; por lo tanto, la órbita es circular. Esto significa que:

$$e = 0$$

En esta vista de la trayectoria terrestre, para determinar ΔN utilicemos el método de calcular la longitud recorrida entre nodos ascendentes y restarla de 360°. Esto se debe a que la trayectoria completa es visible en un movimiento continuo y el "hueco" se divide. Podemos observar que la distancia recorrida entre nodos ascendentes es de 240° (de -90º a 150º). Por lo tanto:

$$\Delta N = 360º - 240º = 120º$$

Con el desplazamiento nodal de 120° hallado, podemos determinar el período:

$$T = \frac{\Delta N}{15.04º/h} = \frac{120º}{15.04º/h} = 8h$$

Este período se puede utilizar entonces para determinar el semieje mayor con la ecuación habitual:

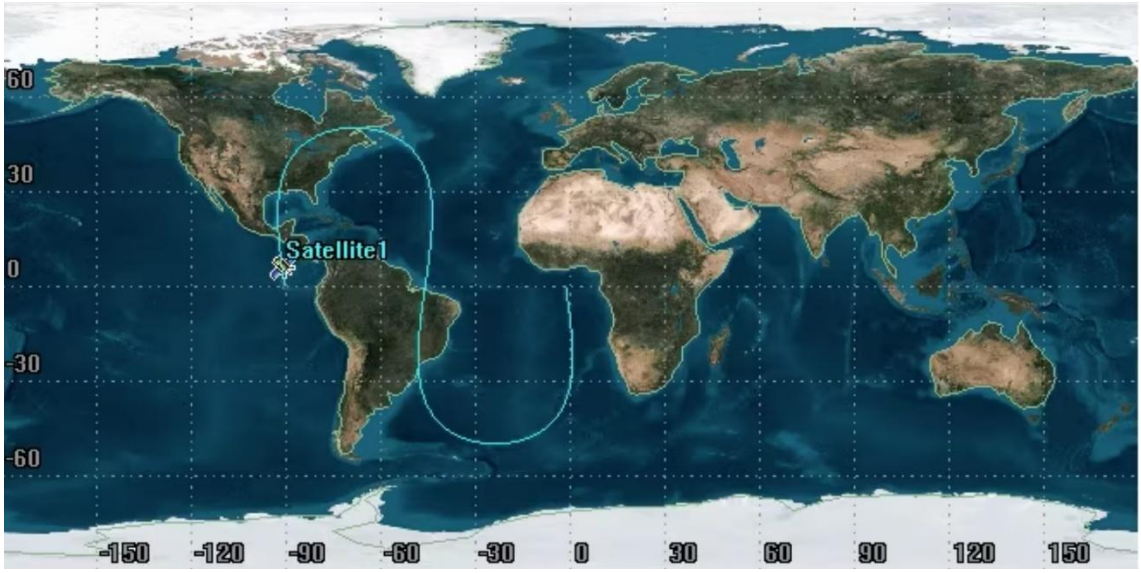
$$a = \sqrt[3]{\mu \left(\frac{T}{2\,\pi}\right)^2} = \sqrt[3]{398500{,}5\,\frac{km^3}{s^2}\left(\frac{8h * 3600\frac{s}{h}}{2\,\pi}\right)^2} = 20307{,}4\ km$$

Sabemos que la altitud es igual al radio de la órbita menos el radio de la Tierra. Como esta órbita es circular, el radio de su órbita es igual a su semieje mayor.

$$h = R_{orbita} - R_{Tierra} = 20307{,}4\ km - 6378\ km = 13929{,}4\ km$$

Ejercicio 2

Dada la trayectoria terrestre (*ground track*) que se muestra en la figura, determine la excentricidad, el período y la altitud



Esta trayectoria terrestre parece tener simetría axial y de bisagra; por lo tanto, la órbita es circular. Esto significa que:

$$e = 0$$

En esta vista de la trayectoria terrestre, para determinar ΔN utilicemos el método de calcular la longitud recorrida entre nodos ascendentes y restarla de 360°. Esto se debe a que la trayectoria completa es visible en un movimiento continuo y el "hueco" se divide. Podemos observar que la distancia recorrida entre nodos ascendentes es de 90°. Por lo tanto:

$$\Delta N = 360º - 90º = 270º$$

Con el desplazamiento nodal de 270° hallado, podemos determinar el período:

$$T = \frac{\Delta N}{15º/h} = \frac{270º}{15º/h} = 18h$$

Este período se puede utilizar entonces para determinar el semieje mayor con la ecuación habitual:

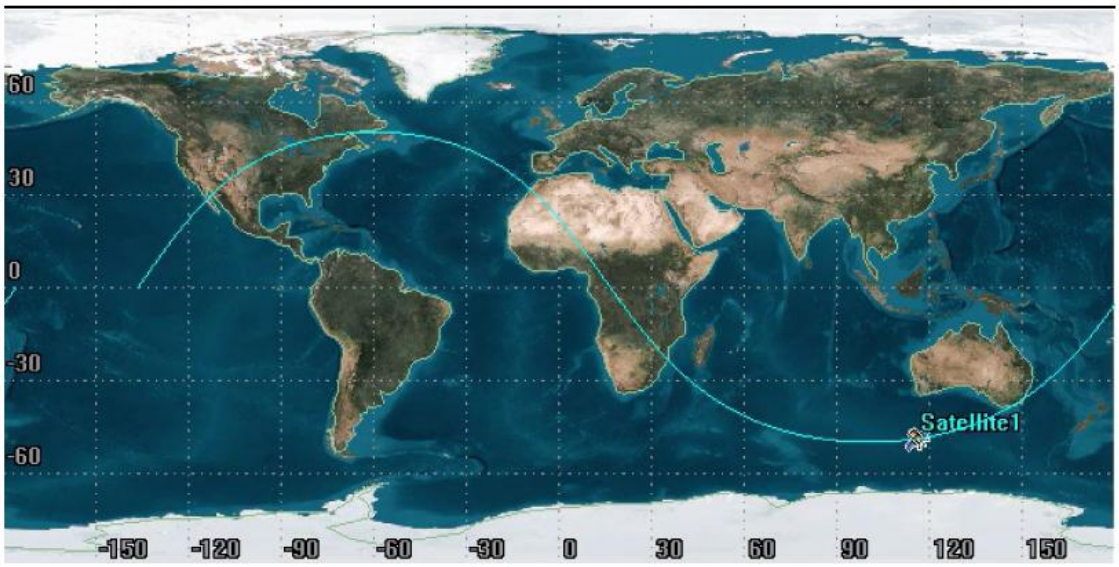
$$a = \sqrt[3]{\mu \left(\frac{T}{2\,\pi}\right)^2} = \sqrt[3]{398500{,}5\,\frac{km^3}{s^2}\left(\frac{18h * 3600\frac{s}{h}}{2\,\pi}\right)^2} = 34869{,}26\ km$$

Sabemos que la altitud es igual al radio de la órbita menos el radio de la Tierra. Como esta órbita es circular, el radio de su órbita es igual a su semieje mayor.

$$h = R_{orbita} - R_{Tierra} = 34869{,}26\ km - 6378\ km = 28491{,}26\ km$$

Ejercicio 3

Determinar el argumento del perigeo, ω

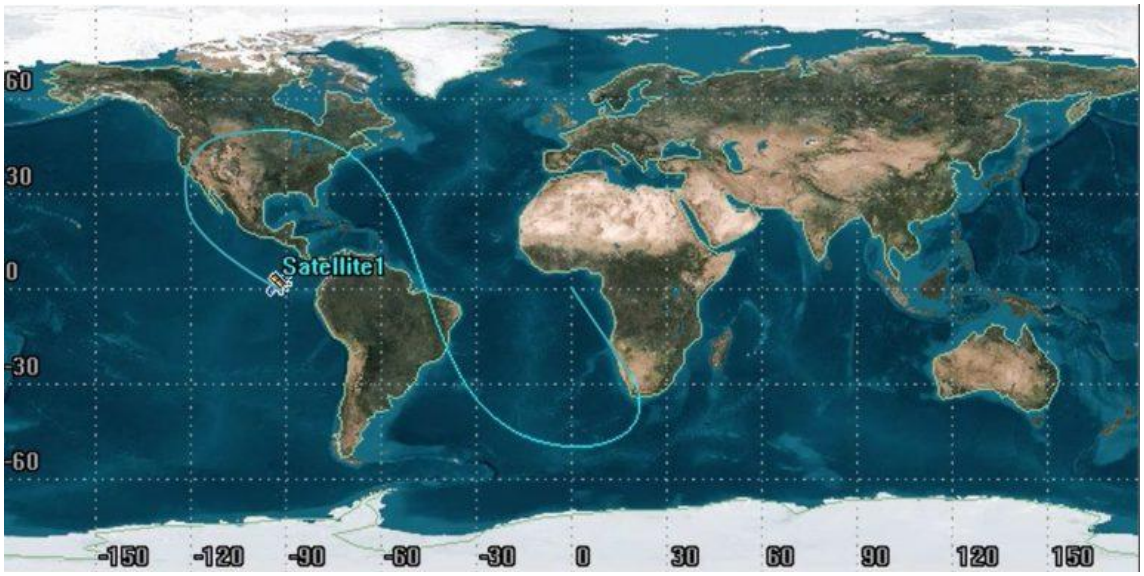


Podemos observar que el lado derecho es ligeramente más largo que el izquierdo. Con esto, sabemos que el perigeo se encuentra a medio camino entre ese lado derecho más largo. Podemos aproximar esta ubicación a aproximadamente ¾ del recorrido de la órbita. Por lo tanto:

$$\omega = \frac{3}{4}360º = 270º$$

Ejercicio 4

Determina la inclinación, i, el semieje mayor, a, y el argumento del perigeo, ω

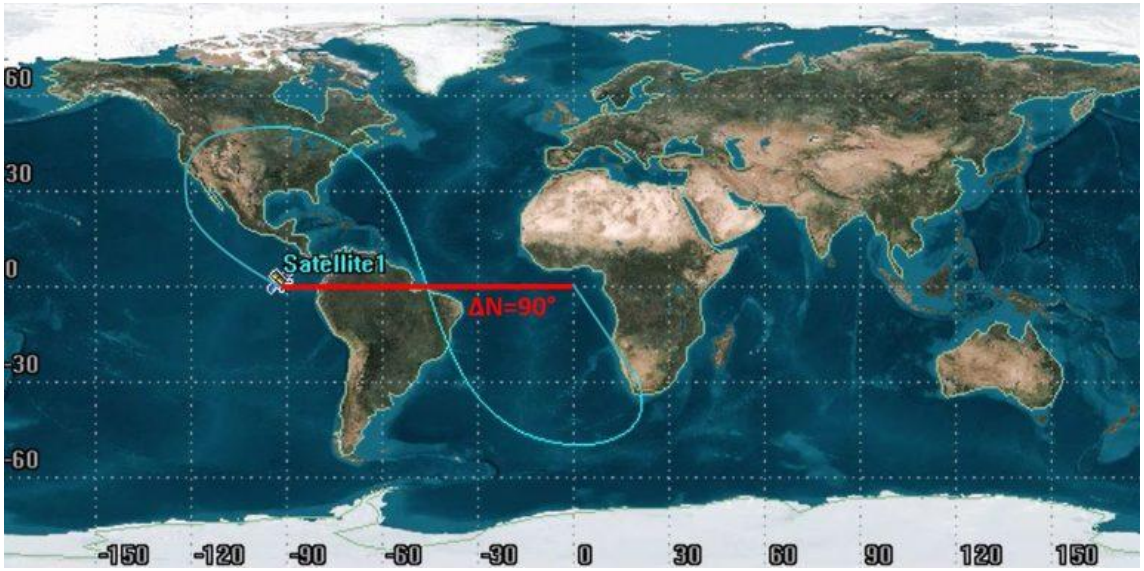


Al analizar la amplitud de la orbita, podemos aproximar que la inclinación es de 50º

$$i = 50º$$

Esta trayectoria terrestre presenta simetría de bisagra, pero no simetría axial, por lo que sabemos que no es una órbita circular. Como siempre, comenzaremos determinando la longitud entre los nodos ascendentes. Esto puede parecer un poco confuso, ya que la órbita se extiende más allá de estos dos puntos, pero simplemente mediremos la distancia entre los dos extremos

$$\Delta N = 360º - 90º = 270º$$



Con el desplazamiento nodal de 270° hallado, podemos determinar el período:

$$T = \frac{\Delta N}{15º/h} = \frac{270º}{15º/h} = 18h$$

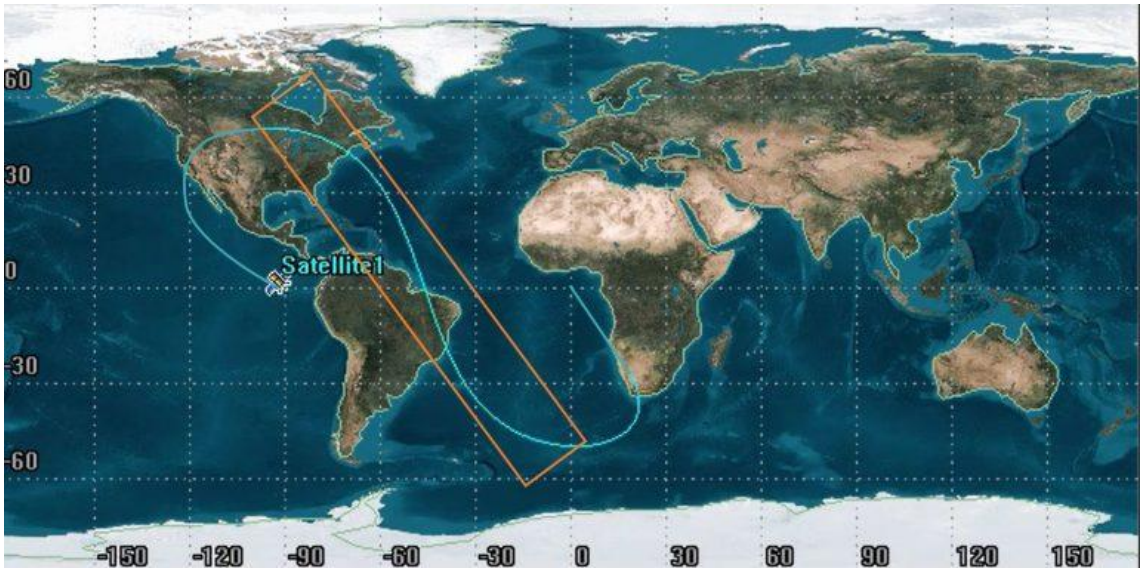
Este período se puede utilizar entonces para determinar el semieje mayor con la ecuación habitual:

$$a = \sqrt[3]{\mu \left(\frac{T}{2\,\pi}\right)^2} = \sqrt[3]{398500{,}5\frac{km^3}{s^2}\left(\frac{18h * 3600\frac{s}{h}}{2\,\pi}\right)^2} = 34869{,}26\ km$$

Sabemos que la altitud es igual al radio de la órbita menos el radio de la Tierra. Como esta órbita es circular, el radio de su órbita es igual a su semieje mayor.

$$h = R_{orbita} - R_{Tierra} = 34869{,}26\ km - 6378\ km = 28491{,}26\ km$$

Ahora, determinemos el argumento del perigeo. Parte de esta órbita se mueve "hacia atrás" en la trayectoria terrestre, por lo que sabemos que el perigeo no estará en esas partes. Esto nos deja con la siguiente sección:



La parte central de esta sección se encuentra en el nodo descendente (coincide con el perigeo). Sabemos que el nodo descendente siempre está a 180° del nodo ascendente, lo que significa:

$$\omega = 180º$$