UTN HAEDO

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL HAEDO

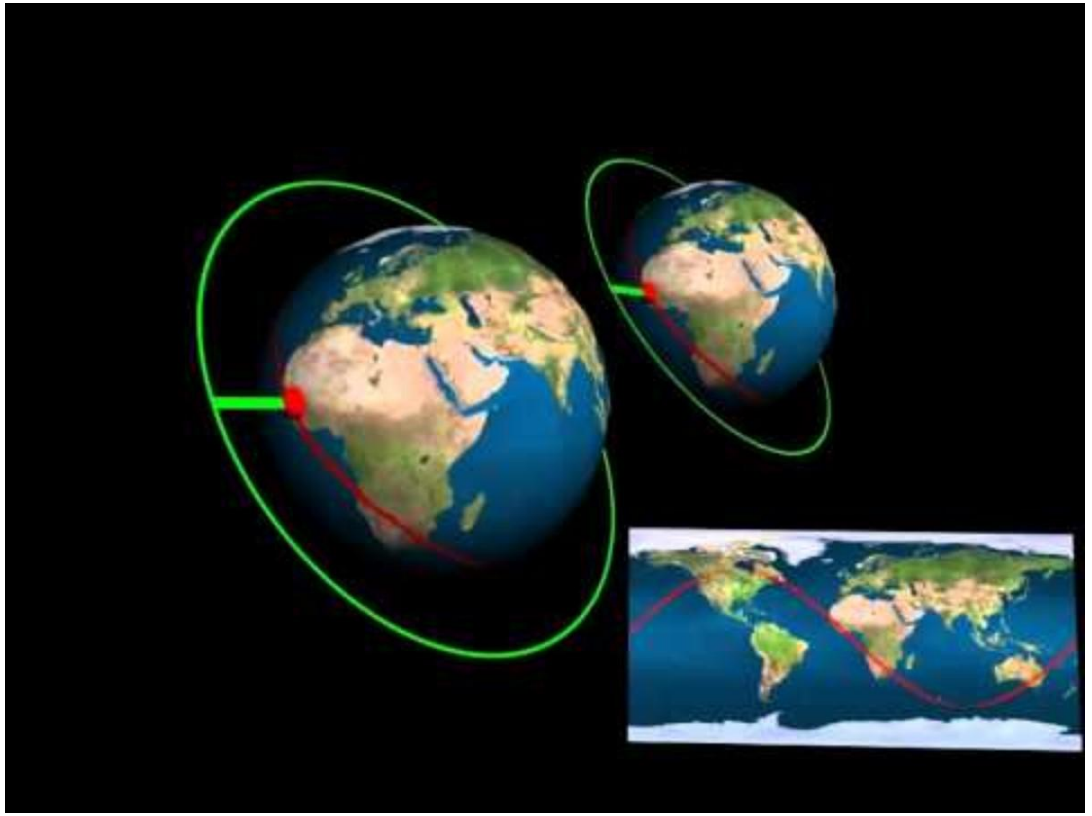
MECÁNICA ORBITAL

GROUND TRACKS

GROUND TRACK

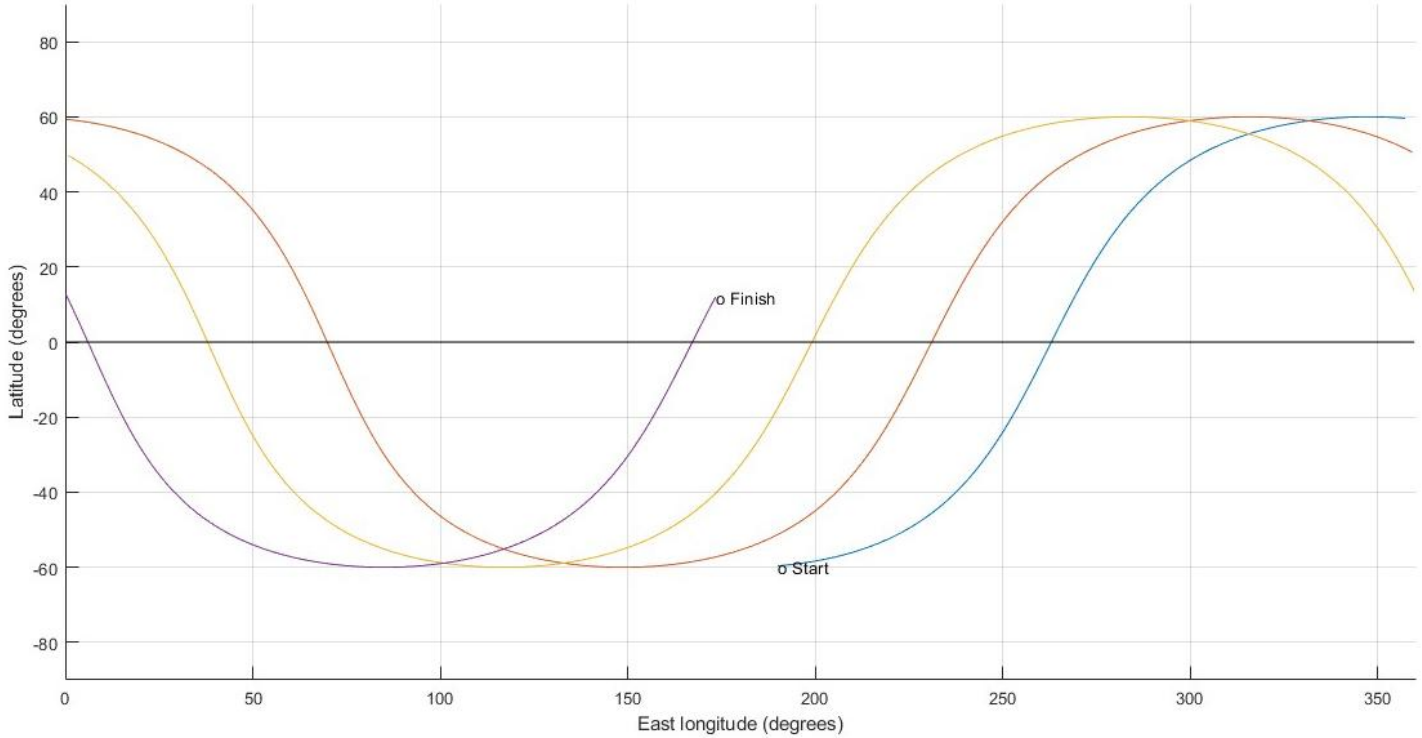
Se denomina como *ground track* a la proyección de una órbita sobre la superficie del planeta

Si la Tierra no rotara, habría solo una traza similar a una sinusoide, trazada repetidamente a medida que el satélite orbita la Tierra.



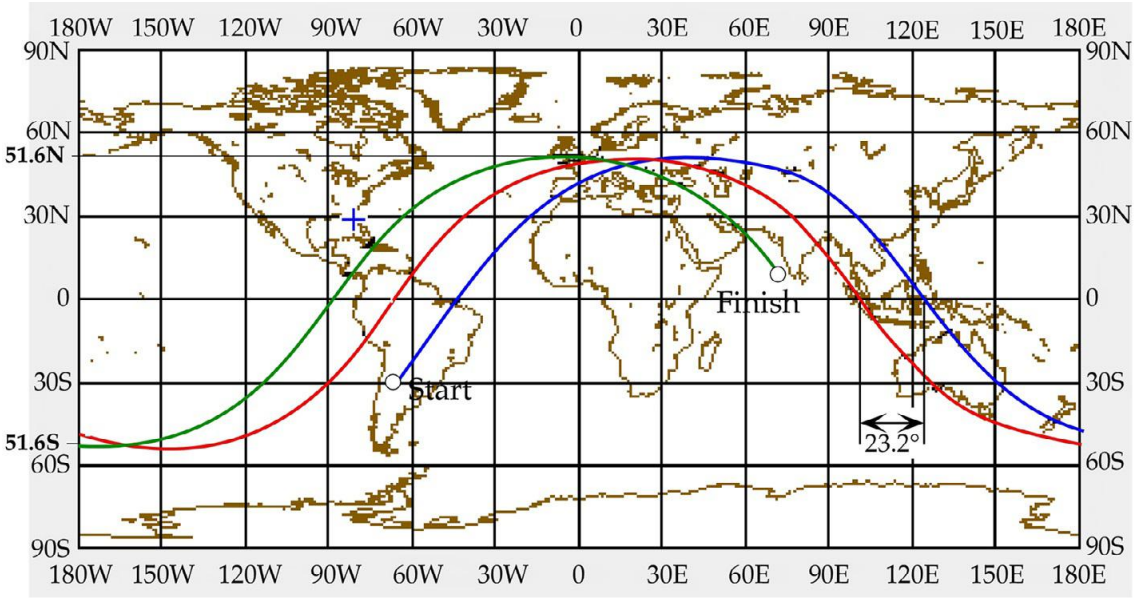
GROUND TRACK

Sin embargo, la Tierra gira hacia el este bajo la órbita del satélite a $15{,}04°/h$, por lo que la traza en el suelo avanza hacia el oeste a esa velocidad.



GROUND TRACK

La figura muestra aproximadamente 2 orbitas y medias de un satélite. La distancia entre dos cruces sucesivos en este caso es de 23,2°, lo que corresponde al ángulo que roto la Tierra durante esa orbita.

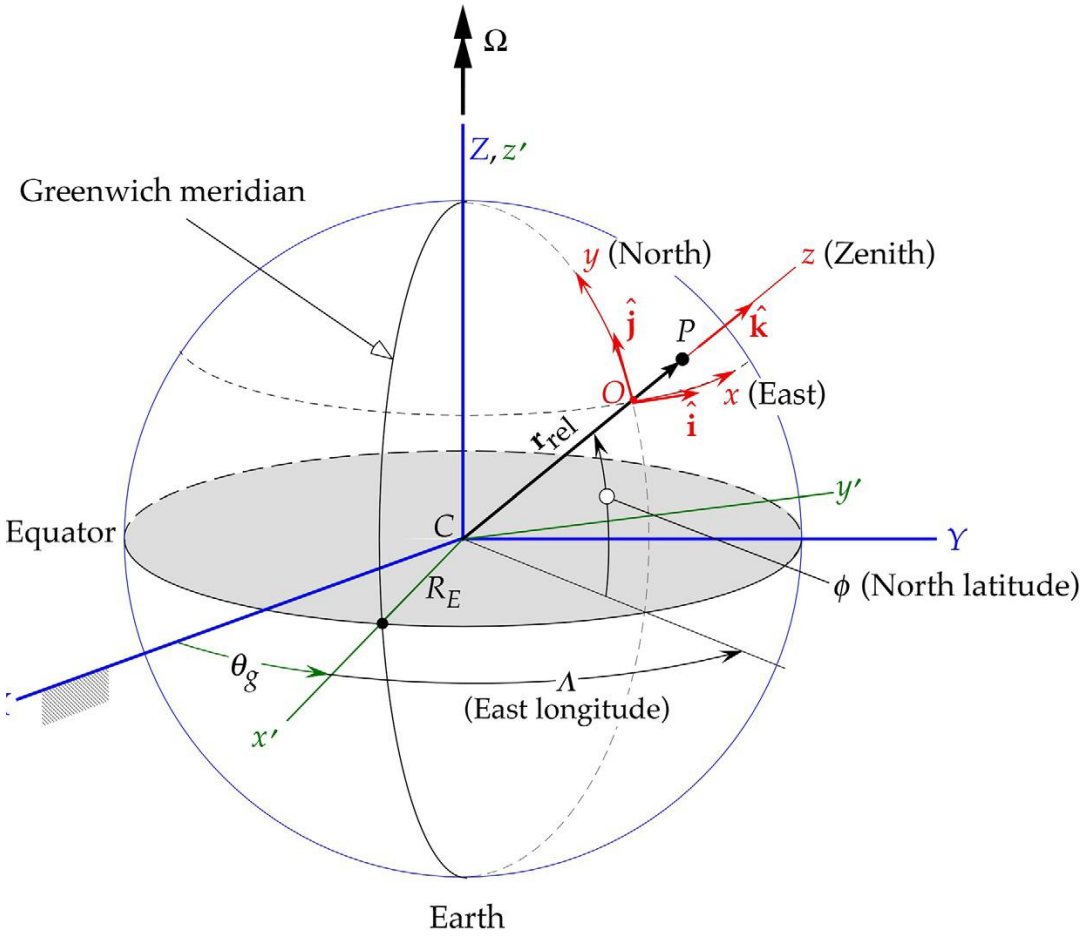


Con esto, podemos calcular el periodo del satélite:

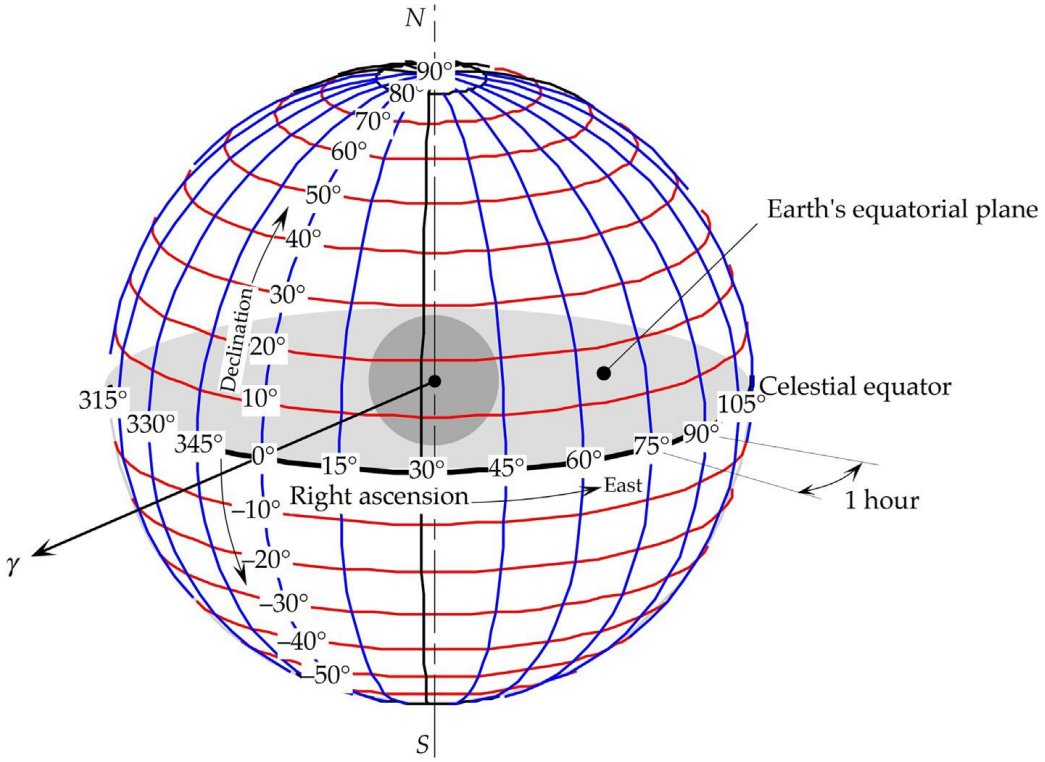
$$T = \frac{23{,}2°}{15{,}04°/h} = 1{,}54\ h = 92{,}6\ min$$

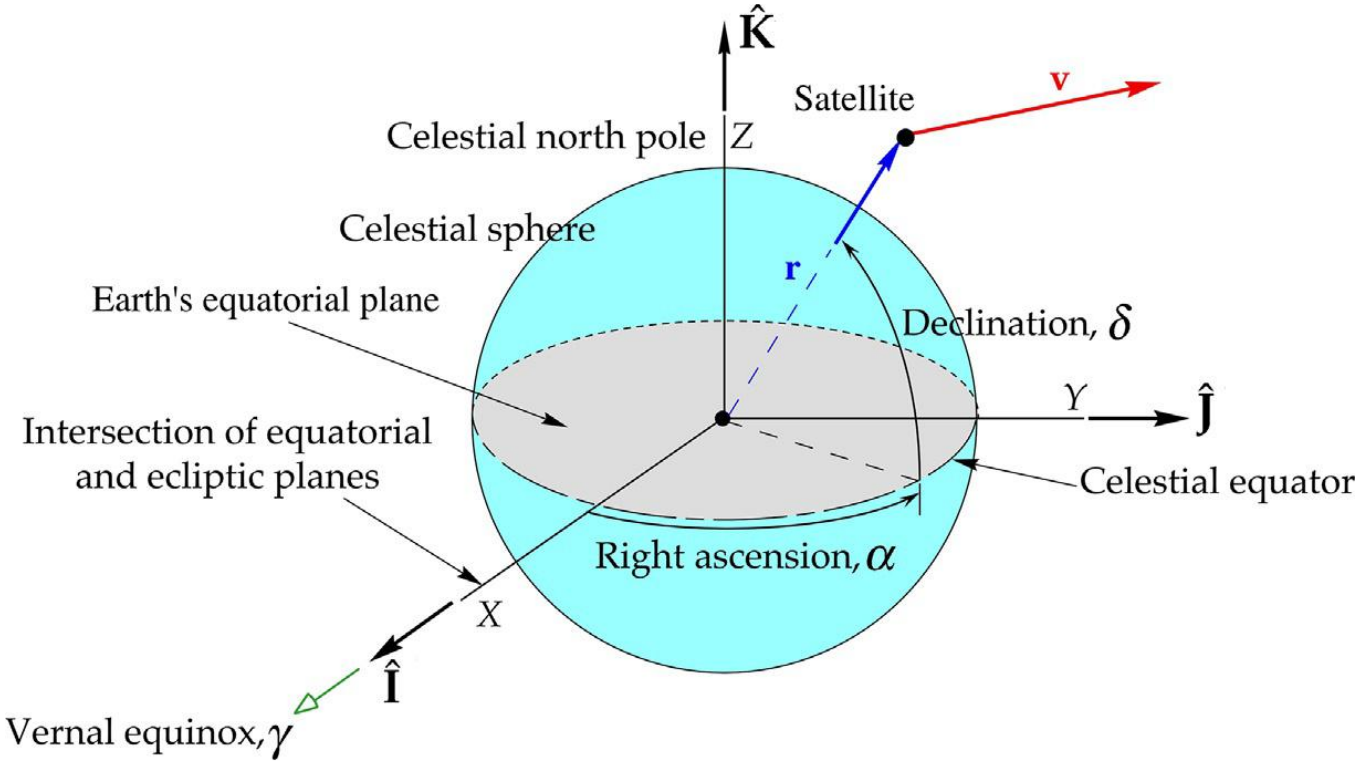
GROUND TRACK

Dada la posición vectorial $\boldsymbol{r}$ de un satélite, podemos encontrar su ascensión recta y declinación relativas al marco ecuatorial geocéntrico XYZ, que está fijo en el espacio. La Tierra rota a una velocidad angular ω_T relativa a este sistema. Vamos a adjuntar un sistema de coordenadas cartesianas $x'y'z'$ a la Tierra con su origen ubicado en el centro de la Tierra



GROUND TRACK





GROUND TRACK

Los ejes $x'y'$ yacen en el plano ecuatorial y el eje z' apunta hacia el norte. (En la figura anterior, el eje x' está dirigido hacia el meridiano principal, que pasa por Greenwich, Inglaterra.) Los ejes XYZ y $x'y'z'$ difieren solo por el ángulo θ entre el eje X estacionario y el eje x' rotante. Si los ejes X y x' se alinean en el tiempo t_0, entonces en cualquier tiempo t posterior el ángulo θ estará dado por $\omega_T(t - t_0)$. La transformación de XYZ a $x'y'z'$ está representada por la matriz de rotación elemental

$$[R_3(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \theta = \omega_T(t - t_0)$$

GROUND TRACK

Así, si los componentes del vector de posición $\boldsymbol{r}$ en el marco inercial XYZ están dados por $\{\boldsymbol{r}\}_X$, sus componentes $\{\boldsymbol{r}\}_{x'}$ en el marco rotatorio, fijado a la Tierra $x'y'z'$ son

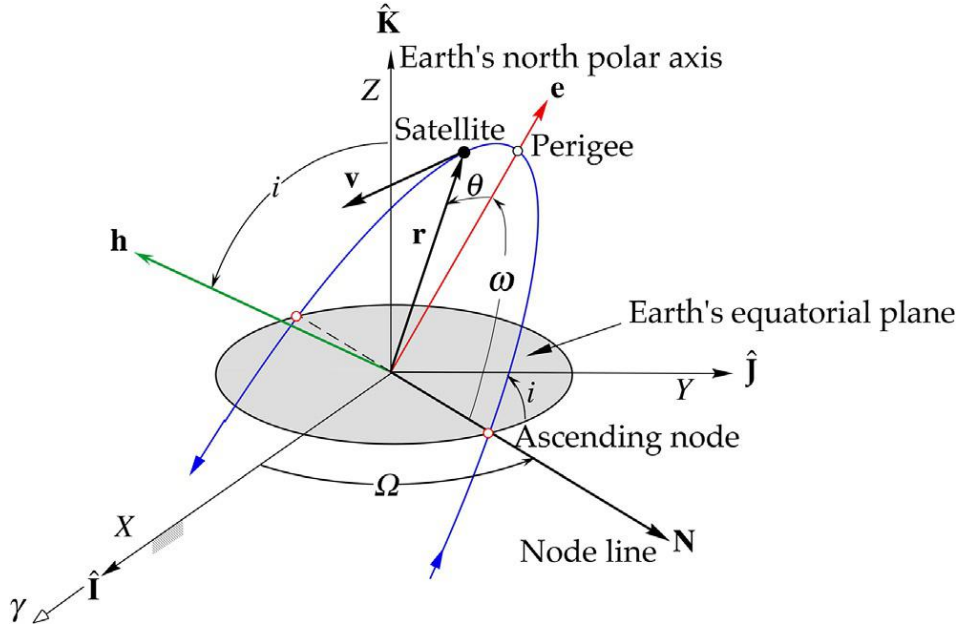
$$\{\boldsymbol{r}\}_{x'} = [R_3(\theta)]\{\boldsymbol{r}\}_X$$

Conociendo $\{\boldsymbol{r}\}_{x'}$, podemos determinar la ascensión recta (longitud al este de x') y la declinación (latitud) en el sistema fijado a la Tierra.

GROUND TRACK

Dado:

- h: $momento\ angular\ especifico$
- e: $excentricidad$
- a: $semieje\ mayor$
- T: $periodo$
- i: $inclinacion$
- ω_0: $argumento\ del\ perigeo\ incial$
- Ω_0: $RAAN\ o\ ascension\ recta\ del\ nodo\ ascendente$
- θ_0: $anomalia\ verdadera$



Calcular la ascensión recta α y la declinación δ relativas a la Tierra rotatoria después de un intervalo de tiempo Δt

GROUND TRACK: Efecto de la elipticidad

1) Calcular $\dot{\Omega}$ y $\dot{\omega}$ a partir de las ecuaciones

$$\dot{\Omega} = -\left[\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\mu}J_2R^2}{(1-e^2)^2a^{7/2}}\right]\cos i \qquad \dot{\omega} = -\left[\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\mu}J_2R^2}{(1-e^2)^2a^{7/2}}\right]\left(\frac{5}{2}\sin^2 i - 2\right)$$

La Tierra se aparta (al igual que el resto de los cuerpos celestes) de la forma de simetría perfecta de un cuerpo esférico. Esto se debe a su rotación alrededor de un eje que produce un desplazamiento de masa centrifuga generando un cuerpo axisimétrico que sobresale en el ecuador y se aplana en los polos. Esta elipticidad del planeta causa que la ascensión recta Ω y el argumento del periageo ω varíen con el tiempo, por lo tanto hay que calcular estas variaciones.

GROUND TRACK: Efecto de la elipticidad

El parámetro adimensional que cuantifica los principales efectos de la elipticidad en las órbitas es $J2$, el segundo armónico zonal, la cual no es una constante universal, ya que cada planeta tiene su propio valor.

Table 4.3 Oblateness and second zonal harmonics

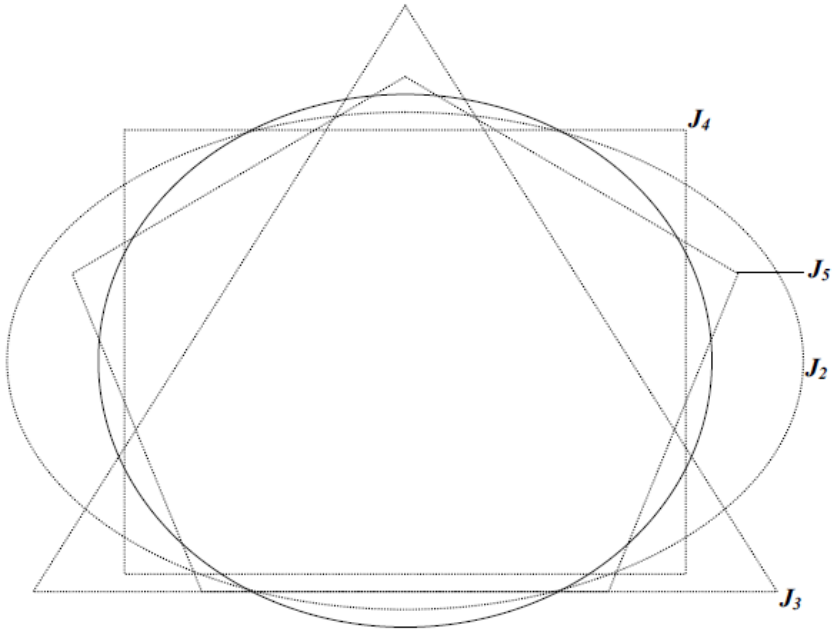
Planet	Oblateness	J_2
Mercury	0.000	$60(10^{-6})$
Venus	0.000	$4.458(10^{-6})$
Earth	0.003353	$1.08263(10^{-3})$
Mars	0.00648	$1.96045(10^{-3})$
Jupiter	0.06487	$14.736(10^{-3})$
Saturn	0.09796	$16.298(10^{-3})$
Uranus	0.02293	$3.34343(10^{-3})$
Neptune	0.01708	$3.411(10^{-3})$
(Moon)	0.0012	$202.7(10^{-6})$

GROUND TRACK: Efecto de la elipticidad

La forma axisimétrica de un planeta puede apartarse de una esfera de muchas otras formas. Para el cálculo, utilizamos las llamadas constantes de Jeffery. Estas constantes son una serie de parámetros que se utilizan para describir la forma y la masa de un cuerpo celeste en el modelado de la gravedad.

Los principales valores:

- $J2$ describe la forma del cuerpo como una elipse
- $J3$ se utiliza para describir la asimetría del cuerpo en relación con su plano ecuatorial.
- $J4$ se utiliza para describir la forma del cuerpo en términos de su curvatura.



GROUND TRACK: Efecto de la elipticidad

Por ahora solamente nos concentraremos en el efecto del $J2$. La elipticidad causa que la ascensión recta Ω y el argumento del periapsis ω varíen significativamente con el tiempo:

$$\dot{\Omega} = -\left[\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\mu}J_2R^2}{(1-e^2)^2a^{7/2}}\right]\cos i \qquad \dot{\omega} = -\left[\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\mu}J_2R^2}{(1-e^2)^2a^{7/2}}\right]\left(\frac{5}{2}\sin^2 i - 2\right)$$

donde R y μ son el radio y el parámetro gravitacional del planeta, respectivamente; a y e son el semieje mayor y la excentricidad de la órbita, respectivamente; e i es la inclinación de la órbita.

El efecto de la elipticidad en ambos parámetros es mayor en inclinaciones bajas, donde la órbita está cerca del abultamiento ecuatorial por períodos más largos de cada revolución. El efecto disminuye con el aumento del semieje mayor porque el satélite se aleja del abultamiento y su influencia gravitatoria. Obviamente, $\dot{\Omega} = \dot{\omega} = 0$ si $J2 = 0$ (sin abultamiento ecuatorial).

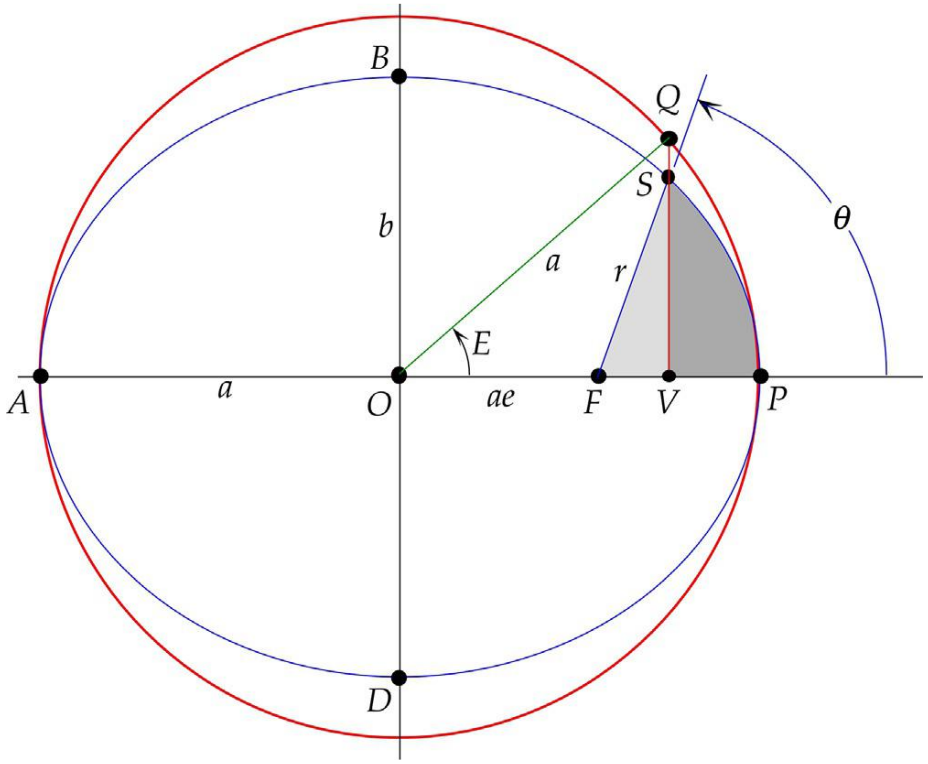
GROUND TRACK

2) Calcular el tiempo inicial t_0 (tiempo desde el paso por el perigeo):

a) Encontrar la anomalía excéntrica E_0 a partir de la ecuación

$$E = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

Es un ángulo auxiliar que se obtiene circunscribiendo la elipse de la órbita con un círculo auxiliar concéntrico cuyo radio es el semieje mayor de la elipse. Sea S el punto en la elipse cuya anomalía verdadera es θ. A través del punto S se traza una perpendicular a la línea del ápside, interceptando el círculo auxiliar en el punto Q y la línea del ápside en el punto V. El ángulo entre la línea del ápside y el radio trazado desde el centro del círculo hasta Q en su circunferencia es la anomalía excéntrica E



GROUND TRACK

2) Calcular el tiempo inicial t_0 (tiempo desde el paso por el perigeo):

b) Encontrar la anomalía media M_0 a partir de la ecuación

$$M_e = E - e \sin E$$

La anomalía media es la posición acimutal (en radianes) de un cuerpo ficticio que se mueve alrededor de la elipse a una velocidad angular constante n. Para una órbita circular, la anomalía media M y la anomalía verdadera θ son idénticas.

$$M_e = nt$$

GROUND TRACK

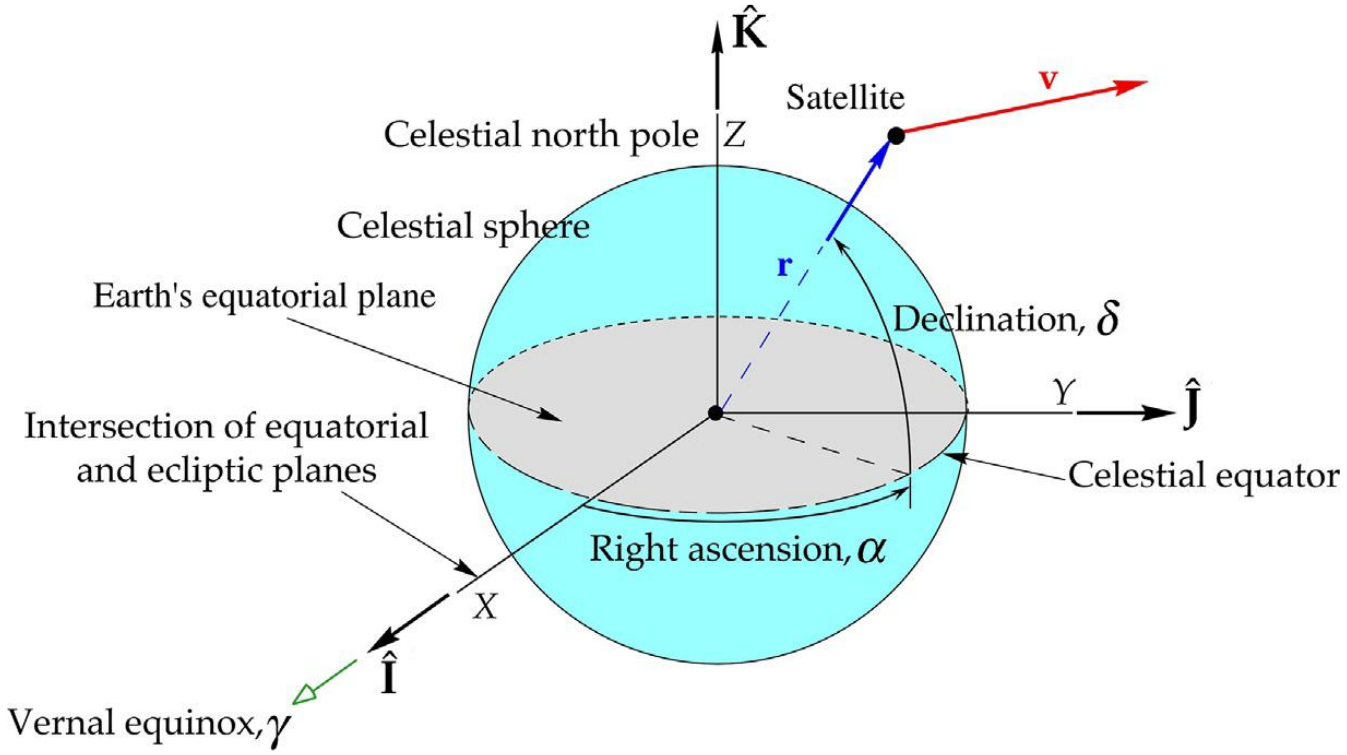
2) Calcular el tiempo inicial t_0 (tiempo desde el paso por el perigeo):

c) Encontrar t_0 a partir de la ecuación

$$t = \frac{M_e}{2\pi} T$$

GROUND TRACK

3) En el tiempo $t = t_0 + \Delta t$, calcular α y δ



GROUND TRACK

3) En el tiempo $t = t_0 + \Delta t$, calcular α y δ

a) Calcular la anomalía verdadera:

a) Encontrar M a partir de la ecuación $M_e = \frac{2\pi}{T} t$

b) Encontrar E a partir de la ecuación $M_e = E - e \sin E$

c) Encontrar θ a partir de la ecuación $\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2}$

GROUND TRACK

3) En el tiempo $t = t_0 + \Delta t$, calcular α y δ

b) Actualizar Ω y ω: $\Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega}\,\Delta t$ $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega_0} + \boldsymbol{\omega}\Delta t$

c) Encontrar $\{\boldsymbol{r}\}_X$ usando *sv_from_coe.m* (Esta función calcula el vector de estado (r,v) a partir de los elementos orbitales clásicos (coe))

d) Encontrar $\{\boldsymbol{r}\}_{x'}$ usando las ecuaciones

$$[R_3(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \theta = \omega_T(t - t_0)$$

$$\{\boldsymbol{r}\}_{x'} = [R_3(\theta)]\{\boldsymbol{r}\}_X$$

GROUND TRACK

3) En el tiempo $t = t_0 + \Delta t$, calcular α y δ

d) Utilizar el *ra_and_dec_from_r.m* para calcular α y δ a partir de $\{\boldsymbol{r}\}_{x'}$. Esta función calcula la ascensión recta y la declinación a partir del vector de posición ecuatorial geocéntrico.

$$\delta = \sin^{-1}\frac{Z}{r}$$

$$\alpha = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\dfrac{\left(\frac{X}{r}\right)}{\cos\delta}\right) & si\ \dfrac{Y}{r} > 0 \\ 360 - \cos^{-1}\left(\dfrac{\left(\frac{X}{r}\right)}{\cos\delta}\right) & si\ \dfrac{Y}{r} \leq 0 \end{cases}$$

4) Repetir el Paso 3 para tiempos adicionales ($t = t_0 + 2\Delta t, t = t_0 + 3\Delta t,\ etc.$)