UTN HAEDO

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

FACULTAD REGIONAL HAEDO

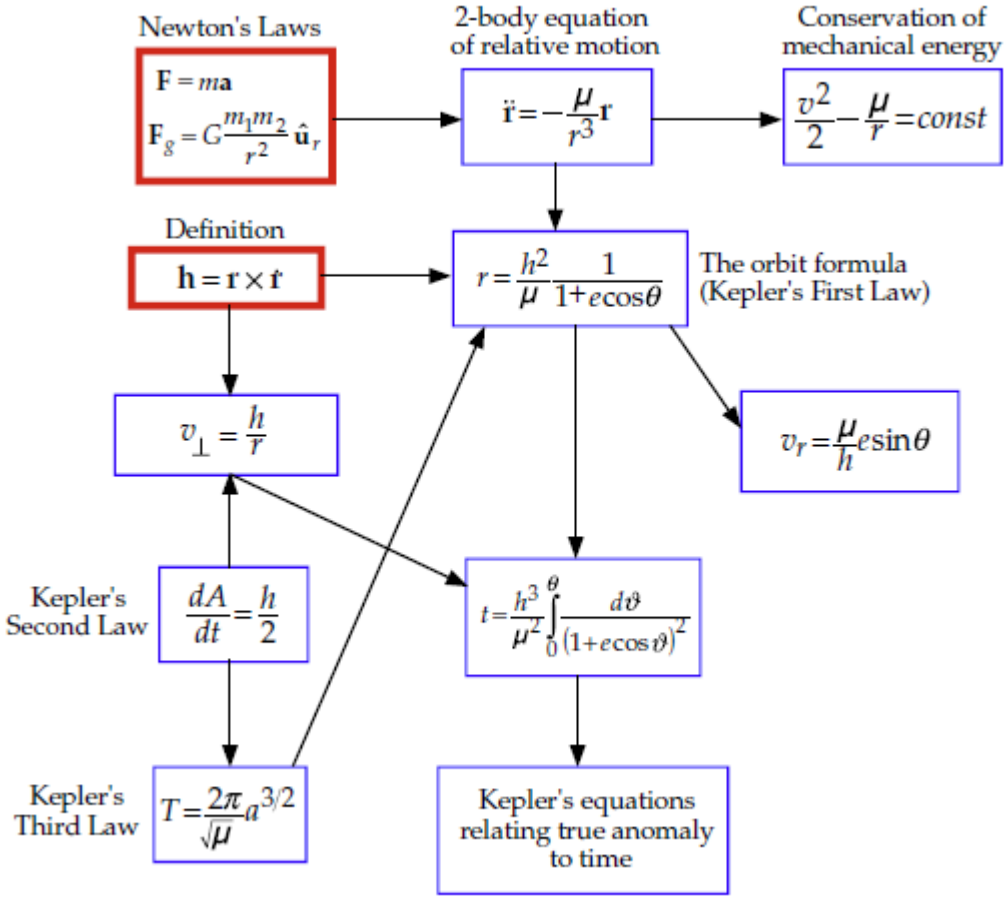
MECÁNICA ORBITAL

EL PROBLEMA DE KEPLER

Introducción

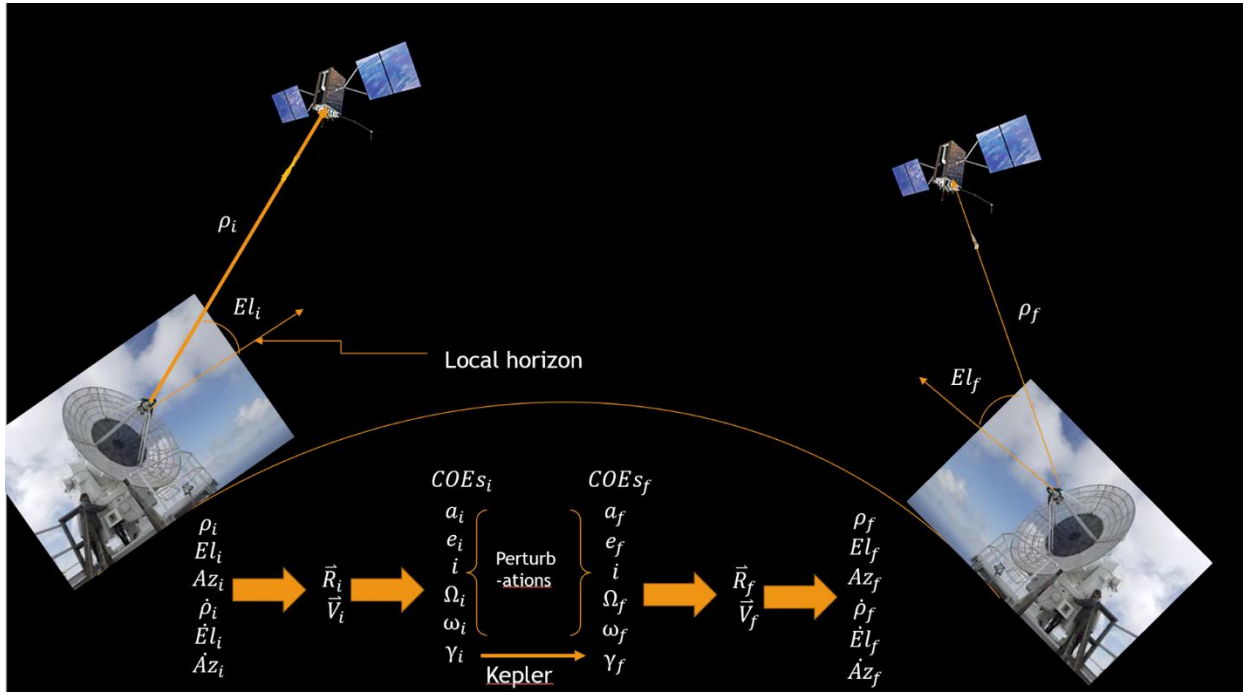
Anteriormente encontramos la relación entre la **posición** y la **anomalía verdadera** para el problema de dos cuerpos. La única instancia en la que el **tiempo** aparecía de manera explícita era en la expresión del **período de una elipse**.

Obtener la posición como función del tiempo es un procedimiento sencillo en el caso de **órbitas circulares**. Sin embargo, para trayectorias **elípticas**, **parabólicas** e **hiperbólicas**, se requiere recurrir a las distintas formas de la **ecuación de Kepler**, que relaciona la posición con el tiempo. Estas ecuaciones trascendentales deben resolverse de manera **iterativa**, empleando un procedimiento como el **método de Newton**.



Introducción

Aprendimos a calcular los elementos orbitales clásicos, COE, utilizando un vector de posición y velocidad. Como se ve en la imagen, uno de los siguientes pasos es pasar de un conjunto inicial de COE a un conjunto final



Introducción

Hay algunas perturbaciones que afectan a la mayoría de nuestros COE, pero en lo que nos estamos centrando en este capítulo es en relacionar la anomalía verdadera inicial, θ_i , el tiempo de vuelo, TOF, y la anomalía verdadera final, θ_f . **Este problema se puede resolver de dos maneras. La primera es determinar el tiempo que tarda un objeto en órbita en viajar de una posición a otra (tiempo de vuelo). La segunda parte es determinar dónde estará un objeto después de un tiempo de vuelo desde una posición inicial dada.**

Tiempo desde la periapsis

La ecuación de orbita $r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1+e\cos\theta}$ da la posición del cuerpo $\boldsymbol{m_2}$ en su órbita alrededor de $\boldsymbol{m_1}$ como función de la **anomalía verdadera.** Por diversas razones prácticas, necesitamos poder determinar la posición de $\boldsymbol{m_2}$ como función del **tiempo**. Para las **órbitas elípticas**, disponemos de una fórmula para el **período $\boldsymbol{T}$,** $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2}$, pero todavía no podemos calcular el **tiempo necesario para desplazarse entre dos anomalías verdaderas cualesquiera**

La única ecuación que relaciona directamente la anomalía verdadera con el tiempo es $h = r^2\,\dot{\theta}$, la cual puede escribirse como $\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}$ Sustituyendo en la ecuación de orbita y separando variables:

$$\frac{\mu^2}{h^3} dt = \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

Tiempo desde la periapsis

Integrando

$$\frac{\mu^2}{h^3}(t - t_p) = \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{(1 + e\cos\theta)^2}$$

t_p tiempo de paso por el periapsis, suele tomarse como el instante incial, es decir igual a 0

El integral del lado derecho puede encontrarse en cualquier manual matemático estándar, como **Zwillinger (2018)**, donde se muestra que:

$$\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^2} = \frac{1}{(a^2-b^2)^{3/2}}\left[2a\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right) - \frac{b\sqrt{a^2-b^2}\sin x}{a+b\cos x}\right] \quad (b<a) \qquad e < 1\ elipses$$

$$\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^2} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{6}\tan^3\frac{x}{2}\right) \quad (b=a) \qquad e = 1\ parabolas$$

$$\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^2} = \frac{1}{(b^2-a^2)^{3/2}}\left[\frac{b\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x} - a\ln\left(\frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a}\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\right] \quad (b>a) \qquad e > 1\ hiperbolas$$

Anomalía Media

$$\frac{\mu^2}{h^3}(t - t_p) = \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{(1 + e\cos\theta)^2}$$

$$\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^2} = \frac{1}{(a^2-b^2)^{3/2}}\left[2a\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right) - \frac{b\sqrt{a^2-b^2}\sin x}{a+b\cos x}\right] \quad (b<a)$$

$$a = 1, b = e$$

$$\int_0^{\theta} \frac{d\vartheta}{(1+e\cos\vartheta)^2} = \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}}\left[2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right) - \frac{e\sqrt{1-e^2}\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right]$$

$$\frac{\mu^2}{h^3}t = \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}}\left[2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right) - \frac{e\sqrt{1-e^2}\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right]$$

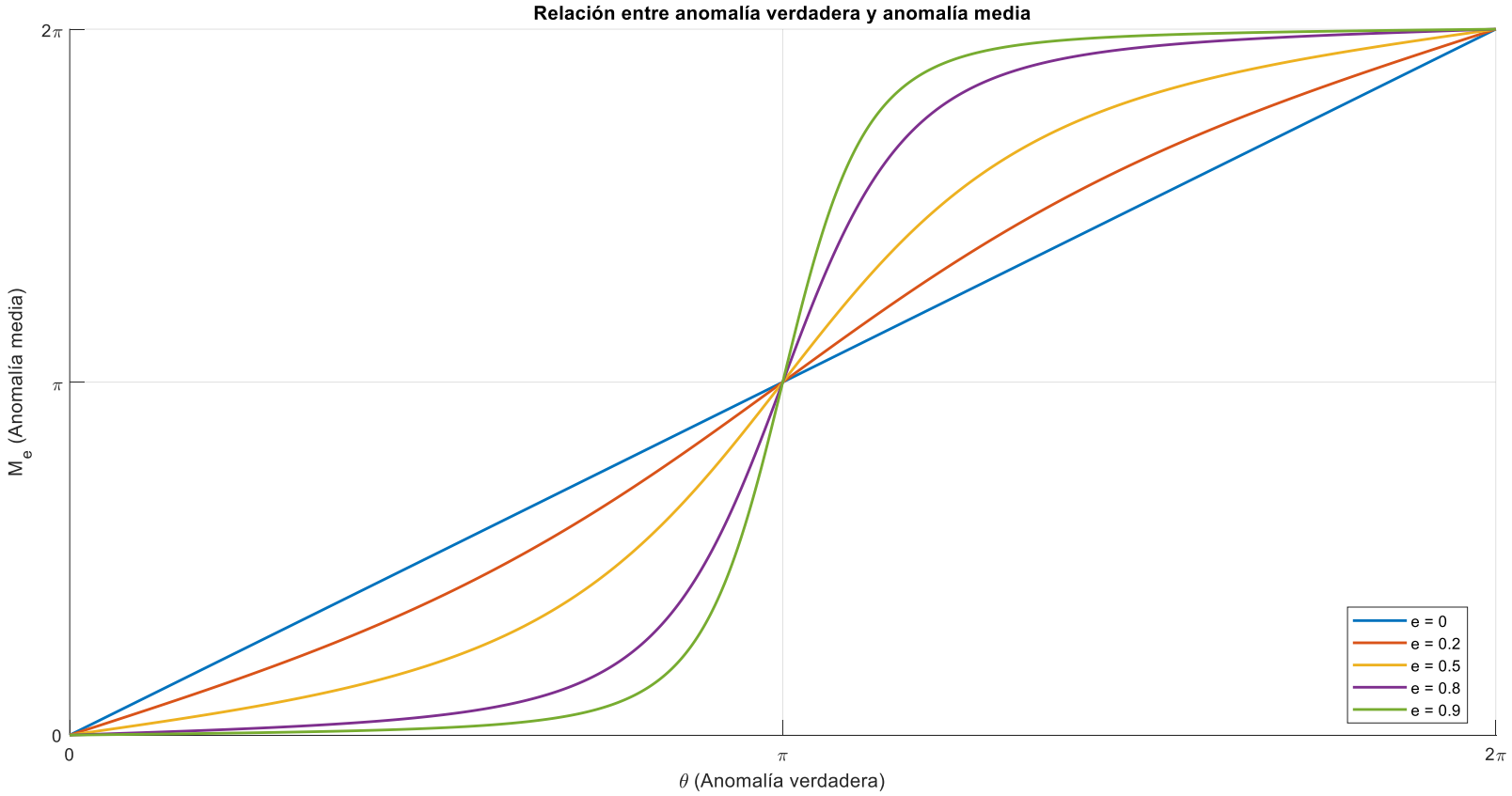
$$M_e = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right) - \frac{e\sqrt{1-e^2}\sin\theta}{1+e\cos\theta}$$

$$M_e = \frac{\mu^2}{h^3}(1-e^2)^{3/2}t$$

Anomalía Media

$$M_e = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right) - \frac{e\sqrt{1-e^2}\sin\theta}{1+e\cos\theta}$$

$$M_e = \frac{\mu^2}{h^3}\left(1-e^2\right)^{3/2} t$$



Anomalía Media

```
%% LIMPIEZA
close all; clear; clc;
%% DATOS DE ENTRADA
e_vec = [0 0.2 0.5 0.8 0.9]; % Excentricidades a representar.
theta = linspace(0, 2*pi, 1000); % Vector de anomalía verdadera.

%% CÁLCULOS
Me_vec = zeros(length(e_vec), length(theta)); %Genero Me como
vector de ceros.
for k = 1:length(e_vec) % Recorrido de los diferentes e
        e = e_vec(k); % Selección de la excentricidad
        % Cálculo de la anomalía media
        Me = 2*atan(sqrt((1-e)/(1+e)).*tan(theta/2)) ...
        - (e*sqrt(1-e^2).*sin(theta)) ...
        ./ (1 + e*cos(theta));
        % Ajuste de la anomalía media al intervalo [0, 2*pi].
        Me(Me < 0) = Me(Me < 0) + 2*pi;
        Me_vec(k,:) = Me; % Asignación de valor
end
```

```
%% REPRESENTACIÓN GRÁFICA
figure; hold on; grid on
for k = 1:length(e_vec)
plot(theta, Me_vec(k,:), 'LineWidth', 1.5)
end


% Configuración de la figura
title('Relación entre anomalía verdadera y anomalía media')
xlabel('\theta (Anomalía verdadera)')
ylabel('M_e (Anomalía media)')
legend('e = 0', 'e = 0.2', 'e = 0.5', 'e = 0.8', 'e = 0.9', ...
'Location', 'best')
xlim([0 2*pi])
ylim([0 2*pi])
% Marcas principales
xticks([0 pi 2*pi]); xticklabels({'0', '\pi', '2\pi'})
yticks([0 pi 2*pi]); yticklabels({'0', '\pi', '2\pi'})
```

Movimiento medio

A partir de a expresión para el periodo T de una orbita elíptica:

$$\frac{\mu^2(1-e^2)^{3/2}}{h^3} = \frac{2\pi}{T}$$

por lo que la anomalía media puede escribirse de una forma mucho más sencilla como

$$\boxed{M_e = \frac{2\pi}{T}t}$$

Es decir, la anomalía media aumenta linealmente con el tiempo, con una velocidad angular media igual a

$$n = \frac{2\pi}{T}.$$

Movimiento medio

La velocidad angular del vector posición de una órbita elíptica no es constante. Sin embargo, dado que durante un período T se recorren 2π radianes, la razón $\frac{2\pi}{T}$ representa la velocidad angular media, que se denomina movimiento medio y se simboliza con la letra n

$$n = \frac{2\pi}{T}$$

$$M_e = \frac{2\pi}{T}t \longrightarrow M_e = nt$$

La anomalía media es la posición azimutal (en radianes) de un cuerpo ficticio que se mueve alrededor de la elipse con una velocidad angular constante n. Para una órbita circular, la anomalía media M_e y la anomalía verdadera θ son idénticas.

Movimiento medio

Los **objetos en órbitas circulares** poseen una **velocidad angular constante**, por lo que el **tiempo de vuelo** y la **distancia recorrida** pueden calcularse con facilidad. Sin embargo, la **velocidad angular del vector de posición** de una **órbita elíptica no es constante**. Para simplificar estos cálculos, se introduce una nueva variable denominada **movimiento medio**, representada con el símbolo n.

El **movimiento medio** es la **velocidad angular promedio** (en radianes por segundo) de un objeto en órbita, ya sea circular o elíptica. Dado que en una órbita elíptica se recorren $\boldsymbol{2\pi}$ **radianes por período** $\boldsymbol{T}$, el cociente $2\pi/T$ representa precisamente esa **velocidad angular promedio**, la cual se denomina **movimiento medio** y se expresa como

$$n = \frac{2\pi}{T}$$

Recordemos que para una orbita elíptica $T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$, por lo que

$$n = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

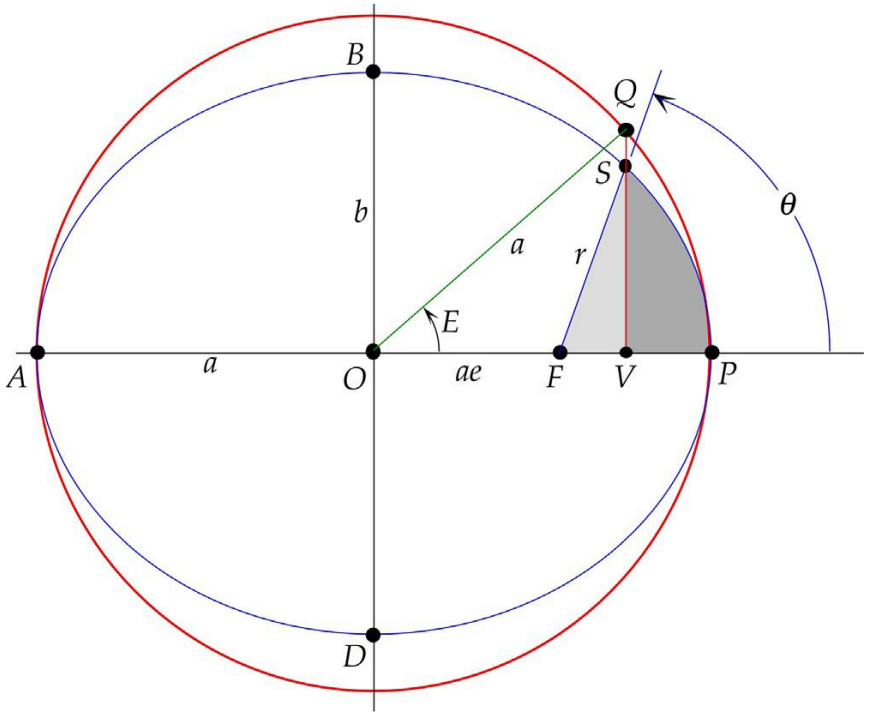
Nota: en orbita circular $R = a$

Anomalía excéntrica

Es conveniente simplificar la ecuación de la anomalia media

$$M_e = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right) - \frac{e\sqrt{1-e^2}\sin\theta}{1+e\cos\theta}$$

introduciendo un ángulo auxiliar E, denominado anomalía excéntrica. Esto se realiza circunscribiendo la elipse con un círculo auxiliar concéntrico, cuyo radio es igual al semieje mayor $a$de la elipse. Sea S el punto de la elipse cuya anomalía verdadera es θ. Por el punto S, se traza una perpendicular a la línea de los ápsides, que intersecta al círculo auxiliar en el punto Q y a la línea de los ápsides en el punto V. El ángulo comprendido entre la línea de los ápsides y el radio trazado desde el centro del círculo hasta Q se denomina anomalía excéntrica E.



Anomalía excéntrica

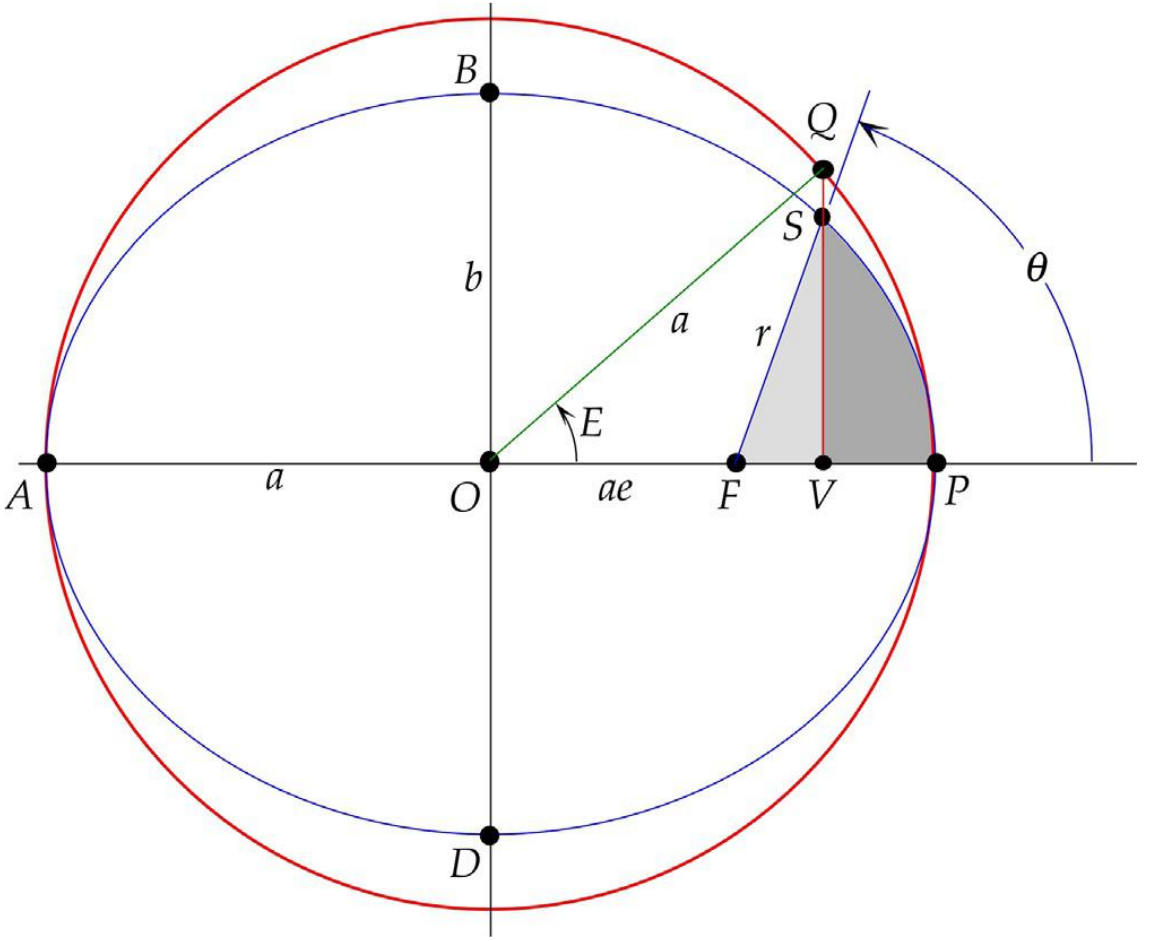
Para encontrar E como función de θ, observemos la imagen que en términos de anomalía excéntrica $\overline{OV} = a\cos E$, mientras que, en términos de anomalía verdadera $\overline{OV} = a\,e + r\cos\theta$. Por lo tanto,

$$a\cos E = a\,e + r\cos\theta$$

Recordando la ecuación de orbita $r = a\,\frac{1-e^2}{1+e\cos\theta}$,

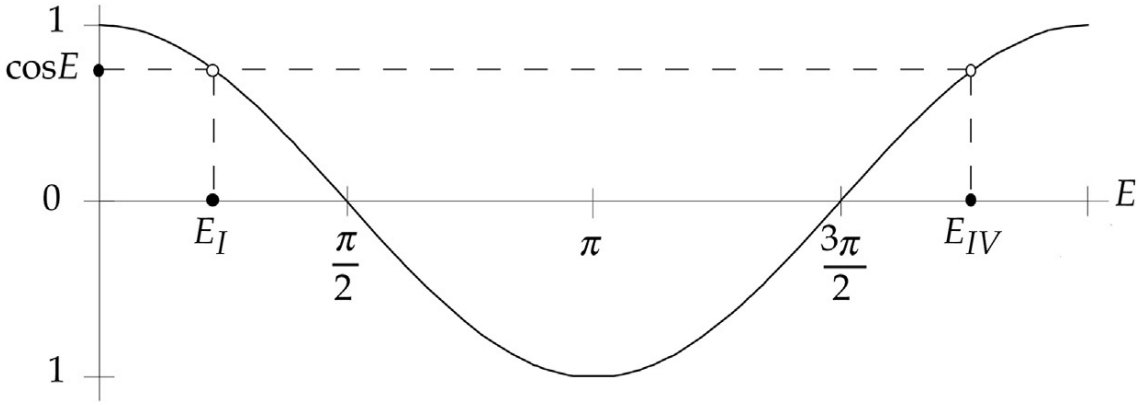
$$a\cos E = a\,e + a\,\frac{1-e^2}{1+e\cos\theta}\cos\theta$$

$$\cos E = \frac{e+\cos\theta}{1+e\cos\theta} \qquad o\ la\ inversa \qquad \cos\theta = \frac{e-\cos E}{e\cos E - 1}$$



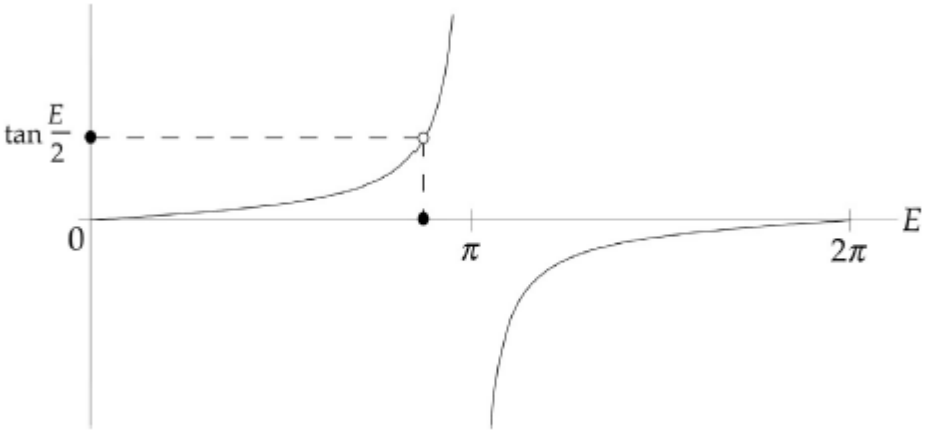
Anomalía excéntrica

La ecuación anterior presenta una ambiedad, ya que dado un valor de $\cos E$ comprendido entre -1 y 1, existen dos valores posibles entre 0º y 360º



Usando la identidad trigonométrica $\sin^2 E + \cos^2 E = 1$, se puede resolver para $\sin E$

$$\sin E = \frac{\sqrt{1-e^2}\,\sin\theta}{1+e\cos\theta}$$



Para resolver esta ambigüedad de cuadrante, utilizamos la siguiente identidad trigonométrica:

$$\tan^2\frac{E}{2} = \frac{\sin^2(E/2)}{\cos^2(E/2)} = \frac{1-\cos E}{1+\cos E}$$

Anomalía excéntrica

$$\tan^2 \frac{E}{2} = \frac{\sin^2(E/2)}{\cos^2(E/2)} = \frac{1-\cos E}{1+\cos E}$$

$$1-\cos E = \frac{1-\cos\theta}{1+e\cos\theta}(1-e) \quad \text{y} \quad 1+\cos E = \frac{1+\cos\theta}{1+e\cos\theta}(1+e)$$

$$\tan^2 \frac{E}{2} = \frac{1-e}{1+e}\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-e}{1+e}\tan^2\frac{\theta}{2}$$

$$\tan\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}$$

$$E = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

Ecuación de Kepler

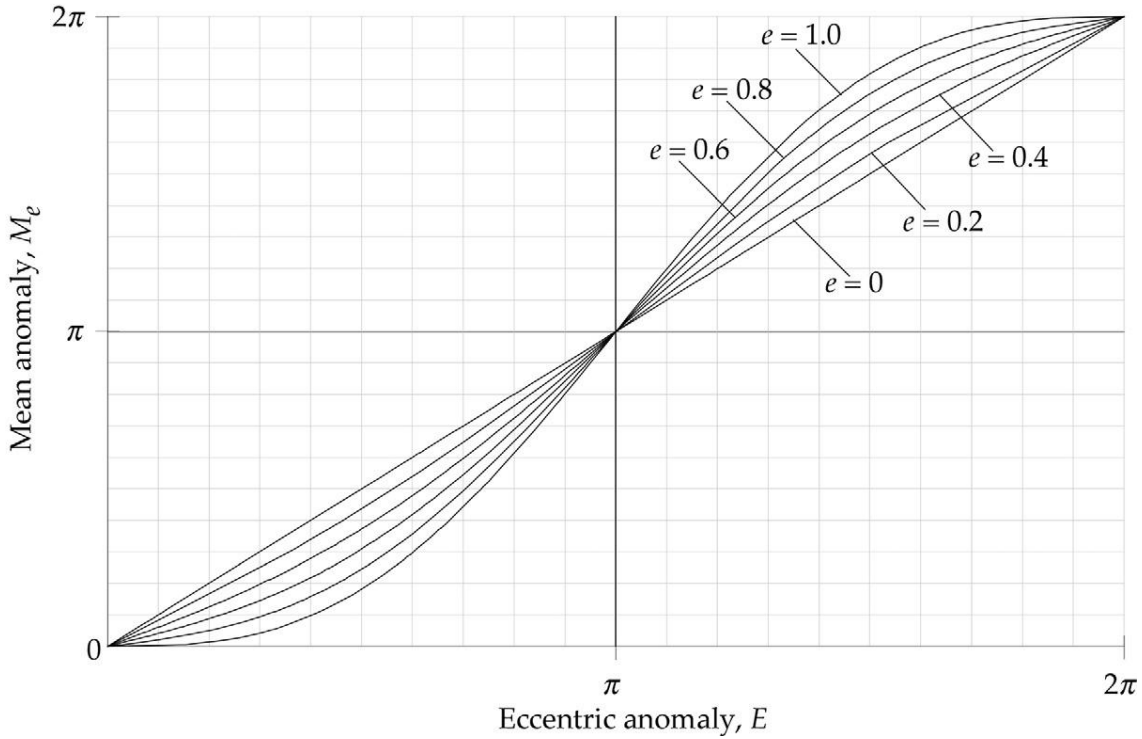
$$\sin E = \frac{\sqrt{1-e^2}\,\sin\theta}{1+e\cos\theta}$$

$$E = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

$$M_e = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right) - \frac{e\sqrt{1-e^2}\sin\theta}{1+e\cos\theta}$$

Ecuación de Kepler

$$M_e = E - e\sin E$$



1er Problema

Dada la anomalía verdadera θ, calculamos la anomalía excéntrica E usando la

$$E = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

Sustituyendo E en la fórmula de Kepler:

$$M_e = E - e\sin E$$

, se obtiene directamente la anomalía media. A partir de la anomalía media y del período T, encontramos el tiempo transcurrido desde el periapsis mediante:,

$$t = \frac{M_e}{2\pi}T$$

2do Problema

Por otro lado, si se nos proporciona el tiempo, entonces

$$t = \frac{M_e}{2\pi} T$$

permite obtener la anomalía media Me. Sustituyendo Me en la ecuación de Kepler, obtenemos la siguiente expresión para la anomalía excéntrica:

$$E - e \sin E = M_e$$

2do Problema

Ahora debemos calcular la anomalía excéntrica final. Como observará, la siguiente ecuación tiene la variable E_f tanto sola como dentro de una función seno.

$$E_f = M_f + e \sin E_f$$

Llamamos a este tipo de ecuación una **ecuación trascendental** porque no podemos resolverla analíticamente, por lo que tendremos que recurrir a un enfoque numérico.

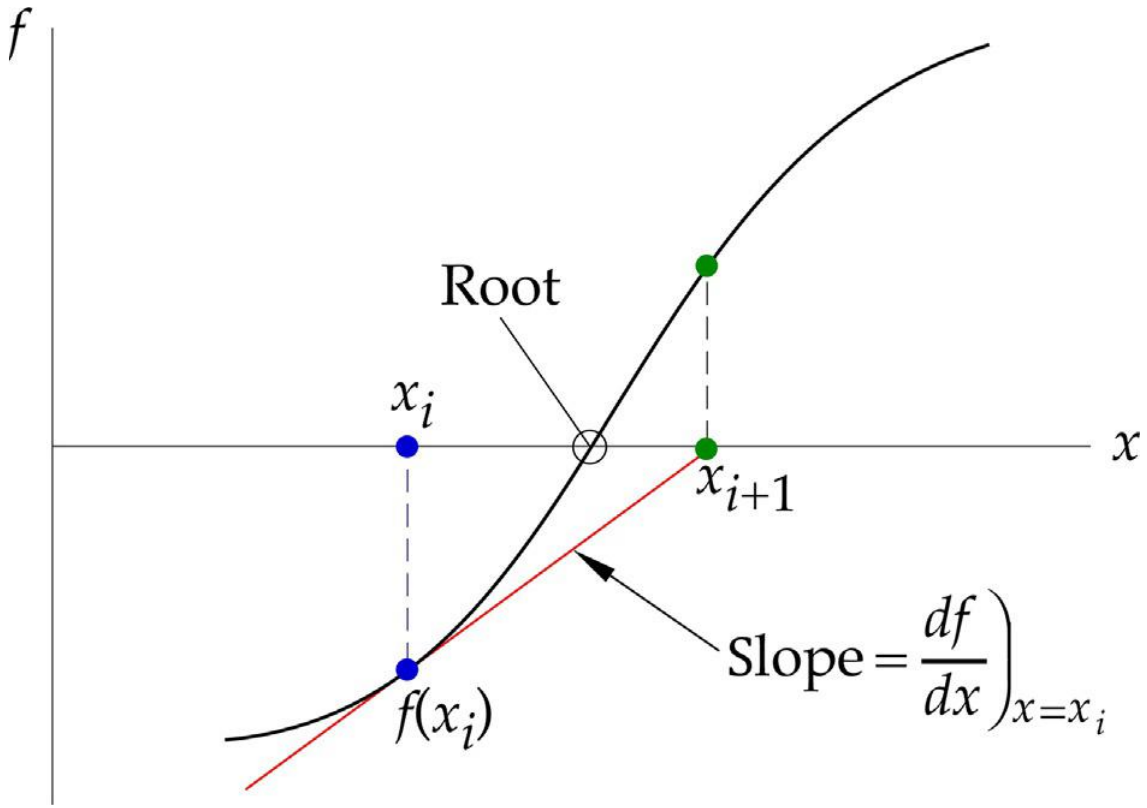
Método de Newton

El método de Newton, o alguna de sus variantes, es una de las formas más comunes y eficientes de encontrar la raíz de una función.

Para hallar una raíz de la ecuación $f(x) = 0$, se estima inicialmente que esta se encuentra en x_i y se evalúan la función $f(x)$ y su primera derivada $f'(x)$ en ese punto.

Luego, se extiende la tangente a la curva en $f(xi)$ hasta que interseca el eje x en x_{i+1}, que se convierte en nuestra nueva estimación de la raíz. La intersección x_{i+1} se obtiene igualando la pendiente de la línea tangente con la pendiente de la curva en x_i ; es decir:

$$f'(x_i) = \frac{0 - f(xi)}{x_{i+1} - x_i} \rightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{f(xi)}{f'(x_i)}$$



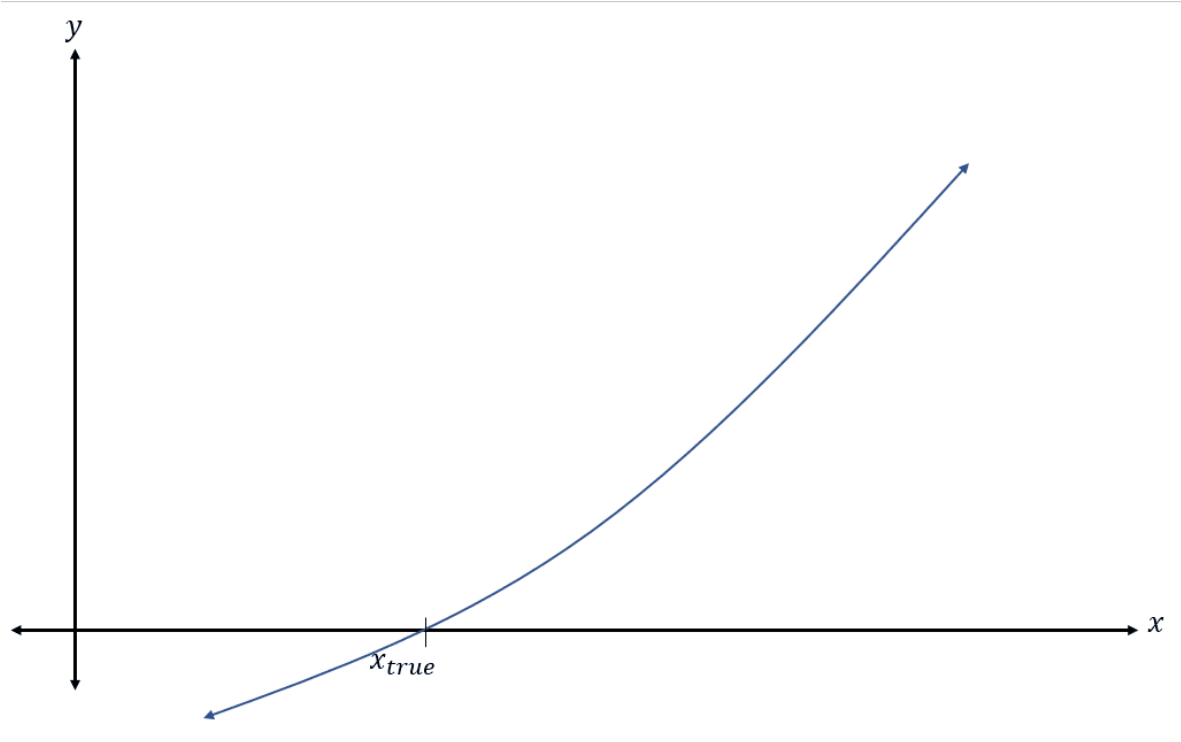
Método de Newton

El método de Newton, o alguna de sus variantes, es una de las formas más comunes y eficientes de encontrar la raíz de una función.

Para hallar una raíz de la ecuación $f(x) = 0$, se estima inicialmente que esta se encuentra en x_i y se evalúan la función $f(x)$ y su primera derivada $f'(x)$ en ese punto.

Luego, se extiende la tangente a la curva en $f(xi)$ hasta que interseca el eje x en x_{i+1}, que se convierte en nuestra nueva estimación de la raíz. La intersección x_{i+1} se obtiene igualando la pendiente de la línea tangente con la pendiente de la curva en x_i ; es decir:

$$f'(x_i) = \frac{0 - f(xi)}{x_{i+1} - x_i} \rightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{f(xi)}{f'(x_i)}$$



Método de Newton

El proceso se repite, utilizando x_{i+1} para estimar x_{i+2}, y así sucesivamente, hasta que la raíz se haya encontrado con el nivel de precisión deseado.

Para aplicar el método de Newton a la resolución de la ecuación de Kepler, se forma la función

$$f(E) = E - e \sin E - M_e$$

y se busca el valor de la anomalía excéntrica que haga $f(E) = 0$. Dado que

$$f'(E) = 1 - e \cos E$$

El método de Newton se expresa como

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(xi)}{f'(x_i)} \rightarrow E_{i+1} = E_i - \frac{E_i - e \sin E - M_e}{f'(x_i)}$$

2do Problema

Como resolver la **ecuación de Kepler** para la **anomalía excéntrica** E, dadas la **excentricidad** ey la **anomalía media** M_e.

1. Elegir una estimación inicial de la raíz E de la siguiente manera
    1. Si $M_e < \pi$, entonces $E = M_e + e/2$.
    2. Si $M_e > \pi$, entonces $E = M_e - e/2$.

Recordar que los ángulos E y M_e están en radianes

2. En cualquier paso dado, habiendo obtenido E_i del paso anterior, calcular $f(E_i) = E_i - e \sin E_i - M_e$ y $f'(E_i) = 1 - e\, cos\, E_i$
3. Calcular la relación $\text{ratio}_\text{i} = \frac{f(E_i)}{f'(E_i)}$
4. Si la relación $|\text{ratio}_\text{i}|$ excede la tolerancia elegida (por ejemplo 10^{-8}) entonces se calcula un nuevo valor para E, $E_{i+1} = E_i - \text{ratio}_\text{i}$, y regresamos al paso 2
5. Si la relación $|\text{ratio}_\text{i}|$ es menor que la tolerancia elegida, se acepta E_i como la **solución** dentro del nivel de precisión elegido.

Método de Newton en Matlab

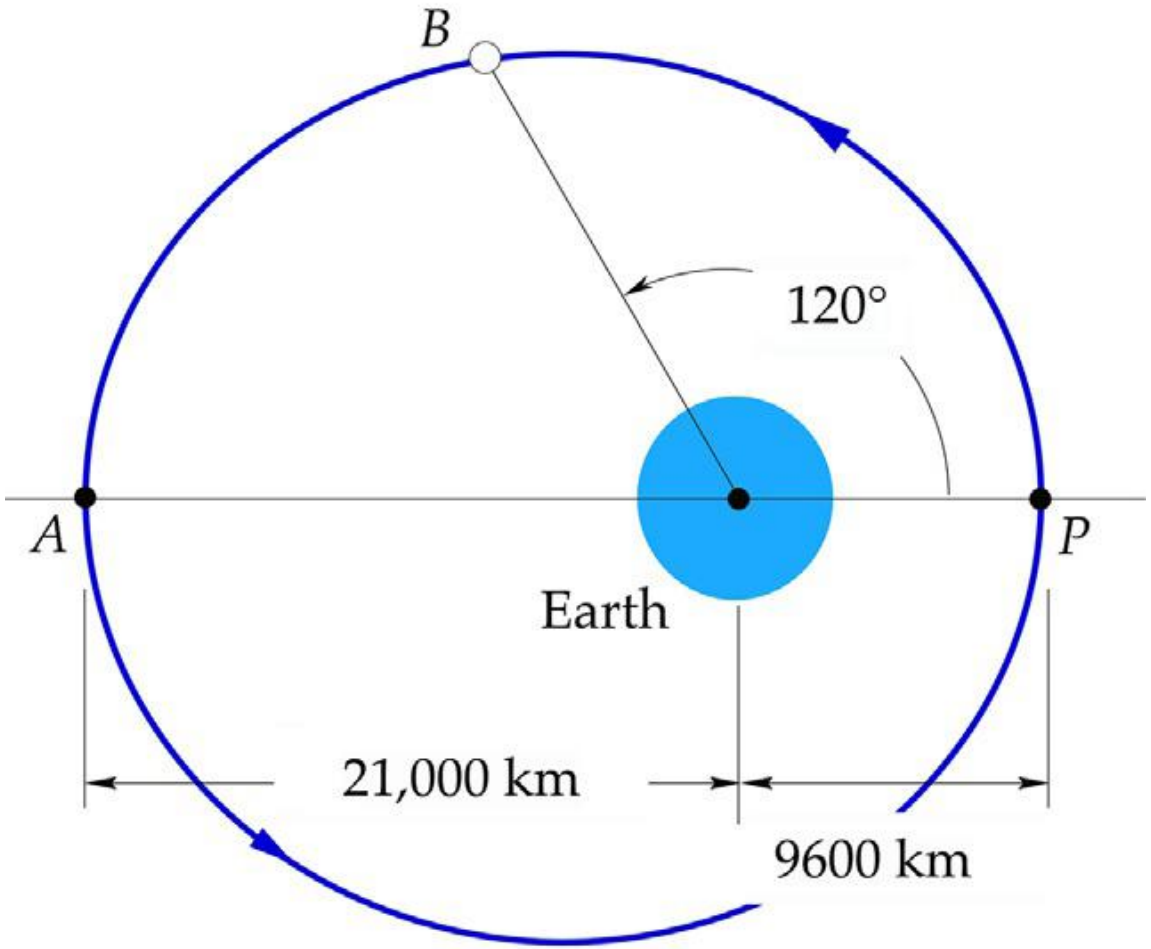
Codificando en Matlab, el método de Newton aplicado a Kepler

```
function E = kepler_E(e, M)
% ————————————————————————————————
%% Notas aclaratorias
% Esta funcion utiliza el metodo de Newton para resolver la ecuacion de
% Kepler E - e*sin(E) = M para obtener la anomalia excentrica a partir de
% la anomalia media
% Variables utilizadas:
% E - Anomalia excentrica (radianes)
% e - excentricidad
% M - anomalia media (radianes)
% pi - 3.1415926...
% Función M del usuario requerida: ninguna
% ————————————————————————————————
% Tolerancia
tolerance = 1.e-8;
% Seleccion de valor inicial de E
if M < pi
        E = M + e/2;
else
        E = M - e/2;
end
% Iteracion hasta que E se encuentre dentro de la tolerancia
ratio = 1;
while abs(ratio) > tolerance
        ratio = (E - e*sin(E) - M) / (1 - e*cos(E));
        E = E - ratio;
end
end %kepler_E
```

Ejercicio

Una orbita geocéntrica elíptica tiene un radio de perigeo de 9600 km y un radio de apogeo de 21000 km.

- Calcular el tiempo de vuelo desde el perigeo a la anomalía verdadera de 120º
- Encontrar la anomalía verdadera a 3hs del pasaje sobre el perigeo



Ejercicio

Primero calculamos la excentricidad y el momento angular especifico:

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = \frac{21000 - 9600}{21000 + 9600} \rightarrow \boxed{e = 0{,}37255}$$

$$r = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1 + e\cos\theta} \rightarrow 9600 = \frac{h^2}{398600}\frac{1}{1 + 0{,}37255\cos 0} \rightarrow \boxed{h = 72472\frac{km^2}{s}}$$

Ahora podemos calcular el periodo orbital

$$T = \frac{2\pi}{\mu^2}\left(\frac{h}{\sqrt{1 - e^2}}\right)^3 = \frac{2\pi}{398600^2}\left(\frac{72472}{\sqrt{1 - 0{,}37255^2}}\right)^3 \rightarrow \boxed{T = 18834\ s}$$

Podemos encontrar la anomalía excéntrica sin ambigüedad de cuadrante como:

$$E = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}\tan\frac{\theta}{2}\right) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1 - 0{,}37255}{1 + 0{,}37255}}\tan\frac{120}{2}\right) \rightarrow \boxed{E = 1{,}7281\ rad}$$

Ejercicio

Con la ecuación de Kepler encontramos la anomalía media

$$M_e = E - e \sin E = 1{,}7281 - 0{,}37255 \sin 1{,}7281 \rightarrow \boxed{M_e = 1{,}3601\, rad}$$

Finalmente podemos encontrar el tiempo

$$t = \frac{M_e}{2\pi} T = \frac{1{,}3601}{2\pi} 18834 \rightarrow \boxed{t = 4077s\ (1{,}132h)}$$

Ejercicio

Para la segunda parte del ejercicio, nos pide calcular la anomalia verdadera 3horas después de pasar por el perigeo

$$TOF = 3h = 10800\ s$$

Ahora calculamos la anomalía media

$$t = \frac{M_e}{2\pi} T \rightarrow M_e = 2\pi \frac{t}{T} = 2\pi \frac{10800}{18830} \rightarrow \boxed{M_e = 3{,}6029\ rad}$$

Ahora con la ecuación de Kepler calculamos el estadio final

$$E_f = M_f + e \sin E_f$$

Debemos usar el algoritmo de resolución visto anteriormente y tomaremos una toleracióna de 10^{-6}. Como Si $M_e > \pi$, entonces $E_0 = M_e - \frac{e}{2} = 3{,}4166$.

Ejercicio

Step 1:

$$
\begin{aligned}
E_0 &= 3.4166 \\
f(E_0) &= -0.085124 \\
f'(E_0) &= 1.3585 \\
\text{ratio} &= \frac{-0.085124}{1.3585} = -0.062658 \\
|\text{ratio}| &> 10^{-6} \qquad \therefore \text{ repeat}
\end{aligned}
$$

Step 2:

$$
\begin{aligned}
E_1 &= 3.4166 - (-0.062658) = 3.4793 \\
f(E_1) &= -0.0002134 \\
f'(E_1) &= 1.3515 \\
\text{ratio} &= \frac{-0.0002134}{1.3515} = -1.5778 \times 10^{-4} \\
|\text{ratio}| &> 10^{-6} \qquad \therefore \text{repeat}
\end{aligned}
$$

Step 3:

$$
\begin{aligned}
E_2 &= 3.4793 - \left(-1.5778 \times 10^{-4}\right) = 3.4794 \\
f(E_2) &= -1.5366 \times 10^{-9} \\
f'(E_2) &= 1.3515 \\
\text{ratio} &= \frac{-1.5366 \times 10^{-9}}{1.3515} = -1.137 \times 10^{-9} \\
|\text{ratio}| &< 10^{-6} \qquad \therefore \text{stop}
\end{aligned}
$$

La convergencia —aún superior a la precisión deseada— se logró después de solo **dos iteraciones**.

Con $E = 3.4794$, la **anomalía verdadera** resulta:

$$\tan\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1+0.37255}{1-0.37255}}\tan\frac{3.4794}{2} = -8.6721 \Rightarrow \boxed{\theta = 193.2^\circ}$$

Ejercicio

Resuelto en Matlab