EJERCICIOS PARA REPASAR – PARCIAL U3-U4

1) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función. Usar definición de continuidad y derivabilidad en un punto

$$f(x = \begin{cases} \frac{1}{3}|x+3| & si \ -5 \leq x \leq -1 \\ \frac{x+1}{x-2} & si \ -1 < x \leq 4 \end{cases}$$

Rta: Continua en: $\boxed{[-,52) \cup (2,4]}$**. Derivable en:** $\boxed{(-,5-1) \cup \{-1\} \cup (-,12) \cup (2,4)}$

En $x = 2$: no está definida, por lo tanto, no es derivable.

2) Determinar b tal que la recta tangente a la función h(x) = $\frac{2bx+3}{x-4}$ en el punto de intersección con el eje de ordenadas, sea paralela a la recta y = $-\frac{5}{3}x + 1$. Hallar la ecuación de dicha recta tangente.

Rta: $b = 1; y = -\frac{5}{3}x - \frac{3}{4}$

3) Encontrar la aproximación lineal de la función $y = \ ln\ (x+2)$ en a=0 y utilizar para hallar la aproximación de ln (2,01). Acotar el error cometido.

Rta: $P(x) = \ln(2) + \frac{1}{2}x$; $\ln(2,01) = \ln(2) + 0,005 \approx 0,698147$;$R_1 < 1,25 \times 10^{-5}$

4)Determina los puntos de la curva $x^2 - xy + y^2$=27 en los que la tangente es horizontal, y aquellos en los cuales la tangente es vertical.

Rta: Tangentes horizontales: Puntos $(3,6)$ y $(-3,-6)$; Tangentes verticales: Puntos $(6,3)$ y $(-6,-3)$

5)Un proyectil es lanzado verticalmente hacia arriba desde una altura de 5 metros con una velocidad inicial de 20 m /seg. Entonces la función que describe su posición es:

s(t)= $15 + 20t - 4.9\ t^{2;}$ siendo s(t) la altura o distancia recorrida al tiempo t segundos.

- **a)** ¿Cuál es la velocidad media entre los 2 seg y 4 seg?
- **b)** ¿A que rapidez varia la posición con respecto al tiempo a los 3seg? ¿Qué altura alcanza en ese tiempo? **Aplicar definición de derivada de una función o en punto**

Rta: Velocidad media ($t \in [2,4]$): $-9,4$ m/s; A los $t = 3$ s; Rapidez/Velocidad instantánea: $s'(3) = -9,4$ m/s; Altura alcanzada: $s(3) = 30,9$ m

6) Sea f definida en el intervalo (0,5) y derivable hasta el orden 3, tal que su polinomio de Taylor en $x = 1$ es $P(x) = \ 4 + 8(x-1) + 2\,(x-1)^2$.Determinar el polinomio de Taylor de orden 2 de $h(x) = \sqrt{f(2x)}$ en $x = \frac{1}{2}$

Rta: $\boldsymbol{P_2(x) = 4 + 16\left(x - \frac{1}{2}\right) + 8\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$

7) Sea $\boldsymbol{p(x) = e^{(64x^2-1)} - 4x^2.[f(2x)]^2}$ con $\boldsymbol{f}$ continua y derivable en R. Se sabe que la recta $\boldsymbol{y + \frac{3}{8} = -\frac{1}{2}x}$ es la ecuación de la recta normal a $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x_0 = \frac{1}{4}}$. Calcular la ecuación de la recta tangente a $\boldsymbol{p(x)}$ en $\boldsymbol{x_1 = \frac{1}{8}}$

Rta: $\boldsymbol{y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{16}}$

8) Sea q una función biyectiva, derivable y su recta tangente en $x = \frac{5}{6}$ es $y = 6x - 1$. Hallar h' (4) siendo $h(x) = q^{-1}(x).(\frac{1}{2}x^2 - 6)^x$

Rta: $\boldsymbol{h'(4) = \frac{13}{3}}$

9) En el banco de pruebas de un túnel de viento, para ciertos modelos simplificados de respuesta rápida a variaciones del ángulo de ataque x(en radianes) se utiliza la función

$$f(x) = 1 - e^{-x}$$

que modela una respuesta acumulativa normalizada (por ejemplo, fracción de una velocidad límite alcanzada). Para cálculos rápidos y estimaciones se pide:

1. Obtener el polinomio de Taylor de orden 3 de f centrado en $x_0 = 0$ y aproximar f (0.2 = 11, 45º)
2. Usar el **resto de Lagrange** y dar una **cota superior** para | $R_3(0.2)$ | para hallar el error cometido al aproximar la función mediante un polinomio de Taylor.
3. Sabiendo que se requiere una tolerancia del 1% del valor de la función, decidir si el polinomio de Taylor de orden 3 proporciona una aproximación aceptable para f (0,2). Justificar



Sugerencia: comparar la cota del error contra el 1% del valor de la función $\boldsymbol{(0,01 \times 0,1812692 \approx 0,0018127)}$

4. Utilizando el mismo criterio de tolerancia del 1% del valor de la función considerado en el inciso anterior, analizar si el polinomio de Taylor de orden 3 puede emplearse para estimar la fracción de velocidad límite alcanzada cuando x=0,6 rad. Justificar.

Rta: $P_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ **;** $P_3(0,2) = 0,181333$ **; Cota del error con resto de Lagrange:** $R_3(0,2) < 6,67 \times 10^{-5}$ **; Evaluación de tolerancia al 1% en** $x = 0,2$**: Es aceptable. Evaluación de tolerancia al 1% en** $x = 0,6$ **No es aceptable.**

10) Establecer si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsa. Justificar

a) Cuando 0< x<0,01, la función f(x) = e^x se puede remplazar por 1+ x con un error menor a 6.10^{-4}

b) $P(x) = 2 + 5x$ es el polinomio de Mac Laurin de mayor orden que se puede asociar a la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 5x + 2 & si\ x \leq 0 \\ -x^3 + 5x + 2 & si\ x > 0 \end{cases}$$

(Tener presente que hay que probar la derivabilidad en x=0. Usar la definición de derivada en un punto)

c)Si se utiliza la diferencial para aproximar el incremento de la función $f(x) = \sqrt{x}$ al pasar de $x = 100$ a $x = 101$, el valor aproximado resulta ser **mayor** que el incremento real Δy, debido a que la función crece a una tasa cada vez menor.

Rta: Falsa, Verdadero, Falsa