UTN HAEDO

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

FACULTAD REGIONAL HAEDO

MECÁNICA ORBITAL

EL PROBLEMA DE KEPLER

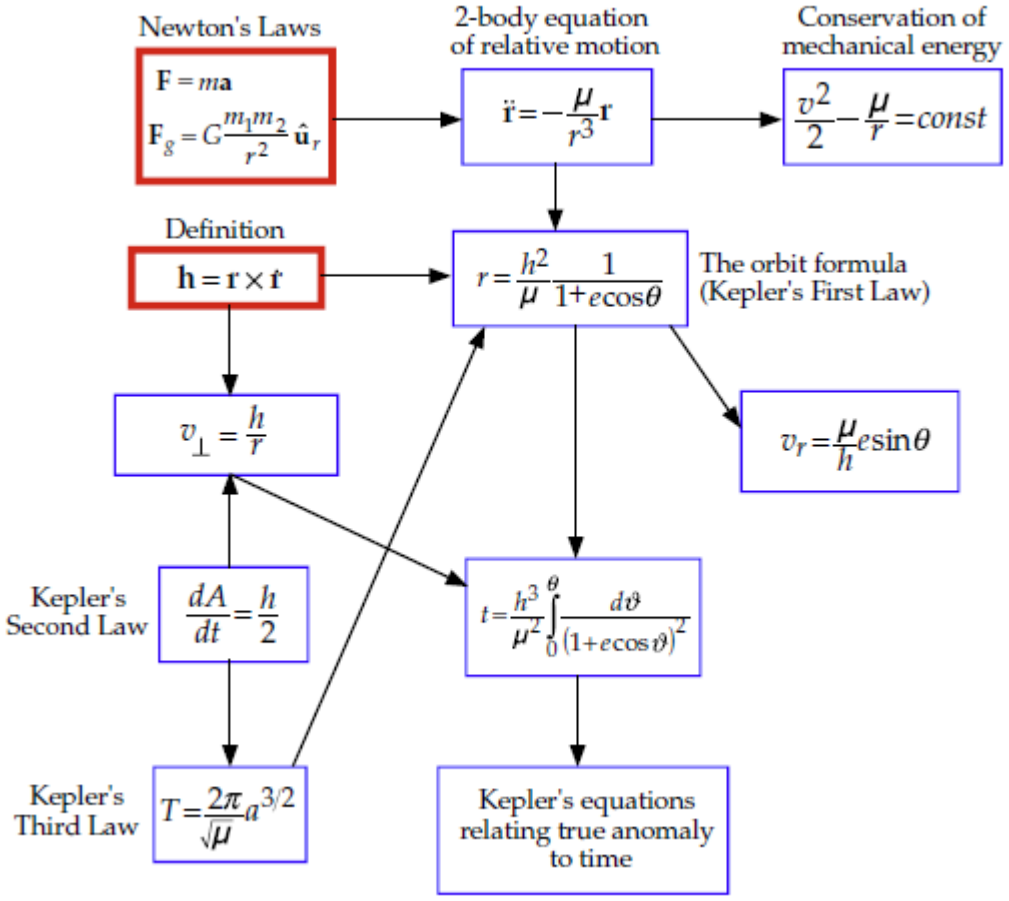
Problema de Kepler

¿Alguna vez has mirado hacia arriba de noche y has visto un punto brillante cruzando el cielo? Ese objeto podría ser un meteoro (estrella fugaz) identificado por una estela detrás. ¡Pero también podría ser un satélite! En este último caso, volverá a pasar por encima de ti algún tiempo después. Sería útil saber cuándo y dónde ocurrirá. Sería especialmente importante si te comunicabas con el satélite durante el tiempo que pasa por encima (tiempo de paso). ***Querrías saber cuándo y dónde apuntar tu antena para el siguiente paso. Quizás quieras saber cuánto tarda un satélite en llegar a un lugar determinado****. Estos dos escenarios conforman el Problema de Predicción de Kepler.*

Introducción

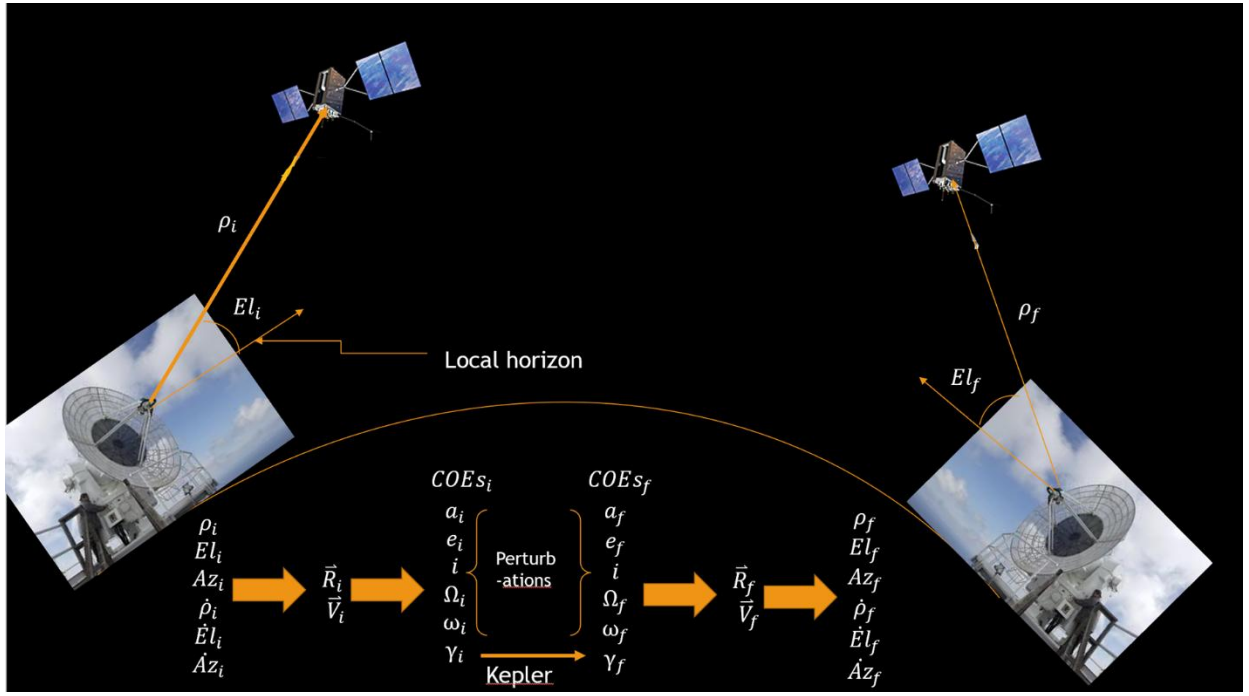
Anteriormente encontramos la relación entre la **posición** y la **anomalía verdadera** para el problema de dos cuerpos. La única instancia en la que el **tiempo** aparecía de manera explícita era en la expresión del **período de una elipse**.

Obtener la posición como función del tiempo es un procedimiento sencillo en el caso de **órbitas circulares**. Sin embargo, para trayectorias **elípticas**, **parabólicas** e **hiperbólicas**, se requiere recurrir a las distintas formas de la **ecuación de Kepler**, que relaciona la posición con el tiempo. Estas ecuaciones trascendentales deben resolverse de manera **iterativa**, empleando un procedimiento como el **método de Newton**.



Introducción

Aprendimos a calcular los elementos orbitales clásicos, COE, utilizando un vector de posición y velocidad. Como se ve en la imagen, uno de los siguientes pasos es pasar de un conjunto inicial de COE a un conjunto final



Introducción

Hay algunas perturbaciones que afectan a la mayoría de nuestros COE, pero en lo que nos estamos centrando en este capítulo es en relacionar la anomalía verdadera inicial, θ_i , el tiempo de vuelo, TOF, y la anomalía verdadera final, θ_f . **Este problema se puede resolver de dos maneras. La primera es determinar el tiempo que tarda un objeto en órbita en viajar de una posición a otra (tiempo de vuelo). La segunda parte es determinar dónde estará un objeto después de un tiempo de vuelo desde una posición inicial dada.**

Tiempo desde la periapsis

La ecuación de orbita $r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1+e\cos\theta}$ da la posición del cuerpo $\boldsymbol{m_2}$ en su órbita alrededor de $\boldsymbol{m_1}$ como función de la **anomalía verdadera.** Por diversas razones prácticas, necesitamos poder determinar la posición de $\boldsymbol{m_2}$ como función del **tiempo**. Para las **órbitas elípticas**, disponemos de una fórmula para el **período $\boldsymbol{T}$,** $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2}$, pero todavía no podemos calcular el **tiempo necesario para desplazarse entre dos anomalías verdaderas cualesquiera**

La única ecuación que relaciona directamente la anomalía verdadera con el tiempo es $h = r^2\,\dot{\theta}$, la cual puede escribirse como $\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}$ Sustituyendo en la ecuación de orbita y separando variables:

$$\frac{\mu^2}{h^3} dt = \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

Tiempo desde la periapsis

Integrando

$$\frac{\mu^2}{h^3}(t - t_p) = \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{(1 + e\cos\theta)^2}$$

t_p tiempo de paso por el periapsis, suele tomarse como el instante incial, es decir igual a 0

El integral del lado derecho puede encontrarse en cualquier manual matemático estándar, como **Zwillinger (2018)**, donde se muestra que:

$$\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^2} = \frac{1}{(a^2-b^2)^{3/2}}\left[2a\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right) - \frac{b\sqrt{a^2-b^2}\sin x}{a+b\cos x}\right] \quad (b<a) \qquad e < 1\ elipses$$

$$\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^2} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{6}\tan^3\frac{x}{2}\right) \quad (b=a) \qquad e = 1\ parabolas$$

$$\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^2} = \frac{1}{(b^2-a^2)^{3/2}}\left[\frac{b\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x} - a\ln\left(\frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a}\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\right] \quad (b>a) \qquad e > 1\ hiperbolas$$

Obritas circulares

Si $\boldsymbol{e} = \mathbf{0}$, el integral $\frac{\mu^2}{h^3} dt = \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$ se reduce a $\frac{\mu^2}{h^3} dt = \int_0^\theta d\theta$, lo que implica que

$$t = \frac{h^3}{\mu^2}\theta$$

Recordemos que, para una **órbita circular**, la ecuación de orbita $r = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e\cos\theta}$ se simplifica como $r = \frac{h^2}{\mu}$, por lo tanto:

$$t = \frac{r^{3/2}}{\sqrt{\mu^2}}\theta$$

Como el periodo de una orbita circular es $T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{\mu}}$, se obtiene

$$t = \frac{\theta}{2\pi}T \quad \text{o equivalentemente} \quad \theta = \frac{2\pi}{T}t$$

Obritas circulares

La razón por la cual **t es directamente proporcional a $\boldsymbol{\theta}$** en una órbita circular es que la **velocidad angular** $2\pi/T$ es constante

Por lo tanto, el **tiempo $\boldsymbol{\Delta t}$** necesario para recorrer una **anomalía verdadera $\boldsymbol{\Delta\theta}$** es:

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{2\pi} T$$

Orbita circular

Esto ahora se puede combinar con un argumento inicial y final de latitud, u_i y u_f (tenga en cuenta que estos son los elementos orbitales alternativos que usamos para órbitas circulares en lugar de la anomalía verdadera) para determinar el tiempo de vuelo, TOF

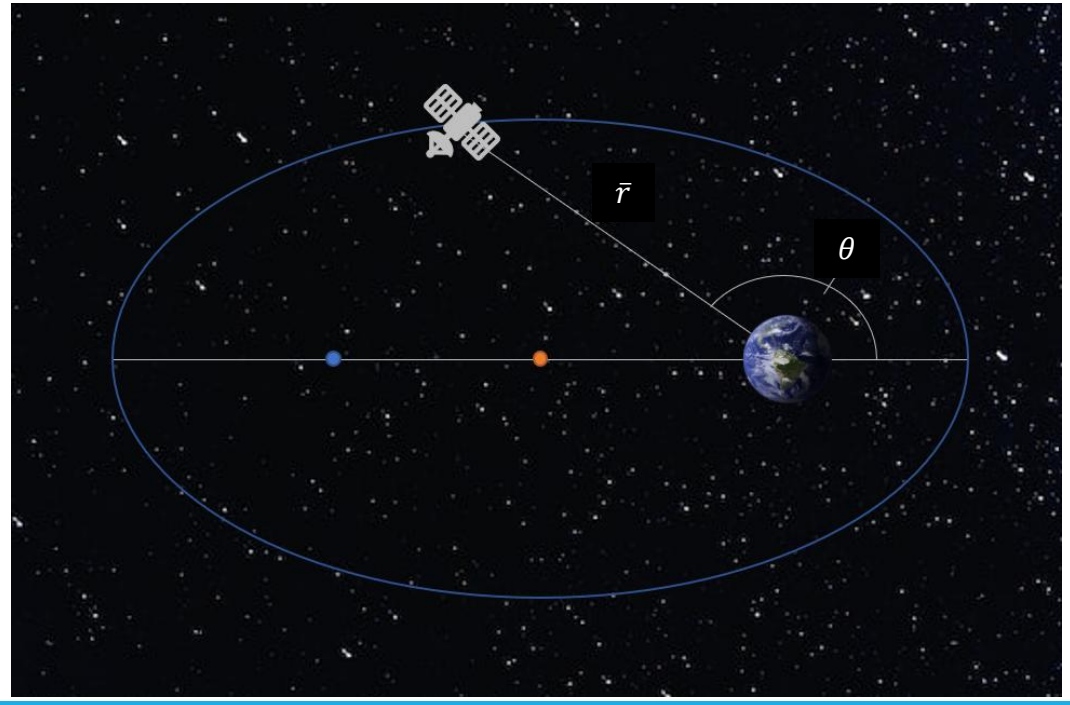
$$\mathrm{TOF} = \frac{u_i - u_f}{n}$$

Esta ecuación se puede reorganizar para calcular una posición futura del argumento final de latitud, u_f , si se da un argumento inicial de latitud, u_i y tiempo de vuelo, TOF

$$u_f = u_i + n(TOF)$$

Anomalía verdadera

En lo que respecta a las órbitas elípticas, no son tan simples como las órbitas circulares debido a la velocidad y, por lo tanto, la anomalía verdadera del objeto no cambia uniformemente a lo largo de la órbita. Por ello, necesitamos definir algunas variables nuevas.



$\theta = 0º$ en el perigeo

$\theta = 180º$ en el apogeo

Movimiento medio

Los **objetos en órbitas circulares** poseen una **velocidad angular constante**, por lo que el **tiempo de vuelo** y la **distancia recorrida** pueden calcularse con facilidad. Sin embargo, la **velocidad angular del vector de posición** de una **órbita elíptica no es constante**. Para simplificar estos cálculos, se introduce una nueva variable denominada **movimiento medio**, representada con el símbolo n.

El **movimiento medio** es la **velocidad angular promedio** (en radianes por segundo) de un objeto en órbita, ya sea circular o elíptica. Dado que en una órbita elíptica se recorren $\boldsymbol{2\pi}$ **radianes por período** $\boldsymbol{T}$, el cociente $2\pi/T$ representa precisamente esa **velocidad angular promedio**, la cual se denomina **movimiento medio** y se expresa como

$$n = \frac{2\pi}{T}$$

Recordemos que para una orbita elíptica $T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$, por lo que

$$n = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

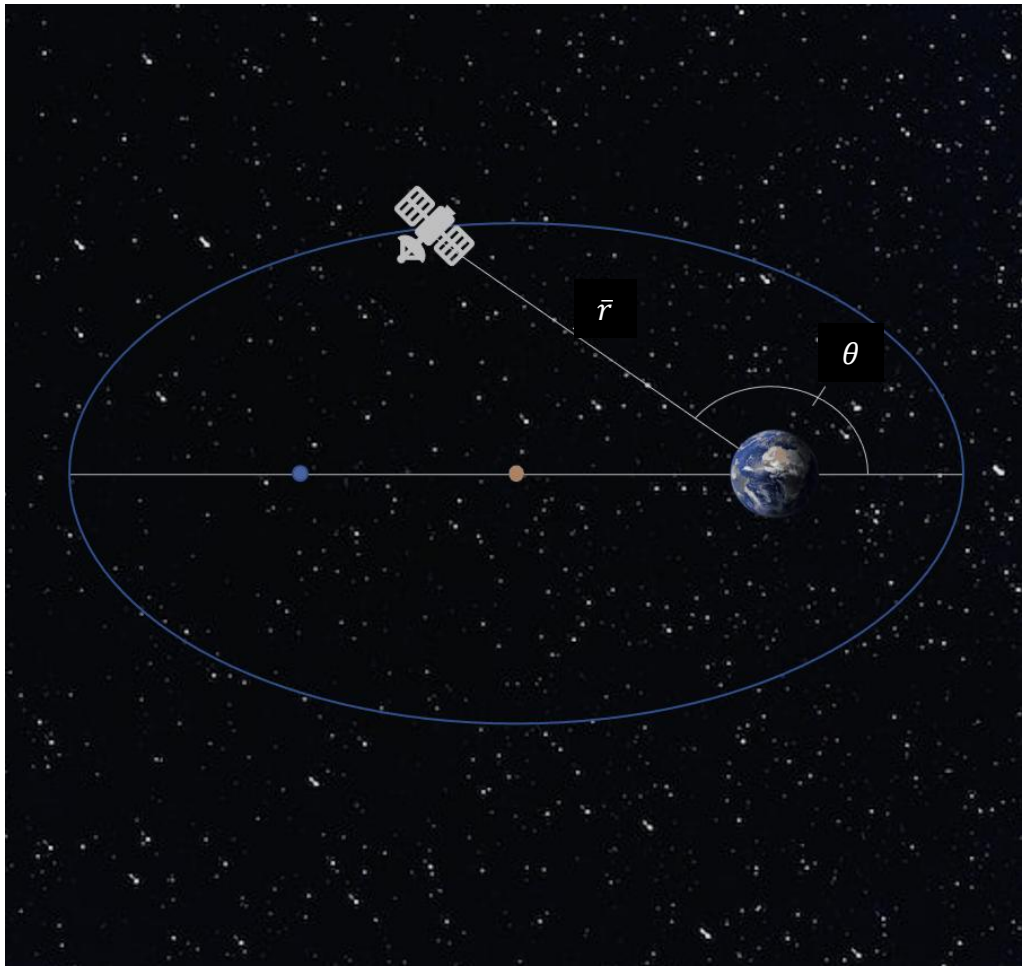
Nota: en orbita circular $R = a$

Anomalía excéntrica

Se define creando un círculo auxiliar alrededor de la elipse donde el radio del círculo es igual al semieje mayor de la elipse y centrado en el centro de la elipse (no centrado en la Tierra).

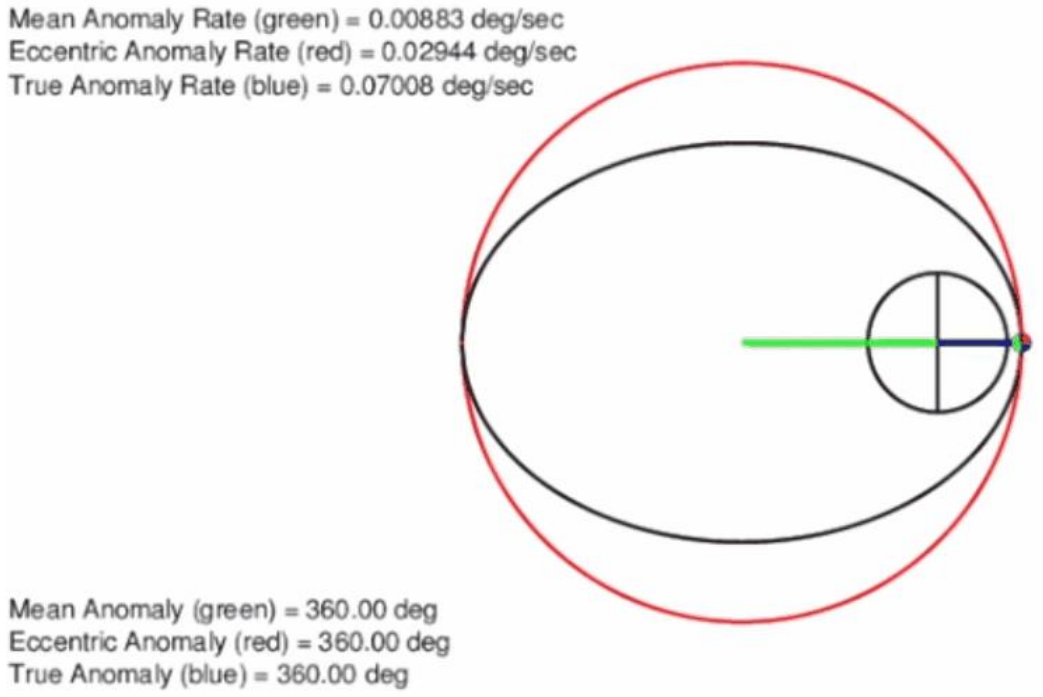
Luego, se dibuja una línea perpendicular al eje mayor, pasando por el punto donde se encuentra el objeto y se extiende hasta el borde del círculo. Luego se dibuja otra línea desde el centro de la elipse/círculo hasta el punto donde la última línea y el círculo se intersecan. El ángulo medido se define como la anomalía excéntrica.

Esto crea un vínculo directo entre la anomalía verdadera y una forma de medir ángulos que son circulares. Sin embargo, la anomalía excéntrica todavía no cambia uniformemente.

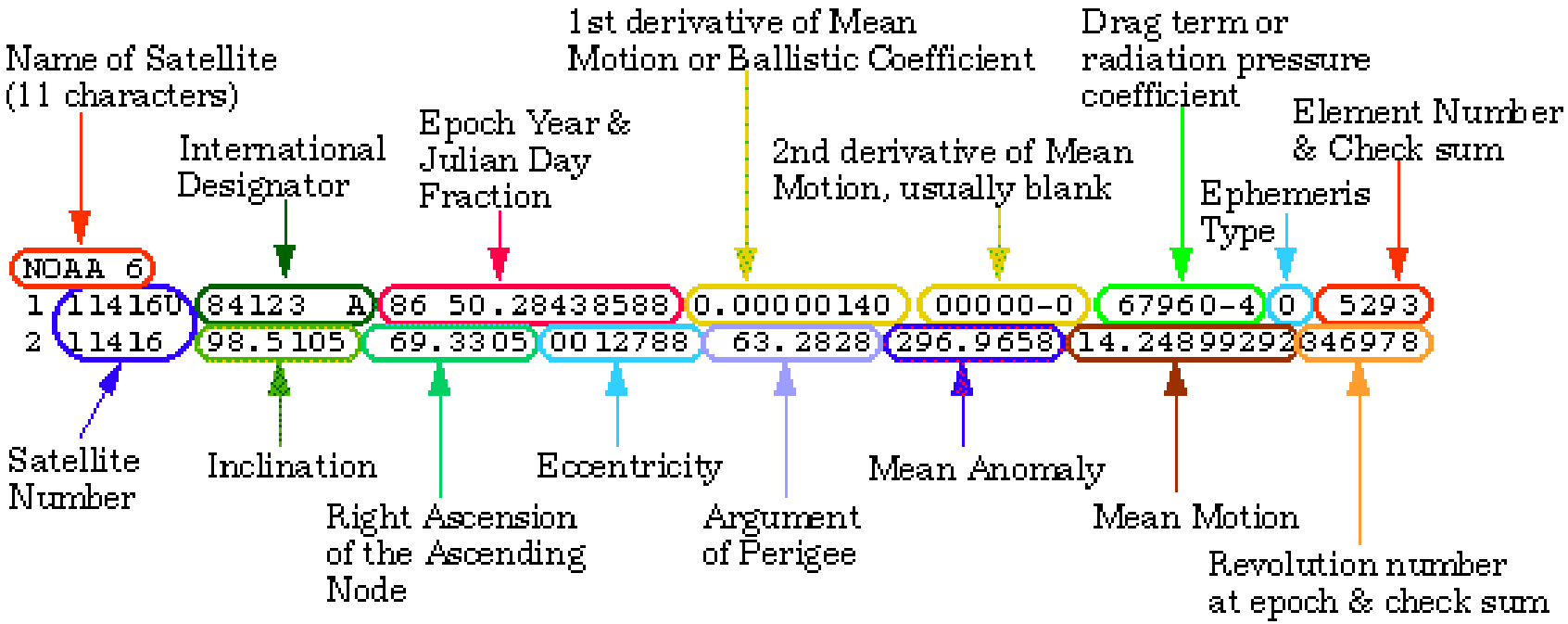


Anomalía media

Por otro lado, la anomalía media , **M,** es uniforme. No es tan fácil relacionarlas geométricamente, ya que cambian a diferentes velocidades, a diferencia de la anomalía excéntrica y la verdadera, que se desplazan a una velocidad igual entre sí. Un dato a tener en cuenta es que la anomalía media utiliza el mismo círculo para desplazarse que la anomalía excéntrica. También es importante tener en cuenta que las tres anomalías pasan por el perigeo y el apogeo al mismo tiempo. Por eso se denomina anomalía media. Toma el promedio de las velocidades de la anomalía excéntrica en uso y mantiene el mismo periodo



TLE

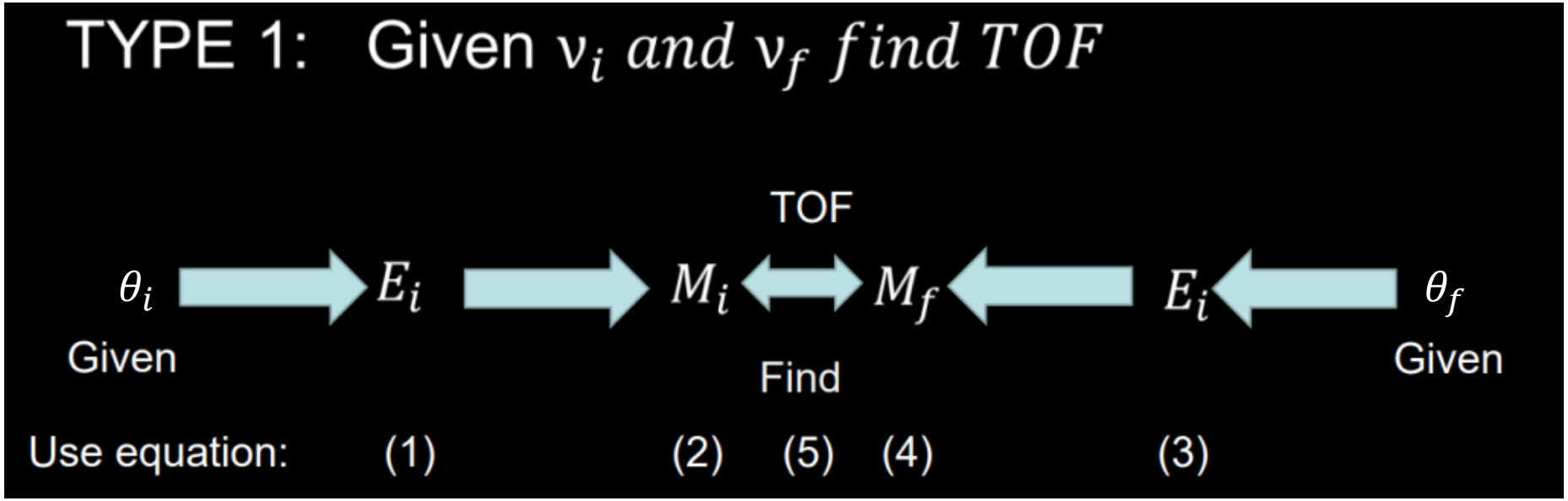

Name of Satellite
(11 characters)
International
Designator
Epoch Year &
Julian Day
Fraction
1st derivative of Mean
Motion or Ballistic Coefficient
2nd derivative of Mean
Motion, usually blank
Drag term or
radiation pressure
coefficient
Ephemeris
Type
Element Number
& Check sum
NOAA 6
1 11416U 84123 A 86 50.28438588 0.00000140 00000-0 67960-4 0 5293
2 11416 98.5105 69.3305 0012788 63.2828 296.9658 14.24899292 46978
Satellite
Number
Inclination
Right Ascension
of the Ascending
Node
Eccentricity
Argument
of Perigee
Mean Anomaly
Mean Motion
Revolution number
at epoch & check sum

1er Problema

El problema de predicción de tipo 1 de Kepler implica determinar el tiempo de vuelo de un objeto en una órbita elíptica dada su ubicación inicial y final, que probablemente se describirá mediante anomalías verdaderas iniciales y finales. Esto es fundamental en el mundo de la astrodinámica, ya que existen muchas situaciones en las que un satélite u otro objeto puede estar en órbita y se desea saber cuánto tarda en viajar de una ubicación a otra.

1er Problema

Para lograr esto, se necesitan tanto la anomalía excéntrica recién definida como la anomalía media. Considerando la relación entre estas anomalías y las anomalías verdaderas iniciales descritas, se adoptará un enfoque de "afuera-adentro", comenzando con las anomalías verdaderas "externas" y avanzando hacia el interior hasta el tiempo de vuelo.



1er Problema

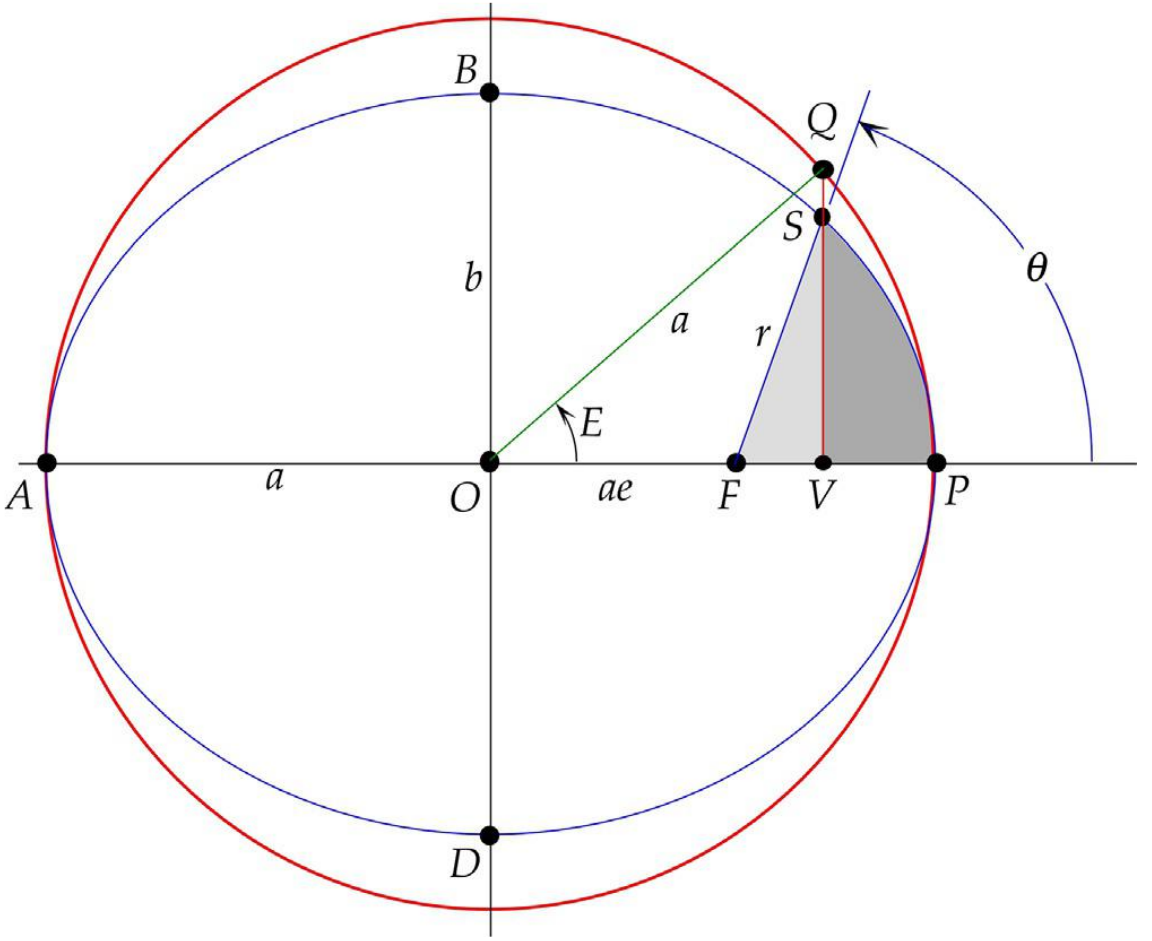
Para encontrar E como función de θ, observemos la imagen que en términos de anomalía excéntrica $\overline{OV} = a\cos E$, mientras que, en términos de anomalía verdadera $\overline{OV} = a\,e + r\cos\theta$. Por lo tanto,

$$a\cos E = a\,e + r\cos\theta$$

Recordando la ecuación de orbita $r = a\,\frac{1-e^2}{1+e\cos\theta}$,

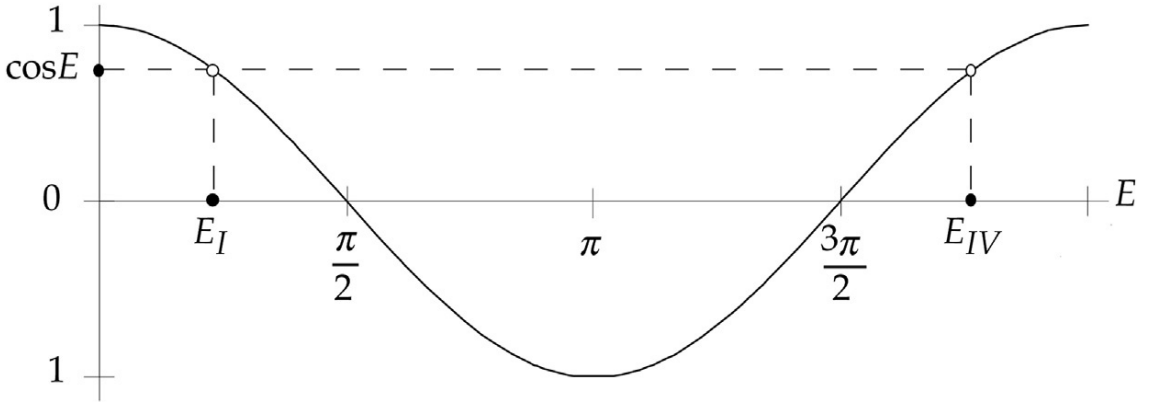
$$a\cos E = a\,e + a\,\frac{1-e^2}{1+e\cos\theta}\cos\theta$$

$$\cos E = \frac{e+\cos\theta}{1+e\cos\theta} \qquad o\ la\ inversa \qquad \cos\theta = \frac{e-\cos E}{e\cos E - 1}$$



1er Problema

La ecuación anterior presenta una ambiedad, ya que dado un valor de $\cos E$ comprendido entre -1 y 1, existen dos valores posibles entre 0º y 360º



Usando la identidad trigonométrica $\sin^2 E + \cos^2 E = 1$, se puede resolver para $\sin E$

$$\sin E = \frac{\sqrt{1-e^2}\,\sin\theta}{1+e\cos\theta}$$

Para resolver esta ambigüedad de cuadrante, utilizamos la siguiente identidad trigonométrica:

$$\tan^2\frac{E}{2} = \frac{\sin^2(E/2)}{\cos^2(E/2)} = \frac{1-\cos E}{1+\cos E}$$

1er Problema

$$\tan^2\frac{E}{2} = \frac{\sin^2(E/2)}{\cos^2(E/2)} = \frac{1-\cos E}{1+\cos E}$$

$$1-\cos E = \frac{1-\cos\theta}{1+e\cos\theta}(1-e) \quad \text{y} \quad 1+\cos E = \frac{1+\cos\theta}{1+e\cos\theta}(1+e)$$

$$\tan^2\frac{E}{2} = \frac{1-e}{1+e}\,\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-e}{1+e}\,\tan^2\frac{\theta}{2}$$

$$\tan\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,\tan\frac{\theta}{2}$$

$$E = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

1er Problema

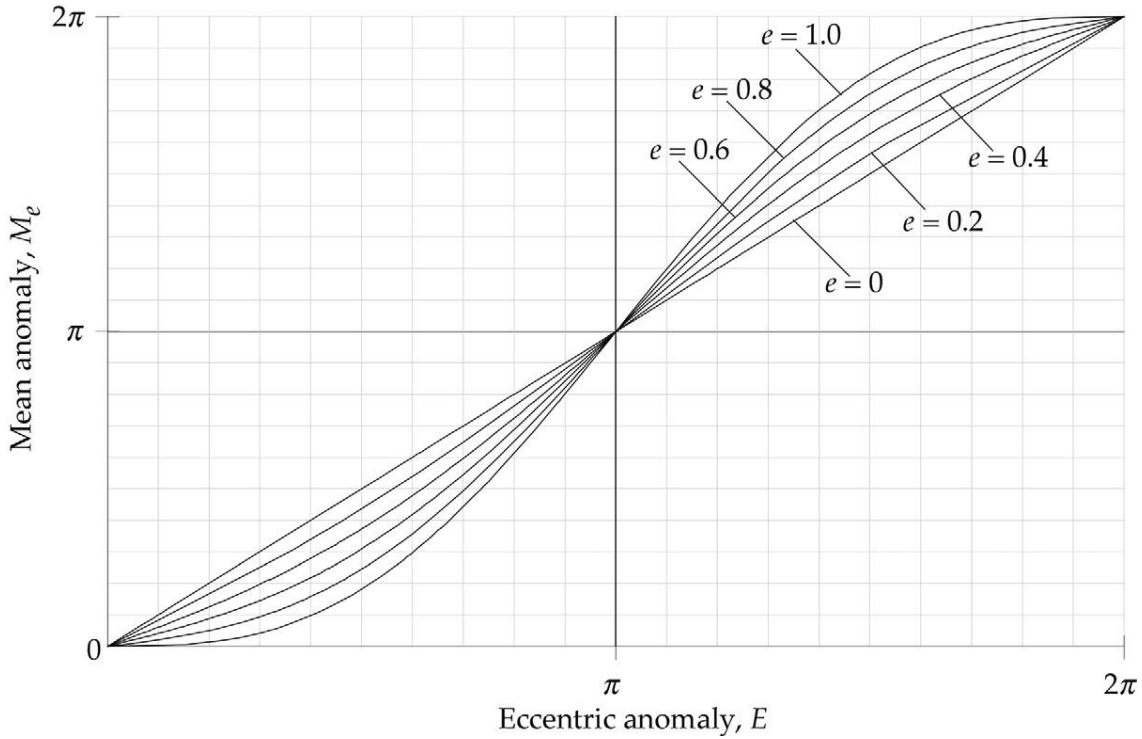
$$\sin E = \frac{\sqrt{1-e^2}\,\sin\theta}{1+e\cos\theta}$$

$$E = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

$$M_e = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right) - \frac{e\sqrt{1-e^2}\sin\theta}{1+e\cos\theta}$$

Ecuación de Kepler

$$M_e = E - e\sin E$$



En una clase próxima llegaremos a esta ecuación

1er Problema

$$M_e = \frac{2\,\pi}{T}\ t\ \rightarrow t = \frac{M_e}{2\pi/_T}$$

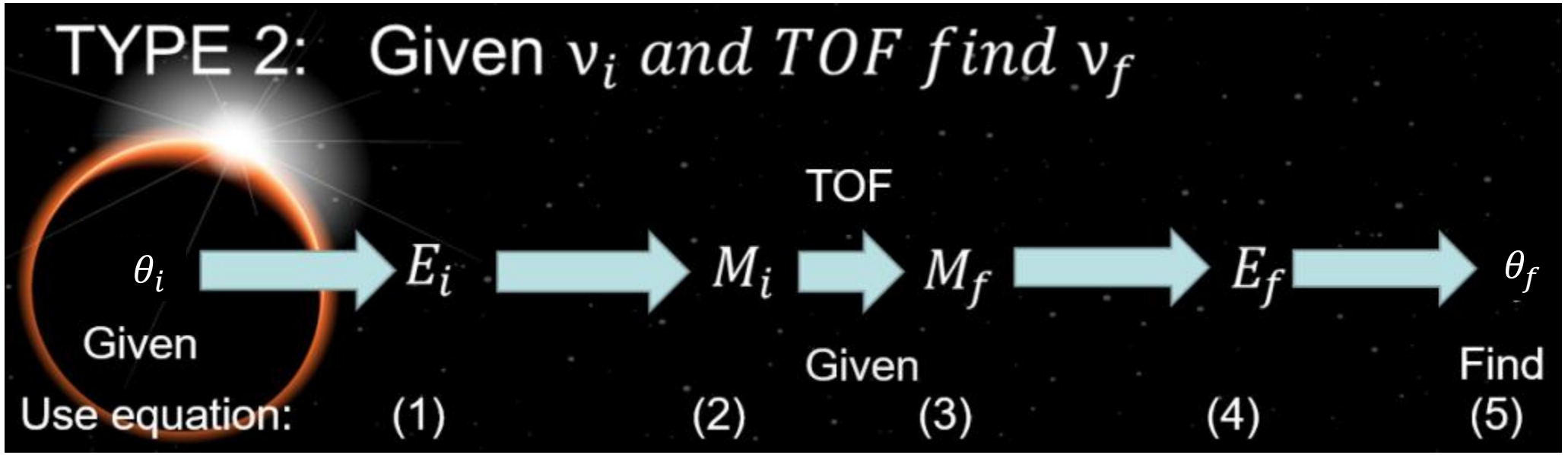
$$TOF = t_f - t_i = \frac{M_f}{2\pi/_T} - \frac{M_i}{2\pi/_T} = \frac{M_f - M_i}{2\pi/_T} = \frac{M_f - M_i}{n}$$

$$TOF = \frac{M_f - M_i}{n}$$

$M_f < M_i$ significa que ya dimos una vuelta, entonces para que el tiempo de positivo, se debe sumar 2π en el numerador

2do Problema

El problema de predicción de tipo 2 de Kepler considera una anomalía verdadera inicial y el tiempo de vuelo para determinar una anomalía verdadera final. En lugar de un análisis de afuera hacia adentro, el problema de tipo 2 avanza directamente desde una ubicación inicial hasta una ubicación final, como se muestra en la figura a continuación. Esto es ideal cuando queremos saber dónde estará un satélite después de cierto tiempo.



2do Problema

Para determinar las anomalías excéntricas y medias iniciales se utilizan los mismos procesos y factores a considerar que en el Tipo 1. Podemos usar este valor, así como la excentricidad, e, para determinar la anomalía excéntrica inicial, E_i . Para realizar la comprobación del semiplano, si θ_i > 180°, entonces E_i > 180°.

$$\cos E_i = \frac{e + \cos \theta_i}{1 + e \cos \theta_i}$$

Nuevamente, para pasar de la anomalía excéntrica inicial, E_i , a la anomalía media inicial, M_i , utilice la excentricidad, e,

$$M_i = E_i - e \sin E_i$$

Con el tiempo de vuelo, TOF, podemos calcular la anomalía media final M_f

$$M_f = M_i + n\, TOF$$

2do Problema

Si el valor obtenido es mayor a 2π implica que el satélite ha pasado por el perigeo mas de una vez (ha completado al menos una vuelta). Si queremos saber cuantas vueltas ha completado:

$$k = int\left(\frac{M_i + n\,TOF}{2\,\pi}\right)$$

Por lo que podemos volver a escribir la ecuación como:

$$M_f = M_i + n\,TOF\ - 2k\pi$$

2do Problema

Ahora debemos calcular la anomalía excéntrica final. Como observará, la siguiente ecuación tiene la variable E_f tanto sola como dentro de una función seno.

$$E_f = M_f + e \sin E_f$$

Llamamos a este tipo de ecuación una **ecuación trascendental** porque no podemos resolverla analíticamente, por lo que tendremos que recurrir a un enfoque numérico.

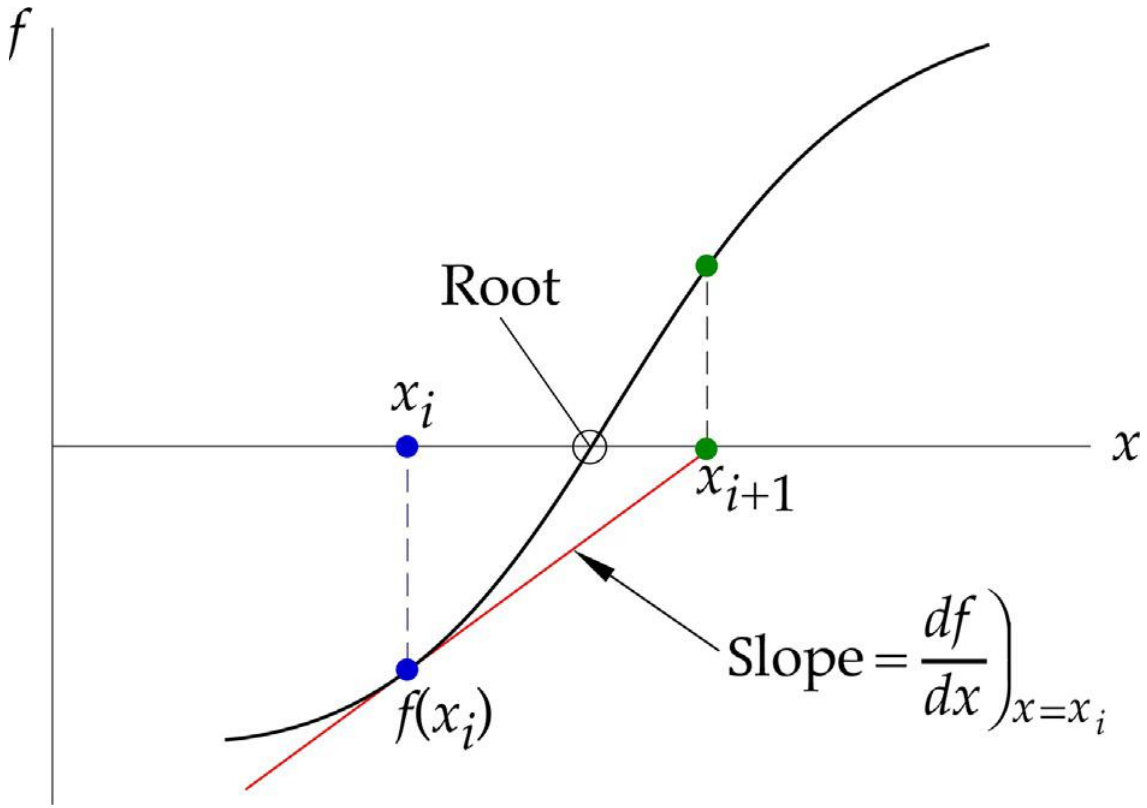
Método de Newton

El método de Newton, o alguna de sus variantes, es una de las formas más comunes y eficientes de encontrar la raíz de una función.

Para hallar una raíz de la ecuación $f(x) = 0$, se estima inicialmente que esta se encuentra en x_i y se evalúan la función $f(x)$ y su primera derivada $f'(x)$ en ese punto.

Luego, se extiende la tangente a la curva en $f(xi)$ hasta que interseca el eje x en x_{i+1}, que se convierte en nuestra nueva estimación de la raíz. La intersección x_{i+1} se obtiene igualando la pendiente de la línea tangente con la pendiente de la curva en x_i ; es decir:

$$f'(x_i) = \frac{0 - f(xi)}{x_{i+1} - x_i} \rightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{f(xi)}{f'(x_i)}$$



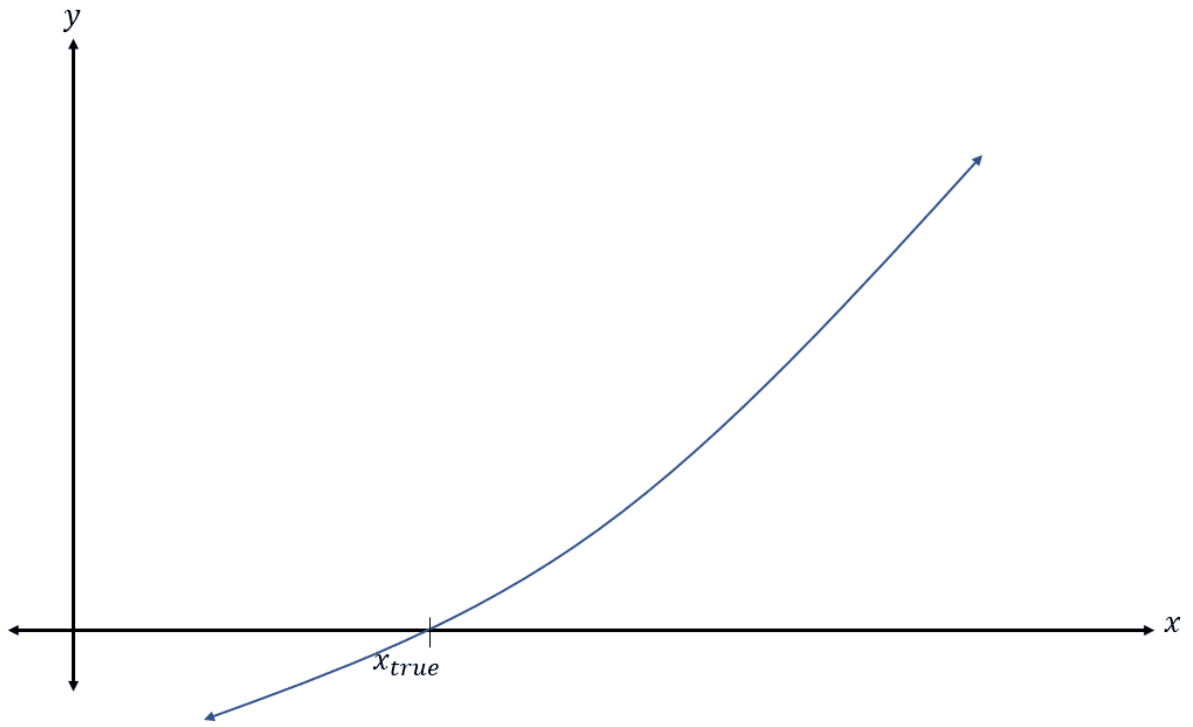
Método de Newton

El método de Newton, o alguna de sus variantes, es una de las formas más comunes y eficientes de encontrar la raíz de una función.

Para hallar una raíz de la ecuación $f(x) = 0$, se estima inicialmente que esta se encuentra en x_i y se evalúan la función $f(x)$ y su primera derivada $f'(x)$ en ese punto.

Luego, se extiende la tangente a la curva en $f(xi)$ hasta que interseca el eje x en x_{i+1}, que se convierte en nuestra nueva estimación de la raíz. La intersección x_{i+1} se obtiene igualando la pendiente de la línea tangente con la pendiente de la curva en x_i ; es decir:

$$f'(x_i) = \frac{0 - f(xi)}{x_{i+1} - x_i} \rightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{f(xi)}{f'(x_i)}$$



Método de Newton

El proceso se repite, utilizando x_{i+1} para estimar x_{i+2}, y así sucesivamente, hasta que la raíz se haya encontrado con el nivel de precisión deseado.

Para aplicar el método de Newton a la resolución de la ecuación de Kepler, se forma la función

$$f(E) = E - e \sin E - M_e$$

y se busca el valor de la anomalía excéntrica que haga $f(E) = 0$. Dado que

$$f'(E) = 1 - e \cos E$$

El metodo de Newton se expresa como

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(xi)}{f'(x_i)} \rightarrow E_{i+1} = E_i - \frac{E_i - e \sin E - M_e}{f'(x_i)}$$

Método de Newton

Como resolver la **ecuación de Kepler** para la **anomalía excéntrica** E, dadas la **excentricidad** ey la **anomalía media** M_e.

1. Elegir una estimación inicial de la raíz E de la siguiente manera
    1. Si $M_e < \pi$, entonces $E = M_e + e/2$.
    2. Si $M_e > \pi$, entonces $E = M_e - e/2$.

Recordar que los ángulos E y M_e están en radianes

2. En cualquier paso dado, habiendo obtenido E_i del paso anterior, calcular $f(E_i) = E_i - e \sin E_i - M_e$ y $f'(E_i) = 1 - e\, cos\, E_i$
3. Calcular la relación $\mathrm{ratio_i} = \frac{f(E_i)}{f'(E_i)}$
4. Si la relación $|\mathrm{ratio_i}|$ excede la tolerancia elegida (por ejemplo 10^{-8}) entonces se calcula un nuevo valor para E, $E_{i+1} = E_i - \mathrm{ratio_i}$, y regresamos al paso 2
5. Si la relación $|\mathrm{ratio_i}|$ es menor que la tolerancia elegida, se acepta E_i como la **solución** dentro del nivel de precisión elegido.

Método de Newton en Matlab

Codificando en Matlab, el método de Newton aplicado a Kepler

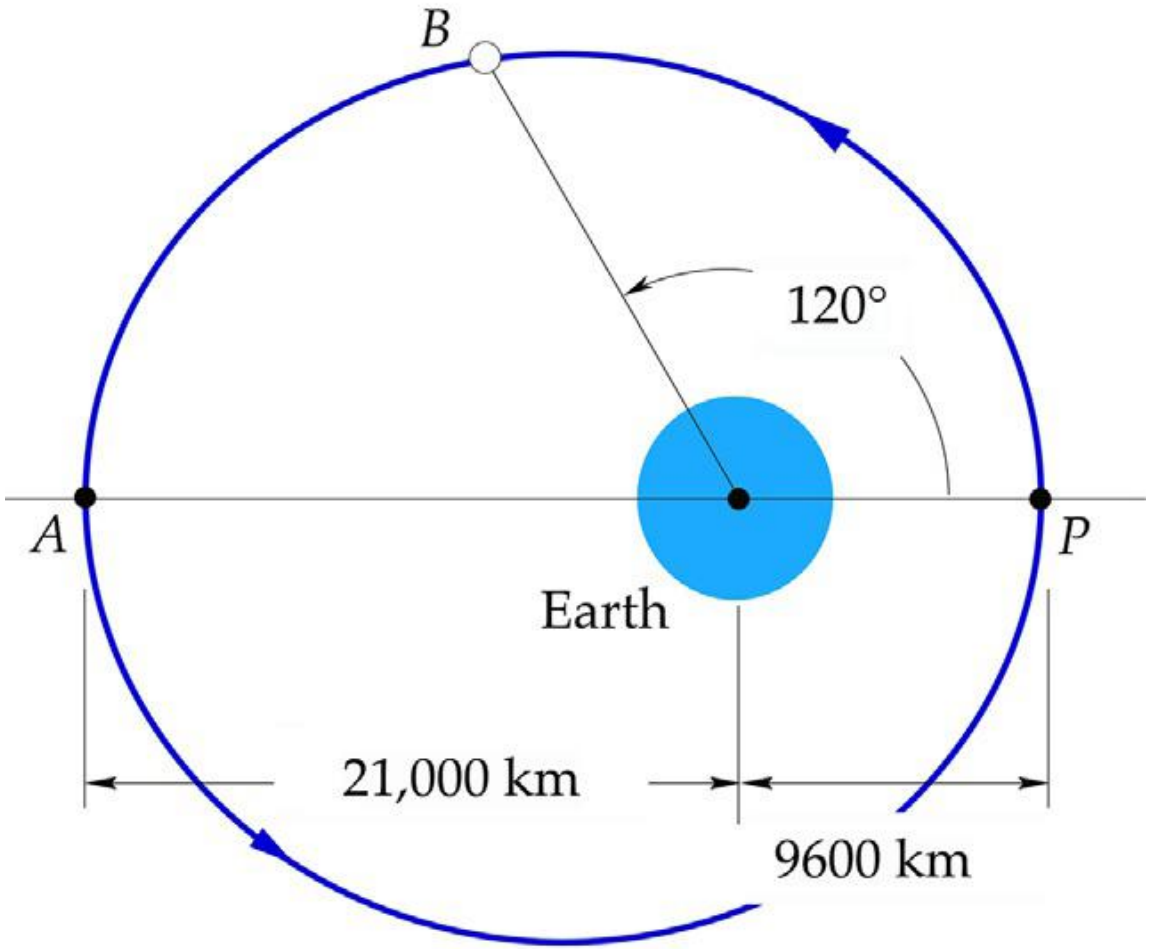
```
function E = kepler_E(e, M)
% ————————————————————————————————
%% Notas aclaratorias
% Esta funcion utiliza el metodo de Newton para resolver la ecuacion de
% Kepler E - e*sin(E) = M para obtener la anomalia excentrica a partir de
% la anomalia media
% Variables utilizadas:
% E - Anomalia excentrica (radianes)
% e - excentricidad
% M - anomalia media (radianes)
% pi - 3.1415926...
% Función M del usuario requerida: ninguna
% ————————————————————————————————

% Tolerancia
tolerance = 1.e-8;
% Seleccion de valor inicial de E
if M < pi
        E = M + e/2;
else
        E = M - e/2;
end
% Iteracion hasta que E se encuentre dentro de la tolerancia
ratio = 1;
while abs(ratio) > tolerance
        ratio = (E - e*sin(E) - M) / (1 - e*cos(E));
        E = E - ratio;
end
end %kepler_E
```

Ejercicio

Una orbita geocéntrica elíptica tiene un radio de perigeo de 9600 km y un radio de apogeo de 21000 km.

- Calcular el tiempo de vuelo desde el perigeo a la anomalía verdadera de 120º
- Encontrar la anomalía verdadera a 3hs del pasaje sobre el perigeo



Ejercicio

Primero calculamos la excentricidad y el momento angular especifico:

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = \frac{21000 - 9600}{21000 + 9600} \rightarrow \boxed{e = 0{,}37255}$$

$$r = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1 + e\cos\theta} \rightarrow 9600 = \frac{h^2}{398600}\frac{1}{1 + 0{,}37255\cos 0} \rightarrow \boxed{h = 72472\frac{km^2}{s}}$$

Ahora podemos calcular el periodo orbital

$$T = \frac{2\pi}{\mu^2}\left(\frac{h}{\sqrt{1 - e^2}}\right)^3 = \frac{2\pi}{398600^2}\left(\frac{72472}{\sqrt{1 - 0{,}37255^2}}\right)^3 \rightarrow \boxed{T = 18834\ s}$$

Podemos encontrar la anomalía excéntrica sin ambigüedad de cuadrante como:

$$E = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}\tan\frac{\theta}{2}\right) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1 - 0{,}37255}{1 + 0{,}37255}}\tan\frac{120}{2}\right) \rightarrow \boxed{E = 1{,}7281\ rad}$$

Ejercicio

Con la ecuación de Kepler encontramos la anomalía media

$$M_e = E - e \sin E = 1{,}7281 - 0{,}37255 \sin 1{,}7281 \rightarrow \boxed{M_e = 1{,}3601\, rad}$$

Finalmente podemos encontrar el tiempo

$$t = \frac{M_e}{2\pi} T = \frac{1{,}3601}{2\pi} 18834 \rightarrow \boxed{t = 4077s\ (1{,}132h)}$$

Ejercicio

Para la segunda parte del ejercicio, nos pide calcular la anomalia verdadera 3horas después de pasar por el perigeo

$$TOF = 3h = 10800\ s$$

Ahora calculamos la anomalía media

$$t = \frac{M_e}{2\pi}T \rightarrow M_e = 2\pi\frac{t}{T} = 2\pi\frac{10800}{18830} \rightarrow \boxed{M_e = 3{,}6029\ rad}$$

Ahora con la ecuación de Kepler calculamos el estadio final

$$E_f = M_f + e\sin E_f$$

Debemos usar el algoritmo de resolución visto anteriormente y tomaremos una toleracióna de 10^{-6}. Como Si $M_e > \pi$, entonces $E_0 = M_e - \frac{e}{2} = 3{,}4166$.

Ejercicio

Step 1:

$$\begin{aligned} E_0 &= 3.4166 \\ f(E_0) &= -0.085124 \\ f'(E_0) &= 1.3585 \\ \text{ratio} &= \frac{-0.085124}{1.3585} = -0.062658 \\ |\text{ratio}| &> 10^{-6} \qquad \therefore \text{ repeat} \end{aligned}$$

Step 2:

$$\begin{aligned} E_1 &= 3.4166 - (-0.062658) = 3.4793 \\ f(E_1) &= -0.0002134 \\ f'(E_1) &= 1.3515 \\ \text{ratio} &= \frac{-0.0002134}{1.3515} = -1.5778 \times 10^{-4} \\ |\text{ratio}| &> 10^{-6} \qquad \therefore \text{repeat} \end{aligned}$$

Step 3:

$$\begin{aligned} E_2 &= 3.4793 - \left(-1.5778 \times 10^{-4}\right) = 3.4794 \\ f(E_2) &= -1.5366 \times 10^{-9} \\ f'(E_2) &= 1.3515 \\ \text{ratio} &= \frac{-1.5366 \times 10^{-9}}{1.3515} = -1.137 \times 10^{-9} \\ |\text{ratio}| &< 10^{-6} \qquad \therefore \text{stop} \end{aligned}$$

La convergencia —aún superior a la precisión deseada— se logró después de solo **dos iteraciones**.

Con $E = 3.4794$, la **anomalía verdadera** resulta:

$$\tan\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1+0.37255}{1-0.37255}}\tan\frac{3.4794}{2} = -8.6721 \Rightarrow \boxed{\theta = 193.2^\circ}$$

Ejercicio

Resuelto en Matlab