DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN

Recordamos

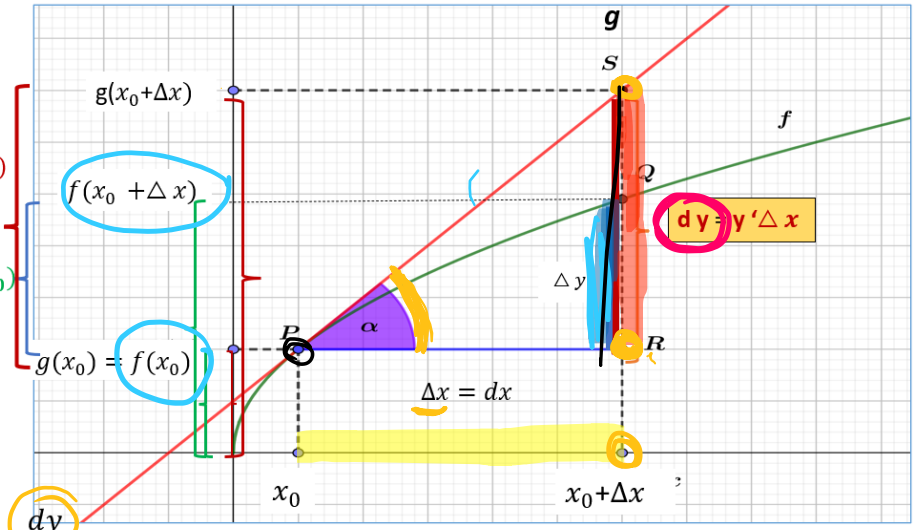
$g(x) = mx + b$

MIRA A RT

$dy = g(x_0 + \triangle x) - g(x_0)$

$\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)$

MIRA A LA FUNCIÓN



$$y' = tan\ \alpha = \frac{SR}{PR} = \frac{dy}{\triangle x}$$

$$y' = \frac{dy}{\Delta x}$$

$$\Delta x \cdot y' = dy$$

$dy = g(x + \Delta x) - g(x)$

$dy = m(x + \Delta x) + b - (mx + b)$

$dy = \cancel{mx} + m \cdot \Delta x \cancel{+ b - mx} - \cancel{b}$

$dy = f'(x_0) \cdot dx$

$dy = y' \Delta x$

$dx = 1 \cdot \Delta x$

$dx = \Delta x$

$y = x$

$y' = 1$

→ **Variación aproximada:** mide el cambio de las imágenes respecto de la recta tangente a la curva en **un punto dado**.

$f(x) = x^2$ $\quad f'(x) = 2x$

$f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2$

$f(x_0) = x_0^2$

Ej.3-50

Dada la función $y = x^2$, completar el siguiente cuadro:

x_0	$\Delta x = dx$	Δy	dy	$\Delta y - dy$
1	0,1	0,21	0,2	0,01
1	0,001	0,002001	0,002	0,000001
1	0,00001			

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2$

$\Delta y = (1 + 0,1)^2 - 1^2$

$\Delta y = 1,1^2 - 1 = 0,21$

$dy = f'(x_0) \cdot \Delta x$

$dy = 2x_0 \cdot \Delta x$

$dy = 2 \cdot 1 \cdot 0,1$

$dy = 0,2$

Ej.3-51

Hallar las diferenciales de las siguientes funciones:

a) $y = \text{arctg}\,(x/a)$; b) $y = x\,e^x$; c) $y = \ln(\text{sen}\,x)$

es una compuesta

$y = x e^x$

$y' = e^x + x \cdot e^x$

$dy = y' \cdot dx$

$dy = \square \cdot dx$

b) $dy = (e^x + x \cdot e^x)\,dx$

a) $y = \text{arc tg}\left(\frac{x}{a}\right)$

$y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \cdot \frac{1}{a}$

$y' = \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{a}$

$y' = \frac{a^2}{a^2 + x^2} \cdot \frac{1}{a}$

$\Rightarrow dy = y' \cdot dx$

$dy = \frac{a}{a^2 + x^2} \cdot dx$

Calculo Δx

$\frac{x}{a} = \frac{1}{a} \cdot x$

$\frac{1}{\frac{a^2 + x^2}{a^2}}$

$1 : \frac{a^2 + x^2}{a^2}$

$1 \cdot \frac{a^2}{a^2 + x^2}$

Ej.3-52

Calcular $\Delta y, dy$ para $y = \sqrt[3]{x}$ si a) $x_0 = 8$, $\Delta x = 0{,}1$;

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 x^{2/3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

$\Delta y = \sqrt[3]{8 + 0{,}1} - \sqrt[3]{8}$

$\Delta y = \sqrt[3]{8{,}1} - \sqrt[3]{8}$

$\Delta y = 0.00829885$

$dy = f'(x_0) \cdot dx$

$dy = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{64}} \cdot 0{,}1$

$dy = \frac{1}{12} \cdot 0{,}1$

$0.00833333 = dy$

Cuando $\Delta x \to 0$ $dy \to 0$ y $\Delta y \to 0$ **SON INFINITÉSIMOS EQUIVALENTES**

$\Delta x = x - x_0$ ← $x_0 + \Delta x = x$

$\Delta x = x - x_0$

$$\Delta y \approx dy$$

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot dx$$

$$f(x) \approx f'(x_0) \cdot dx + f(x_0)$$

Aproximación lineal de la función f: *en un entorno de x_0 se puede calcular la* ***imagen de la función*** *a través de la recta tangente*

Expresiones equivalentes: $f(x) \approx f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x + f(x_0)$$

Ej.3-53

Calcular en forma aproximada usando aproximación lineal y verificar con calculadora:

c) $e^{0,03}$

$f(x) = e^x$

$f(0) = e^0 = 1$

$f(0,03)$

x_0 Δx

$0,03 = 0 + 0,03$

$f(0,03) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x + f(x_0)$

x

$x_0 = 0$

$f(x_0) = f(0) = e^0 = 1$

$f'(x_0) = f'(0) = 1$

$f'(x) = e^x$

$f(0,03) \approx 1 \cdot 0,03 + 1$

$f(0,03) \approx 1,03$

$e^{0,03} \simeq 1,03$

e) sen 29°

$f(x) = \operatorname{sen} x$

$x = x_0 + \Delta x$

$29° = 30° + (-1°)$

EN RAD

$x_0 = \frac{\pi}{6}$

$\Delta x = -\frac{\pi}{180}$

$\Delta x = -\frac{\pi}{180}$

$180° - \pi$

$1° - x$

$x = \frac{\pi}{180}$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$f'(x) = \cos x$

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f(x) \approx f'(x_0)\ \Delta x + f(x_0)$

$f(29°) \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot -\frac{\pi}{180} + \frac{1}{2}$

$\operatorname{sen} 29° \approx -\frac{\pi}{360} \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{2}$

Ej.3-54

Encontrar la aproximación lineal de la función $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, en a = 0, y utilizarla para hallar aproximaciones de los números $\sqrt[3]{0{,}95}$ y $\sqrt[3]{1.1}$

$x_0 = 0$

$f'(x_0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x_0)^2}}$

$f'(0) = \frac{1}{3}$

$$f(x) \approx f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

$f(x_0) = \sqrt[3]{1+x_0}$

$f(0) = 1$

$$f(x) \approx \frac{1}{3} \cdot (x - 0) + 1$$

$$f(x) \approx \frac{1}{3}x + 1 \rightarrow \boxed{\text{APROX LINEAL}}$$

$$\sqrt[3]{1+x} \approx \frac{1}{3}x + 1 \quad \text{en un } E(0) \rightarrow x_0$$

USARLA PARA APROX $\sqrt[3]{0{,}95}$

$1 + x = 0{,}95 \Rightarrow x = -0{,}05$

CALCULO $f(-0{,}05) \approx \frac{1}{3} \cdot (-0{,}05) + 1 = 0{,}983\overline{3}$ Dio la aprox lineal

Ej.3-55

Calcular en forma aproximada la variación del volumen de un cubo cuando su arista *x* aumenta en un 1%.

$f(x) = x^3 \rightarrow$ volumen

$dx = \underline{0{,}01} \cdot x$

1 % de la arista

$dy = y' \cdot dx$

$dy = 3x^2 \cdot 0{,}01\,x$

$\boxed{dy = 0{,}03x^3}$

$f'(x) = 3x^2$

Ej si arista $x = 9 \rightarrow 729$

$x = 9{,}09 \rightarrow 751{,}089$

$\Delta y = 22{,}089\ldots$

$dy = 0{,}03 \cdot 9^3$

$dy = 21{,}87$

$\Delta y - dy = 0{,}2$