UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL HAEDO

PRACTICA

Elementos Orbitales

MECANICA ORBITAL

INGENIERÍA AERONÁUTICA/AEROESPACIAL

Ing. Anibal Cesar Vettorel

Ing. Carlos Mario Carbonel

INDICE

Sistemas de coordenadas y matriz de rotacion 3
Ejercicio 6
Rotaciones principales 7
Ángulos de Euler 8
Ejercicio 11
Marco perifocal 13
Ejercicio 15
Ejercicio 15
ECI (Earth-Centered Inertial) 16
Ejercicio 18
Elementos orbitales y vector de estado 19
Ejercicio 24
Transformacion entre sistemas de referencia ecuatorial geocentrico y perifocal 28
Ejercicio 29
Otros elementos orbitales 32
Argumento de latitud 34
Longitud del perigeo 34
Longitud verdadera 35
Ejercicios propuestos 37
Ejercicio 1 38

SISTEMAS DE COORDENADAS Y MATRIZ DE ROTACION

Un vector se puede expresar en una variedad de marcos de referencia, cada uno de los cuales está representado por una tríada de vectores unitarios. Limitaremos nuestra discusión a marcos de coordenadas derechos. Se puede derivar cualquier número de marcos de coordenadas diferentes girando los ejes ortogonales alrededor del origen, O. A veces, puede ser necesario utilizar un marco de coordenadas con un origen diferente, O'. Por tanto, *la transformación general de un marco de coordenadas a otro consiste en una traslación del origen y una rotación de los ejes sobre el nuevo origen*. Sin embargo, la traslación del origen se maneja con bastante facilidad especificando el vector de desplazamiento, $\boldsymbol{R}$ de O a O' y sus derivadas en el tiempo, de manera que el desplazamiento, la velocidad y la aceleración, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{a}$, respectivamente, en el marco original estén relacionados con sus contrapartes $\boldsymbol{r}'$, $\boldsymbol{v}'$, $\boldsymbol{a}'$, en el marco trasladado por

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}' \qquad \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{R}}{dt} + \boldsymbol{v}' \qquad \boldsymbol{a} = \frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} + \boldsymbol{a}'$$

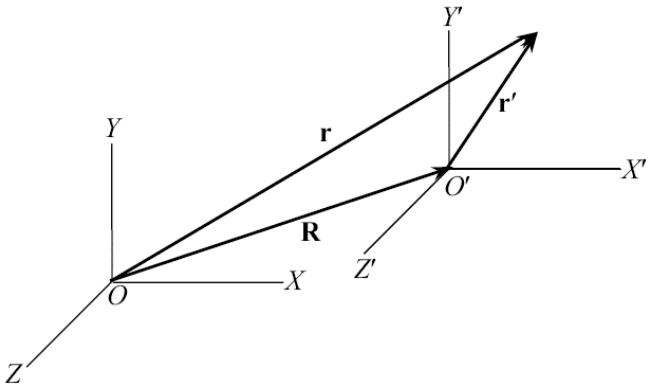


Figura 1. Traslación de un sistema de referencia.

Dado que la traslación de marcos de coordenadas es trivial, nos centraremos en cambio en transformaciones de coordenadas que implican rotación. Consideremos un marco $(OXYZ)$ con ejes OX, OY y OZ, representados por vectores unitarios $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, respectivamente. El marco gira alrededor del origen, O, para producir una nueva terna, $(OX'Y'Z')$ representada esta vez por $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$

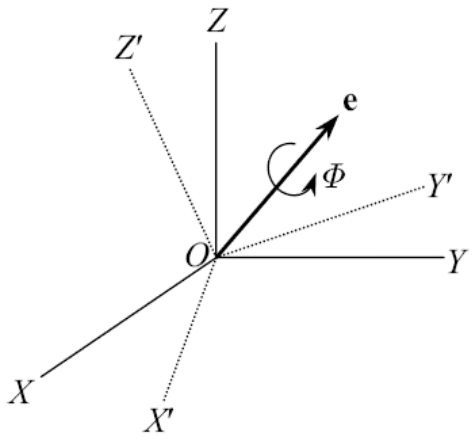


Figura 2 Rotación de un sistema de coordenadas

Ahora, consideremos un vector, $\boldsymbol{A}$, expresado alternativamente en términos de sus componentes en los marcos original y rotado, de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k} = A'_x\boldsymbol{i}' + A'_y\boldsymbol{j}' + A'_z\boldsymbol{k}'$$

que se puede escribir en forma de matriz como

$$\boldsymbol{A} = (\,\boldsymbol{i}\,\boldsymbol{j}\,\boldsymbol{k}\,)\begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} = (\,\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'\boldsymbol{k}'\,)\begin{Bmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{Bmatrix}$$

Para encontrar la relación entre los dos conjuntos de componentes, tomamos los productos escalares $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}'$ y $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{k}'$, resultando en

$$\begin{Bmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}'\cdot\mathrm{i} & \mathrm{i}'\cdot\mathrm{j} & \mathrm{i}'\cdot\mathrm{k} \\ \mathrm{j}'\cdot\mathrm{i} & \mathrm{j}'\cdot\mathrm{j} & \mathrm{j}'\cdot\mathrm{k} \\ \mathrm{k}'\cdot\mathrm{i} & \mathrm{k}'\cdot\mathrm{j} & \mathrm{k}'\cdot\mathrm{k} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} .$$

También podemos tomar productos escalares de $\boldsymbol{A}$ con $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$, para derivar lo siguiente:

$$\begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\cdot\mathrm{i}' & \mathrm{i}\cdot\mathrm{j}' & \mathrm{i}\cdot\mathrm{k}' \\ \mathrm{j}\cdot\mathrm{i}' & \mathrm{j}\cdot\mathrm{j}' & \mathrm{j}\cdot\mathrm{k}' \\ \mathrm{k}\cdot\mathrm{i}' & \mathrm{k}\cdot\mathrm{j}' & \mathrm{k}\cdot\mathrm{k}' \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{Bmatrix} .$$

Reescribimos la ecuación como

$$\begin{Bmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{Bmatrix} = C \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix}$$

donde $\boldsymbol{C}$ es la siguiente matriz que consta de los cosenos de los ángulos, entre los ejes de los dos marcos de coordenadas y, por lo tanto, se denomina *matriz de cosenos directores* o *matriz de rotación*:

$$\mathrm{C} \doteq \begin{pmatrix} \mathrm{i}' \cdot \mathrm{i} & \mathrm{i}' \cdot \mathrm{j} & \mathrm{i}' \cdot \mathrm{k} \\ \mathrm{j}' \cdot \mathrm{i} & \mathrm{j}' \cdot \mathrm{j} & \mathrm{j}' \cdot \mathrm{k} \\ \mathrm{k}' \cdot \mathrm{i} & \mathrm{k}' \cdot \mathrm{j} & \mathrm{k}' \cdot \mathrm{k} \end{pmatrix} .$$

La transformación de coordenadas, también se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} i' \\ j' \\ k' \end{Bmatrix} = C \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix}$$

Está claro que la matriz de rotación tiene la siguiente propiedad:

$$\boldsymbol{C^T . C = C . C^T = \mathrm{I}}$$

de lo cual se sigue que $\boldsymbol{C^{-1} = C^T}$. Se dice que una matriz con esta propiedad es *ortogonal*, ya que los vectores formados a partir de las columnas de la matriz son ortogonales. También podemos deducir el hecho de que el determinante, $|\boldsymbol{C}| = \pm 1$. Es fácil de ver en la definición de la matriz de rotación, que dos rotaciones sucesivas de un marco de coordenadas se pueden representar simplemente multiplicando las matrices de rotación de rotaciones individuales de la siguiente manera:

$$C'' = C' . C$$

donde la orientación C'' se obtiene experimentando primero una rotación C, seguida de una rotación C'.

Ejercicio

Encuentre la matriz de rotación que produce el marco de coordenadas de la mano derecha $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ siendo $\mathbf{i}' = 0.1\,\boldsymbol{i} + 0.2\,\boldsymbol{j} + \sqrt{1-0.01-0.04}\,\boldsymbol{k}$, y $\mathbf{j}' = -0.1\,\boldsymbol{i} - 0.97260950077\,\boldsymbol{j} + \sqrt{1-0.01-(0.9726095077)^2}\,\boldsymbol{k}$. Verificar los resultados obtenidos y determinar $\mathbf{k}'$. Realizar con MATLAB

```
%% Matriz de rotacion
% -------------------------------------------------------------------------
% UTN -FRH
% MECANICA ORBITAL
% SISTEMAS DE COORDENADAS Y MATRIZ DE ROTACION
% -------------------------------------------------------------------------
% Este programa obtiene la matriz de rotación [C]
%
% i       - Primer eje del sistema de referencia original
% j       - Segundo eje del sistema de referencia original
% k       - Tercer eje del sistema de referencia original
% C       - Matriz de rotación xyz a x'y'z'
% iprima  - Primer eje del nuevo sistema de referencia
% jprima  - Segundo eje del nuevo sistema de referencia
% kprima  - Tercer eje del nuevo sistema de referencia
%
% Función M del usuario requerida: niguna
% -----------------------------------------------
%% Limpieza
close all   % Cierra todas las ventanas abiertas
clear       % Borra todas las variables guardadas en el Workspace
clc         % Limpia el Command Window

%% Datos
i      = [1;0;0];
j      = [0;1;0];
k      = [0;0;1];
iprima = [0.1;0.2;sqrt(1-0.01-0.04)];
jprima = [-0.1;-0.97260950077;sqrt(1-0.01-(0.9726095077)^2)];

%% Desarrollo
kprima = cross(iprima,jprima);    % Producto vectorial
C      = [dot(iprima,i),dot(iprima,j),dot(iprima,k);...
          dot(jprima,i),dot(jprima,j),dot(jprima,k);...
          dot(jprima,i),dot(kprima,j),dot(kprima,k)];  % Matriz de rotacion
%% Resultado
fprintf('- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - \n')
fprintf('\nMatriz de rotacion\n')
fprintf('\n   Primero   debemos   verificar   que   iprima   y   jprima   son
perpendiculares,\n')
fprintf(' es decir, su producto escalar debe ser 0.\n')
fprintf('    Producto escalar   = %e\n',dot(iprima,jprima))
fprintf(' Una vez corroborado esto, podemos continuar con el ejercicio\n')
fprintf('\n Calculamos el tercer version de la triada\n')
fprintf('            k''    =    %+4.2f    i        %+4.2f    j        %+4.2f
k\n',kprima(1,1),kprima(2,1),kprima(3,1))
fprintf('\n Calculamos la matriz de transformacion\n')
fprintf('            %+4.2f %+4.2f %+4.2f\n',C(1,1),C(1,2),C(1,3))
fprintf('   C      = %+4.2f %+4.2f %+4.2f\n',C(2,1),C(2,2),C(2,3))
```

```
fprintf('            %+4.2f %+4.2f %+4.2f\n',C(3,1),C(3,2),C(3,3))
fprintf('\n Verificamos que el determinante sea 1\n')
fprintf('   Det(C) = %f\n',det(C))
fprintf('\n- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - \n')
```

Rotaciones principales

Las transformaciones de coordenadas más simples son las rotaciones sobre los ejes de un marco de coordenadas, llamadas rotaciones elementales. Una rotación positiva de $(OXYZ)$ sobre OX por el ángulo Φ está representada por la matriz de rotación

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,(\Phi) & sin(\Phi) \\ 0 & -sin(\Phi) & cos\,(\Phi) \end{pmatrix}$$

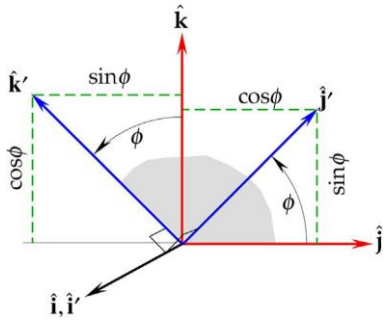


Figura 3. Rotación en eje 1 un ángulo Φ

mientras que la matriz de rotación para una rotación positiva alrededor de OY por el mismo el ángulo es

$$R_2 = \begin{pmatrix} cos\,(\Phi) & 0 & -sin(\Phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ sin(\Phi) & 0 & cos\,(\Phi) \end{pmatrix}$$

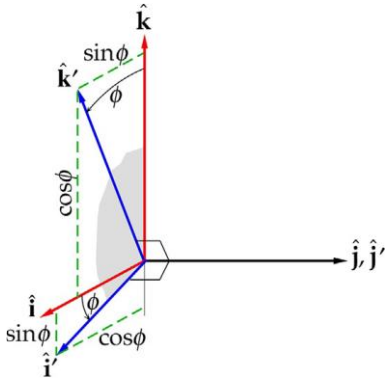


Figura 4. Rotación en eje 2 un ángulo Φ

De manera similar, una rotación positiva alrededor de OZ por Φ viene dada por

$$R_3 = \begin{pmatrix} cos\,(\Phi) & sin(\Phi) & 0 \\ -sin(\Phi) & cos\,(\Phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

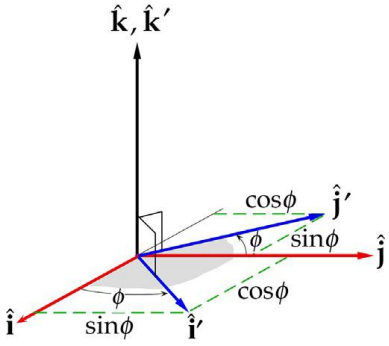


Figura 5. Rotación en eje 3 un ángulo Φ

Una transformación de coordenadas más complicada se puede derivar por múltiples rotaciones de un solo eje en una secuencia dada, utilizando las matrices de rotación elementales.

Ángulos de Euler

Ahora estamos en condiciones de considerar la *orientación*, o *actitud*, de un marco de coordenadas, en relación con otro marco. Una descripción de este tipo es bastante útil para representar la actitud de un vehículo de vuelo (o cualquier otro objeto), al que se une rígidamente un marco de coordenadas, en referencia a un segundo marco de coordenadas.

De la discusión anterior, está claro que se puede obtener una orientación general utilizando rotaciones sucesivas alrededor de los ejes del marco de referencia. El mayor número de rotaciones necesarias para especificar de forma única una orientación determinada, denominada grados de libertad de rotación, es tres. Por tanto, podemos emplear tres ángulos, cada uno con respecto a un eje de coordenadas en particular, para describir una orientación dada. Esta representación de la actitud mediante tres ángulos se denomina *representación de ángulo de Euler*, y los ángulos en cuestión se conocen como ángulos de Euler. La secuencia de rotaciones axiales es de suma importancia en la representación del ángulo de Euler.

Puede comprobarse este hecho girando un libro en tres rotaciones elementales de 90°, cada una sobre un eje diferente, y luego realizar las rotaciones sobre los mismos ejes en una secuencia diferente. La actitud final del libro será diferente en cada conjunto de rotaciones. Cada una de las 12 secuencias de ángulos de Euler posibles tiene una matriz de cosenos directores $[\boldsymbol{Q}]$, que es el producto de tres matrices de rotación elementales. Las seis secuencias simétricas de Euler son aquellas que comienzan y terminan con una rotación sobre el mismo eje.

$$\begin{array}{ll} [\mathbf{R}_1(\gamma)][\mathbf{R}_2(\beta)][\mathbf{R}_1(\alpha)] & [\mathbf{R}_1(\gamma)][\mathbf{R}_3(\beta)][\mathbf{R}_1(\alpha)] \\ [\mathbf{R}_2(\gamma)][\mathbf{R}_1(\beta)][\mathbf{R}_2(\alpha)] & [\mathbf{R}_2(\gamma)][\mathbf{R}_3(\beta)][\mathbf{R}_2(\alpha)] \\ \underline{[\mathbf{R}_3(\gamma)][\mathbf{R}_1(\beta)][\mathbf{R}_3(\alpha)]} & [\mathbf{R}_3(\gamma)][\mathbf{R}_2(\beta)][\mathbf{R}_3(\alpha)] \end{array}$$

Las secuencias asimétricas de Euler implican rotaciones alrededor de los tres ejes.

$$\begin{array}{ll} \underline{[\mathbf{R}_1(\gamma)][\mathbf{R}_2(\beta)][\mathbf{R}_3(\alpha)]} & [\mathbf{R}_1(\gamma)][\mathbf{R}_3(\beta)][\mathbf{R}_2(\alpha)] \\ [\mathbf{R}_2(\gamma)][\mathbf{R}_3(\beta)][\mathbf{R}_1(\alpha)] & [\mathbf{R}_2(\gamma)][\mathbf{R}_1(\beta)][\mathbf{R}_3(\alpha)] \\ [\mathbf{R}_3(\gamma)][\mathbf{R}_1(\beta)][\mathbf{R}_2(\alpha)] & [\mathbf{R}_3(\gamma)][\mathbf{R}_2(\beta)][\mathbf{R}_1(\alpha)] \end{array}$$

Una de las secuencias simétricas que tiene una aplicación frecuente en la mecánica espacial es la secuencia de ángulos de Euler "clásica", dada por:

$$[\boldsymbol{Q}] = [\boldsymbol{R_3}(\gamma)] \cdot [\boldsymbol{R_1}(\beta)] \cdot [\boldsymbol{R_3}(\alpha)] \quad (0° < \alpha < 360°, 0° < \beta < 180°, 0° \gamma < 360°)$$

$$[\boldsymbol{Q}] = \begin{bmatrix} -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma + \sin\alpha\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma \\ -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \cos\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma & \sin\beta\cos\gamma \\ \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$\tan\alpha = \frac{Q_{31}}{-Q_{32}} \quad \cos\beta = Q_{33} \quad \tan\gamma = \frac{Q_{13}}{Q_{23}}$$

Esta secuencia está subrayada en las secuencias simétricas y se ilustra a continuación:

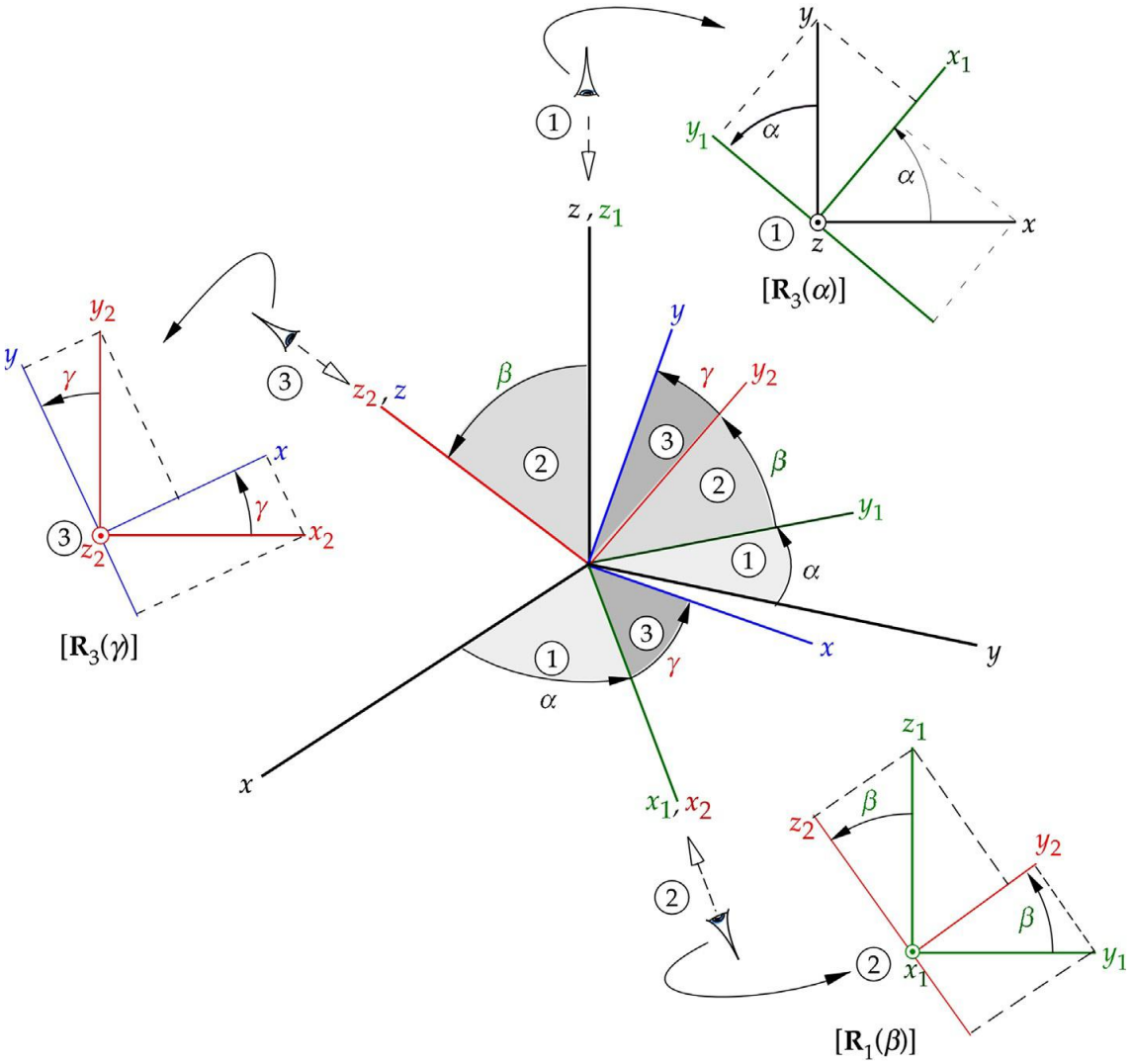


Figura 6 La secuencia clásica de Euler de tres rotaciones que transforma xyz en x'''y''''z''' . El "ojo" que mira hacia abajo a lo largo de un eje observa la rotación ilustrada alrededor de ese eje.

La primera rotación es alrededor del eje z, a través del ángulo α. Esta rotación convierte los ejes x e y en las direcciones x_1 e y_1, respectivamente. Visto desde el eje z, esta rotación aparece como se muestra en el detalle en la parte superior de la figura. La matriz de cosenos directores asociada con esta rotación es $[R_3(\alpha)]$. El subíndice significa que la rotación es alrededor de la dirección actual (3), que era el eje z (y ahora es el eje z_1). La segunda rotación, representada por $[\boldsymbol{R_1}(\beta)]$, es alrededor del eje x_1, a través del ángulo β necesario para rotar el eje z_1 en el eje z_2, que coincide con el eje z_0 deseado. Simultáneamente, y_1 rota en y_2. El detalle en la esquina inferior derecha de la figura muestra cómo aparece esta rotación cuando se ve desde la dirección x_1. $[\boldsymbol{R_3}(\gamma)]$ representa la tercera y última rotación, que rota el eje x_2 (anteriormente el eje x_1) y el eje y_2 a través del ángulo γ alrededor del eje z', de modo que se alinean con los ejes x' e y'

deseados, respectivamente. Esta rotación aparece desde la dirección z' como se muestra en el detalle a la izquierda de la figura

Ejercicio

La matriz de cosenos directores de la transformación de xyz a $x'y'z'$ es:

$$[\boldsymbol{Q}] = \begin{bmatrix} 0{,}64050 & 0{,}75309 & -0{,}15038 \\ 0{,}76737 & -0{,}63530 & 0{,}086823 \\ -0{,}30152 & -0{,}17101 & -0{,}98481 \end{bmatrix}$$

Encontrar los ángulos α, β, y γ de la secuencia clásica de Euler. Realizar con MATLAB

```
%% Angulos de Euler
% ------------------------------------------------------------------------
% UTN -FRH
% MECANICA ORBITAL
% SISTEMAS DE COORDENADAS Y MATRIZ DE ROTACION
% ------------------------------------------------------------------------
% Este programa encuentra los ángulos de la secuencia clásica simetrica de
% Euler dada por R3(gamma)*R1(beta)*R3(alpha) a partir de la matriz de
% cosenos directores.
%
% Q     - matriz de cosenos directores
% alpha - primer ángulo de la secuencia (grados)
% beta  - segundo ángulo de la secuencia (grados)
% gamma - tercer ángulo de la secuencia (grados)
%
% Función M del usuario requerida: dcm_to_euler
% Sub-función requerida: ninguna
% ------------------------------------------------------------------------
%% Limpieza
close all   % Cierra todas las ventanas abiertas
clear       % Borra todas las variables guardadas en el Workspace
clc         % Limpia el Command Window

%% Datos
Q      = [ 0.64050,  0.75309, -0.15038;
           0.76737, -0.63530,  0.086823;
          -0.30152, -0.17101, -0.98481];

%% Desarrollo
[alpha, beta, gamma] = dcm_to_euler(Q);

%% Resultado
fprintf('- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - \n')
fprintf('\nCosenos directores\n')
fprintf('\n Primero debemos verificar que la matriz es ortogonal, es
decir,\n')
fprintf(' el producto de Q por su transpuesta debe la matriz identidad I.\n')
fprintf('    [Q][Q]^T   = %e\n',dot(Q,transpose(Q)))
fprintf(' Una vez corroborado esto, podemos continuar con el ejercicio\n')
fprintf('\n Calculamos los angulos de Euler\n')
fprintf('   alfa = arctan(-Q31/Q32) = %+4.2f (0º <= alfa  <= 360º)\n',alpha)
fprintf('   beta = arccos(Q33)      = %+4.2f (0º <= beta  <= 180º)\n',beta)
fprintf('   alfa = arctan(-Q12/Q23) = %+4.2f (0º <= gamma <= 360º)\n',gamma)
```

```
fprintf('\n- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - \n')
```

Función M del usuario requerida: dcm_to_euler

```
function [alpha, beta, gamma] = dcm_to_euler(Q)
% ------------------------------------------------------------------------
% Esta función encuentra los ángulos de la secuencia clásica simetrica de
% Euler dada por R3(gamma)*R1(beta)*R3(alpha) a partir de la matriz de
% cosenos directores.
%
% Q     - matriz de cosenos directores
% alpha - primer ángulo de la secuencia (grados)
% beta  - segundo ángulo de la secuencia (grados)
% gamma - tercer ángulo de la secuencia (grados)
%
% Función M del usuario requerida: ninguna
% Sub-función requerida: atan2d_0_360
% ------------------------------------------------------------------------
alpha = atan2d_0_360(Q(3,1), -Q(3,2));
beta  = acosd(Q(3,3));
gamma = atan2d_0_360(Q(1,3), Q(2,3));


% ~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~
function t = atan2d_0_360(y, x)
% ------------------------------------------------------------------------
% Esta subfunción calcula el arco tangente de y/x en grados y coloca el
% resultado en el rango [0, 360].
% t - ángulo en grados
%
% Funciones M del usuario requeridas: Ninguna
% Sub-función requerida: ninguna
% ------------------------------------------------------------------------
if x == 0
    if y == 0
        t = 0;
    elseif y > 0
        t = 90;
    else
        t = 270;
    end
elseif x > 0
    if y >= 0
        t = atand(y / x);
    else
        t = atand(y / x) + 360;
    end
elseif x < 0
    if y == 0
        t = 180;
    else
        t = atand(y / x) + 180;
    end
end
end % atan2d_0_360
% ~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

end % dcm_to_euler
```

MARCO PERIFOCAL

El sistema de referencia perifocal es el 'sistema natural' para una órbita. Es un sistema de coordenadas cartesianas fijado en el espacio y centrado en el foco de la órbita. Su plano $\overline{xy}$ es el plano de la órbita, y su eje $\bar{x}$ está dirigido desde el foco a través del periapsis.

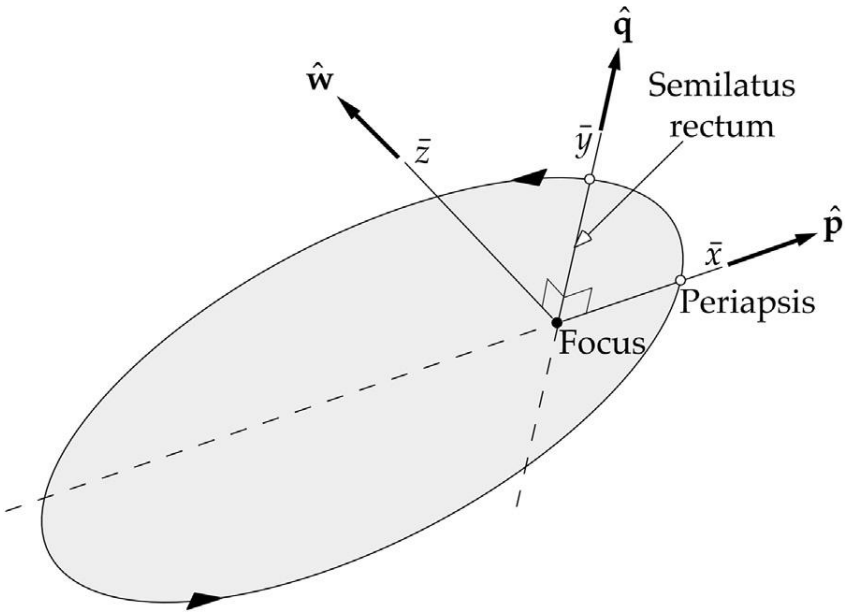


Figura 7. Marco perifocal.

El vector unitario a lo largo del eje $\bar{x}$ (la línea de ápsides) se denota como $\hat{\boldsymbol{p}}$. El eje $\bar{y}$, con el vector unitario $\hat{\boldsymbol{q}}$, se encuentra a $90°$ de anomalía verdadera respecto al eje $\bar{x}$. El eje $\bar{z}$ es normal al plano de la órbita en la dirección del vector de momento angular $\boldsymbol{h}$. El vector unitario del eje $\bar{z}$ es $\hat{\boldsymbol{w}}$,

$$\hat{\boldsymbol{w}} = \frac{\boldsymbol{h}}{h}$$

En el plano perifocal el vector posición puede escribirse como

$$\boldsymbol{r} = \bar{x}\hat{\boldsymbol{p}} + \bar{y}\hat{\boldsymbol{q}}$$

donde

$$\bar{x} = r\cos\theta \qquad\qquad \bar{y} = r\sin\theta$$

y r, la magnitud de $\boldsymbol{r}$, está dada por la ecuación de la órbita, $r = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e\cos\theta}$, queda como:

$$\boldsymbol{r} = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e\cos\theta}(\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{p}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{q}})$$

La velocidad se puede encontrar derivando el vector posición

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\bar{x}}\hat{\boldsymbol{p}} + \dot{\bar{y}}\hat{\boldsymbol{q}}$$

$$\dot{\bar{x}} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \qquad\qquad \dot{\bar{y}} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

$\dot{r}$ es la componente radial de la velocidad, v_r

$$\dot{r} = v_r = \frac{\mu}{h}e\sin\theta$$

$r\dot{\theta}$ es la componente tangencial de la velocidad $v_\perp$

$$r\dot{\theta} = v_\perp = \frac{\mu}{h}(1+e\cos\theta)$$

Así, $\dot{\bar{x}}$ e $\dot{\bar{y}}$ quedan como:

$$\dot{\bar{x}} = -\frac{\mu}{h}\sin\theta \qquad\qquad \dot{\bar{y}} = \frac{\mu}{h}(e+e\cos\theta)$$

De esta forma, reemplazando en la ecuación de la velocidad,

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\bar{x}}\hat{\boldsymbol{p}} + \dot{\bar{y}}\hat{\boldsymbol{q}} = \frac{\mu}{h}(-\sin\theta\ \hat{\boldsymbol{p}} + (e+e\cos\theta)\,\hat{\boldsymbol{q}}\,)$$

Entonces tenemos

$$\boldsymbol{r} = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e\cos\theta}(\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{p}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{q}}) \ \rightarrow\ \{\boldsymbol{r}\}_{\overline{xyz}} = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e\cos\theta}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mu}{h}(-\sin\theta\ \hat{\boldsymbol{p}} + (e+e\cos\theta)\,\hat{\boldsymbol{q}}\,) \ \rightarrow\ \{\boldsymbol{v}\}_{\overline{xyz}} = \frac{\mu}{h}\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ e+e\cos\theta\\ 0\end{pmatrix}$$

Ejercicio

Un satélite en una órbita terrestre que tiene una excentricidad de 0,3, un momento angular de $60.000\ km^2/s$ y una anomalía verdadera de 120°. ¿Cuáles son el vector de posición $\boldsymbol{r}$ y el vector de velocidad $\boldsymbol{v}$ en el sistema de referencia perifocal?

$$\boldsymbol{r} = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e\cos\theta}(\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{p}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{q}}) \qquad \boldsymbol{v} = \frac{\mu}{h}(-\sin\theta\ \hat{\boldsymbol{p}} + (e+e\cos\theta)\,\hat{\boldsymbol{q}}\,)$$

$$\boldsymbol{r} = \frac{60000^2}{398600}\frac{1}{1+0.3\cos 120}(\cos 120\,\hat{\boldsymbol{p}} + \sin 120\,\hat{\boldsymbol{q}}) \qquad \boldsymbol{v} = \frac{398600}{60000}(-\sin 120\ \hat{\boldsymbol{p}} + (0.3+0.3\cos 120)\,\hat{\boldsymbol{q}}\,)$$

$$\boldsymbol{r} = -5312.7\,\hat{\boldsymbol{p}} + 9201.9\,\hat{\boldsymbol{q}}\ (km) \qquad \boldsymbol{v} = -5.7533\,\hat{\boldsymbol{p}} - 1.3287\,\hat{\boldsymbol{q}}\ (km/s)$$

Ejercicio

Un satélite en una órbita terrestre que tiene en un instante dado la posición y velocidad:

$$\boldsymbol{r} = 7000\,\hat{\boldsymbol{p}} + 9000\,\hat{\boldsymbol{q}}\ (km)$$

$$\boldsymbol{v} = -3.3472\,\hat{\boldsymbol{p}} + 9.1251\,\hat{\boldsymbol{q}}\ (km/s)$$

Calcular el momento angular especifico h, la anomalía verdadera θ, y el vector excentricidad e

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{p}} & \hat{\boldsymbol{q}} & \hat{\boldsymbol{w}} \\ 7000 & 9000 & 0 \\ -3{,}3472 & 9{,}1251 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{h} = 94.000\,\hat{\boldsymbol{w}}\ (km^2/s)$$

$$h\ = 94.000\ km^2/s$$

La anomalía verdadera se mide desde el eje $\bar{x}$ positivo. Por definición del producto escalar, se tiene que: $\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} = r\cos\theta$, por lo tanto:

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} = \frac{7000\,\hat{\boldsymbol{p}} + 9000\,\hat{\boldsymbol{q}}}{\sqrt{7000^2+9000^2}}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} = \frac{7000}{11402} = 0{,}61394$$

Lo cual implica:

$$\theta = 52{,}125º \quad o \quad \theta = -52{,}125º$$

Dado que la componente en $\bar{y}$ de $\boldsymbol{r}$ es positiva, la anomalía verdadera debe estar entre 0° y 180°, por lo tanto: $\theta = 52{,}125º$

Finalmente, la excentricidad se encuentra con la fórmula de orbita:

$$r = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{(1 - e\cos\theta)}$$

$$\sqrt{7000^2 + 9000^2} = \frac{60000^2}{398600}\frac{1}{(1 - e\cos 52{,}125)}$$

$$e = 1.538$$

La trayectoria es una hipérbola

ECI (Earth-Centered Inertial)

En un momento dado, el vector de estado de un satélite está compuesto por su velocidad $\boldsymbol{v}$ y su aceleración orbital $\boldsymbol{a}$. La mecánica orbital se ocupa de especificar o predecir los vectores de estado en intervalos de tiempo.

De las clases anteriores sabemos que la ecuación que rige el vector de estado de un satélite que orbita la Tierra es, bajo los supuestos conocidos, una función del vector de posición **r** del satélite respecto al centro de la Tierra.

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r}$$

Las componentes de $\boldsymbol{r}$, y especialmente las de sus derivadas temporales ($\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ y $\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}}$), deben medirse en un sistema de referencia no rotatorio vinculado a la Tierra. Un sistema de coordenadas cartesianas no rotatorio, diestro y comúnmente utilizado es el sistema de referencia ecuatorial geocéntrico, también conocido como ECI mostrado en la siguiente figura.

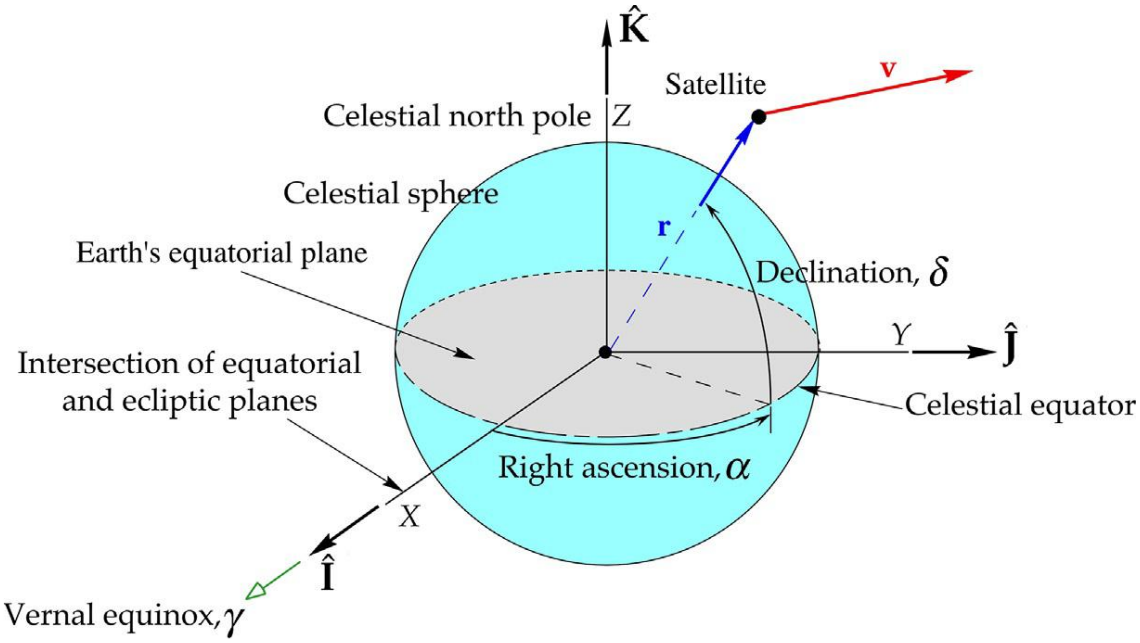


Figura 8. Marco de referencia ecuatorial geocéntrico o ECI.

El eje X apunta en la dirección del equinoccio vernal. El plano XY coincide con el plano ecuatorial terrestre, y el eje Z coincide con el eje de rotación de la Tierra y apunta hacia el norte. Los vectores unitarios $\hat{\boldsymbol{I}}$, $\hat{\boldsymbol{J}}$ y $\hat{\boldsymbol{K}}$ forman una tríada diestra.

Este marco de referencia ecuatorial geocéntrico no rotatorio sirve como sistema inercial para el problema de dos cuerpos Tierra-satélite. Sin embargo, no es verdaderamente inercial, ya que el centro de la Tierra está en constante aceleración hacia un tercer cuerpo, el Sol (y también la Luna), hecho que se omite en el planteo del problema de dos cuerpos.

En el sistema de referencia ecuatorial geocéntrico, el vector de posición se expresa en forma de componentes como:

$$\boldsymbol{r} = X\hat{\boldsymbol{I}} + Y\hat{\boldsymbol{J}} + Z\hat{\boldsymbol{K}}$$

$$\boldsymbol{v} = v_X\hat{\boldsymbol{I}} + \boldsymbol{v}_Y\hat{\boldsymbol{J}} + \boldsymbol{v}_Z\hat{\boldsymbol{K}}$$

Si r es la magnitud del vector posición, el vector posición también puede expresarse en la dirección radial (dirección que une el centro de la Tierra con el satélite)

$$\boldsymbol{r} = r\,\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}$$

La componente de $\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}$ en el sistema ecuatorial geocéntrico se expresa en función de la ascensión recta α y la declinación δ

$$\hat{\boldsymbol{u}}_r = l\hat{\boldsymbol{I}} + m\hat{\boldsymbol{J}} + n\hat{\boldsymbol{K}}$$

$$\hat{\boldsymbol{u}}_r = \cos\delta\cos\alpha\,\hat{\boldsymbol{I}} + \cos\delta\sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{J}} + \sin\delta\,\hat{\boldsymbol{K}}$$

De esto se deduce que la declinación se obtiene como $\delta = \arcsin n$. No existe ambigüedad de cuadrante, ya que por definición la declinación se encuentra entre $-90°$ y $+90°$, que es precisamente el rango de los valores principales de la función arco seno. Por lo tanto, $cos\,\delta$ no puede ser negativo. La ascensión recta se puede encontrar como $\alpha = \arccos(l/\cos\delta)$. Esto produce dos posibles valores de α entre $0°$ y $360°$. Para determinar el cuadrante correcto, se verifica el signo del coseno director $m = \cos\delta\sin\alpha$. Dado que $cos\,\delta$ no puede ser negativo, el signo de m coincide con el de $sin\,\alpha$. Si $sin\,\alpha > 0$, entonces α se encuentra entre $0°$ y $180°$; si $sin\,\alpha < 0$, α se ubica entre $180°$ y $360°$.

Aunque el vector de posición permite determinar la ascensión recta y la declinación, estos dos ángulos por sí solos no determinan el vector $\boldsymbol{r}$. Para ello, se necesita la distancia r, que se utiliza para obtener el vector de posición.

Ejercicio

Si el vector posición de la Estación Espacial Internacional (ISS) en el marco de referencia ECI es $\boldsymbol{r} = -5368\hat{\boldsymbol{I}} - 1784\hat{\boldsymbol{J}} + 3691\hat{\boldsymbol{K}}$ determinar la ascensión recta y declinación.

```
%% ECI
% ------------------------------------------------------------------------
% UTN -FRH
% MECANICA ORBITAL
% SISTEMAS DE COORDENADAS Y MATRIZ DE ROTACION
% ------------------------------------------------------------------------
% Este programa calcula la ascensión recta y la declinación a partir del
% vector posición en sistema ecuatorial geocéntrico
%
% Variables utilizadas:
% r       - Vector posición
% l, m, n - dirección de los cosenos de r
% ra      - ascensión recta (grados)
% dec     - declinación (grados)
%
% Función M del usuario requerida: ra_and_dec_from_r
% Subfunción requerida: ninguna
% ------------------------------------------------------------------------
%% Limpieza
close all   % Cierra todas las ventanas abiertas
clear       % Borra todas las variables guardadas en el Workspace
clc         % Limpia el Command Window

%% Datos
r = [-5368 -1784 3691];
```

```
%% Desarrollo
[ra dec] = ra_and_dec_from_r(r);

%% Resultado
fprintf('- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - \n')
fprintf('\Ascensión recta y declinación\n')
fprintf('\n r = [%g %g %g] (km)', r(1), r(2), r(3))
fprintf('\n Ascensión recta = %g deg', ra)
fprintf('\n declinación = %g deg', dec)
fprintf('\n- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - \n')
```

Función M del usuario requerida: ra_and_dec_from_r

```
function [ra, dec] = ra_and_dec_from_r(r)
% ------------------------------------------------------------------------
% Esta función calcula la ascensión recta y la declinación a partir del
% vector posición en sistema ecuatorial geocéntrico
%
% Variables utilizadas:
% r       - Vector posición
% l, m, n - dirección de los cosenos de r
% ra      - ascensión recta (grados)
% dec     - declinación (grados)
%
% Función M del usuario requerida: ninguna
% Subfunción requerida: ninguna
% ------------------------------------------------------------------------
l = r(1) / norm(r);
m = r(2) / norm(r);
n = r(3) / norm(r);
dec = asind(n);
if m > 0
    ra = acosd(l / cosd(dec));
else
    ra = 360 - acosd(l / cosd(dec));
end
end % ra_and_dec_from_r
```

Elementos orbitales y vector de estado

Para definir una órbita en el plano se requieren dos parámetros: la excentricidad e y el momento angular h. Otros parámetros, como el semieje mayor, la energía específica y (para una elipse) el período, se obtienen a partir de estos dos. Para localizar un punto en la órbita se necesita un tercer parámetro, la anomalía verdadera θ, que nos lleva al tiempo desde el perigeo. Describir la orientación de una órbita en tres dimensiones requiere tres parámetros adicionales, llamados ángulos de Euler.

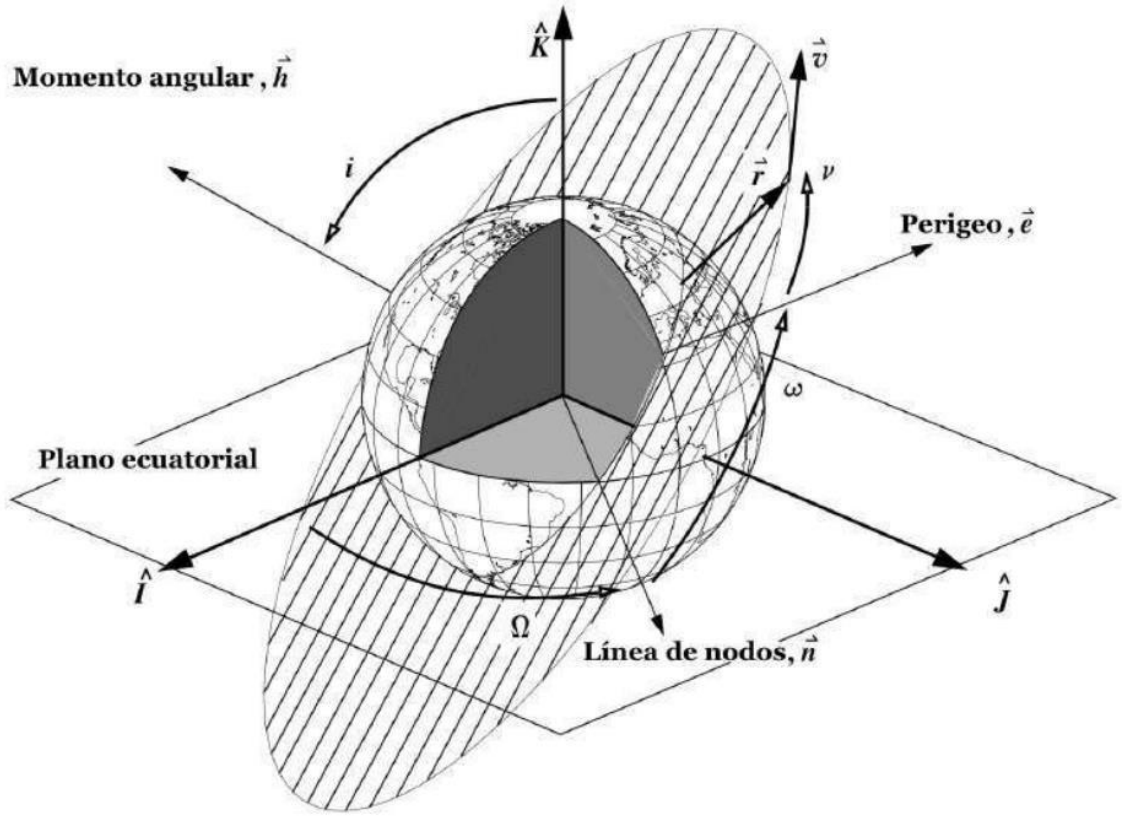


Figura 9. Relación entre plano perifocal y el plano ecuatorial

Primero, ubicamos la intersección del plano orbital con el plano ecuatorial (XY), esta es la línea de nodos. El punto en la línea de nodos donde la órbita pasa por encima del plano ecuatorial desde abajo se llama nodo ascendente. El vector de la línea de nodos N se extiende hacia afuera desde el origen a través del nodo ascendente. En el otro extremo de la línea de nodos, donde la órbita se sumerge por debajo del plano ecuatorial, está el nodo descendente. El ángulo entre el eje X positivo y la línea de nodos es el primer ángulo de Euler Ω, ascensión recta del nodo ascendente (varia entre $0°$ y $360°$).

El ángulo entre el plano orbital y el plano ecuatorial es la inclinación i, medida según la regla de la mano derecha (es decir, en sentido antihorario alrededor del vector de la línea de nodos desde el ecuador hasta la órbita). La inclinación también es el ángulo entre el eje Z positivo y la normal al plano de la órbita. El vector de momento angular $\boldsymbol{h}$ es normal al plano de la órbita. Por lo tanto, la inclinación i es el ángulo entre el eje Z positivo y $\boldsymbol{h}$. Este es el segundo ángulo de Euler y varía entre $0°$ y $180°$.

El perigeo se encuentra en la intersección del vector de excentricidad e con la trayectoria orbital. El tercer ángulo de Euler ω, el argumento del perigeo es el ángulo entre el vector

de la línea de nodos $\boldsymbol{N}$ y el vector de excentricidad e, medido en el plano de la órbita. Varía entre $0°$ y $360°$.

En resumen, los seis elementos orbitales son:

- h momento angular específico
- e excentricidad
- θ anomalía verdadera.
- i inclinación
- Ω o RAAN ascensión recta del nodo ascendente
- ω argumento del perigeo

Para obtener los elementos orbitales, a partir del vector posición y velocidad son necesarios una serie de cálculos:

1. Calcular la distancia, $r = \sqrt{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$
2. Calcular la velocidad, $v = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} = \sqrt{v_X^2 + v_Y^2 + v_Z^2}$
3. Calcular la velocidad radial, $v_r = \boldsymbol{r} \cdot \frac{\boldsymbol{v}}{r} = \frac{(Xv_X + Yv_Y + Zv_Z)}{r}$.

Si $v_r > 0$, el vehículo se aleja del perigeo, y si $v_r < 0$ se acerca al perigeo

4. Calcular el momento angular especifico

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{I}} & \hat{\boldsymbol{J}} & \hat{\boldsymbol{K}} \\ X & Y & Z \\ v_X & v_Y & v_Z \end{vmatrix}$$

5. Calcular el módulo del momento angular especifico, $h = \sqrt{\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{h}}$

Este es el primer elemento orbital

6. Calcular la inclinación

$$i = \cos^{-1}(h_Z/h)$$

Este es el segundo elemento orbital. Recuerde que i debe estar entre 0° y 180°, que es precisamente el rango (valores principales) de la función arco coseno. Por lo tanto, no

hay ambigüedad de cuadrante con la que lidiar aquí. Si 90° < i ≤ 180°, el momento angular h apunta en dirección sur. En ese caso, la órbita es retrógrada, lo que significa que el movimiento del satélite alrededor de la Tierra es opuesto a la rotación de la Tierra.

7. Calcular el vector que define la línea de nodos

$$\boldsymbol{N} = \widehat{\boldsymbol{K}} \times \boldsymbol{h} = \begin{vmatrix} \widehat{\boldsymbol{I}} & \widehat{\boldsymbol{J}} & \widehat{\boldsymbol{K}} \\ 0 & 0 & 1 \\ h_X & h_Y & h_Z \end{vmatrix}$$

8. Calcular el módulo de $\boldsymbol{N}$, $N = \sqrt{\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{N}}$

9. Calcular la ascensión recta del nodo ascendente (RAAN), $\Omega = cos^{-1}(N_x/N)$. Si Nx > 0, entonces Ω se encuentra en el primer o cuarto cuadrante. Si Nx < 0, entonces Ω se encuentra en el segundo o tercer cuadrante. Por lo tanto, Ny > 0 implica que 0 ≤ Ω < 180°, mientras que Ny < 0 implica que 180° ≤ Ω < 360°

$$\Omega = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{N_x}{N}\right) & si\ N_Y \geq 0 \\ 360 - \cos^{-1}\left(\frac{N_x}{N}\right) & si\ N_Y < 0 \end{cases}$$

10. Calcular el vector excentricidad

$$\boldsymbol{e} = \frac{1}{\mu}\left(\left(v^2 - \frac{\mu}{r}\right)\boldsymbol{r} - r\, v_r \boldsymbol{v}\right)$$

11. Calcular el módulo del vector excentricidad

$$e = \sqrt{\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e}}$$

12. Calcular el argumento del perigeo

$$\omega = \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{N}}{N} \cdot \frac{\boldsymbol{e}}{e}\right)$$

Si $N \cdot e > 0$, entonces ω se encuentra en el primer o cuarto cuadrante.

Si $N \cdot e < 0$, entonces ω se encuentra en el segundo o tercer cuadrante.

Para ubicar ω en el cuadrante adecuado, observa que el perigeo se encuentra por encima del plano ecuatorial $(0° \leq \omega < 180°)$ si e apunta hacia arriba (en la dirección positiva del eje Z) y que el perigeo se encuentra por debajo del plano (180° ≤ ω < 360°) si e apunta hacia abajo.

Por lo tanto, $e_Z \geq 0$ implica que $0° \leq \omega < 180°$, mientras que $e_Z < 0$ implica que $180° \leq \omega < 360°$.

$$\omega = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{N}}{N} \cdot \frac{\boldsymbol{e}}{e}\right) & si\ e_z \geq 0 \\ 360 - \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{N}}{N} \cdot \frac{\boldsymbol{e}}{e}\right) & si\ e_z < 0 \end{cases}$$

13. Calcular la anomalía verdadera

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{e}}{e} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{e}\right)$$

Si $\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{r} > 0$, entonces θ se encuentra en el primer o cuarto cuadrante. Si $\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{r} < 0$, entonces θ se encuentra en el segundo o tercer cuadrante. Para ubicar θ en el cuadrante adecuado, notar que si el satélite se está alejando del perigeo ($\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v} \geq 0$), entonces $0 \leq \theta < 180$, mientras que si el satélite se está acercando al perigeo ($\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v} < 0$), entonces $180 \leq \theta < 360$.

$$\theta = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{e}}{e} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{e}\right) & si\ v_r \geq 0 \\ 360 - \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{e}}{e} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) & si\ v_r < 0 \end{cases}$$

Ejercicio

Calcular los elementos orbitales clásicos a partir del vector de estado:

$$\boldsymbol{r} = -6045\hat{\boldsymbol{I}} - 3490\hat{\boldsymbol{J}} + 2500\hat{\boldsymbol{K}}\ (km)$$

$$\boldsymbol{v} = -3.457\hat{\boldsymbol{I}} + 6.618\hat{\boldsymbol{J}} + 2.533\hat{\boldsymbol{K}}\ (km/s)$$

```
%% COE a partir del VE
% ------------------------------------------------------------------------
% UTN -FRH
% MECANICA ORBITAL
% ELEMENTOS ORBITALES Y VECTOR DE ESTADO
% ------------------------------------------------------------------------
% Este programa se utiliza para obtener los elementos orbitales
% del vector de estado proporcionado en el ejemplo de clase.
%
% pi    - 3.1415926...
% deg   - factor para convertir entre grados y radianes
% mu    - parámetro gravitacional (km^3/s^2)
% r     - vector de posición (km) en el marco ecuatorial geocéntrico
% v     - vector de velocidad (km/s) en el marco ecuatorial geocéntrico
% coe   - elementos orbitales [h e RA incl w TA a]
%         donde h       = momento angular (km^2/s)
%               e       = excentricidad
%               RA      = ascensión recta del nodo ascendente (rad)
%               incl    = inclinación de la órbita (rad)
%               w       = argumento del perigeo (rad)
%               TA      = anomalía verdadera (rad)
%               a       = semieje mayor (km)
% T     - Período de una órbita elíptica (s)
%
% Función M del usuario requerida: coe_de_ve
% Subfunción requerida: ninguna
% ------------------------------------------------------------------------
%% Limpieza
close all   % Cierra todas las ventanas abiertas
clear all   % Borra todas las variables guardadas en el Workspace
clc         % Limpia el Command Window

%% Constantes auxiliares
deg = pi/180; % Conversión de grados a radianes
mu  = 398600; % Constante gravitacional de la Tierra (km^3/s^2) G*Me

%% Vector estado
r = [-6045, -3490, 2500];   % km
v = [-3.457, 6.618, 2.533]; % km/s

%% Calculo de elementos orbitales clásicos (COE)
coe = coe_from_sv(r, v, mu); % [h e RA incl w TA a]

%% Impresión de los datos de entrada y los resultados de salida
fprintf('-----------------------------------------------------\n');
fprintf(' UTN-FRH\n');
fprintf(' MECANICA ORBITAL 2024\n');
fprintf(' Elementos orbitales y vector de estado\n');
fprintf('-----------------------------------------------------\n');
```

```
fprintf(' Ejemplo COE de VE\n');
fprintf('\n Parametro gravitacional (km^3/s^2) = %g\n', mu);
fprintf('\n Vector de estado:\n');
fprintf('\n    r (km)   = [%g %g %g]', r(1), r(2), r(3));
fprintf('\n    v (km/s) = [%g %g %g]', v(1), v(2), v(3));
disp(' ');

fprintf('\n Momento angular (km^2/s)    = %g', coe(1));
fprintf('\n Excentricidad               = %g', coe(2));
fprintf('\n Ascensión recta (deg)       = %g', coe(3)/deg);
fprintf('\n Inclinación (deg)           = %g', coe(4)/deg);
fprintf('\n Argumento del perigeo (deg) = %g', coe(5)/deg);
fprintf('\n Anomalía verdadera (deg)    = %g', coe(6)/deg);
fprintf('\n Semieje mayor (km)          = %g', coe(7));

% Si la órbita es una elipse, calcular su periodo:
if coe(2) < 1
    T = 2*pi/sqrt(mu)*coe(7)^1.5;
    fprintf('\n Periodo:');
    fprintf('\n   Segundos = %g', T);
    fprintf('\n   Minutos = %g', T/60);
    fprintf('\n   Horas = %g', T/3600);
    fprintf('\n   Días = %g', T/24/3600);
end

fprintf('\n------------------------------------------------------\n');
```

Función M del usuario requerida: coe_de_ve

```
function coe = coe_from_sv(R,V,mu)
% ------------------------------------------------------------------------
%% Notas aclaratorias
% Esta función calcula los elementos orbitales clásicos (COE)
% a partir del vector de estado (R,V)
%
% mu    - parámetro gravitacional (km^3/s^2)
% R     - vector de posición en el marco ecuatorial geocéntrico (km)
% V     - vector de velocidad en el marco ecuatorial geocéntrico (km)
% r, v  - las magnitudes de R y V
% vr    - componente de velocidad radial (km/s)
% H     - el vector de momento angular (km^2/s)
% h     - la magnitud de H (km^2/s)
% incl  - inclinación de la órbita (rad)
% N     - el vector de la línea de nodos (km^2/s)
% n     - la magnitud de N
% cp    - producto cruzado de N y R
% RA    - ascensión recta del nodo ascendente (rad)
% E     - vector de excentricidad
% e     - excentricidad (magnitud de E)
% eps   - un número pequeño por debajo del cual se considera que
%         la excentricidad es cero
% w     - argumento del perigeo (rad)
% TA    - anomalía verdadera (rad)
% a     - semieje mayor (km)
% pi    - 3.1415926...
% coe   - vector de elementos orbitales [h e RA incl w TA a]
%
% Funciones M del usuario requeridas: Ninguna
```

```
% ------------------------------------------------------------------------


eps = 1.e-10;

% Calculo los módulos del vector posición y velocidad
r = norm(R);
v = norm(V);

% Calculo de velocidad radial
vr = dot(R,V)/r;

% CALCULO DE LOS PARAMETROS ORBITALES
%% Momento angular especifico y su modulo
H = cross(R,V);
h = norm(H);

%% Inclinación
incl = acos(H(3)/h);
% Recuerde que i debe estar entre 0° y 180°, que es precisamente el rango
% (valores principales) de la función arco coseno. Por lo tanto, no hay
% ambigüedad de cuadrante con la que lidiar aquí. Si 90° < i ≤ 180°, el
% momento angular h apunta en dirección sur. En ese caso, la órbita es
% retrógrada, lo que significa que el movimiento del satélite alrededor de
% la Tierra es opuesto a la rotación de la Tierra.

%% Ascensión recta del nodo ascendente (RAAN o Ω),
N = cross([0 0 1],H);
n = norm(N);
if n ~= 0
    if N(2) >= 0
        RA = acos(N(1)/n);
    else
        RA = 2*pi - acos(N(1)/n);
    end
else
    RA = 0;
end
% La ascensión recta del nodo ascendente, Ω = cos⁻¹(Nx/N).
% Si Nx > 0, entonces Ω se encuentra en el primer o cuarto cuadrante.
% Si Nx < 0, entonces Ω se encuentra en el segundo o tercer cuadrante.
% Por lo tanto, Ny > 0 implica que 0 ≤ Ω < 180°,
% mientras que Ny < 0 implica que 180° ≤ Ω < 360°.

%% Excentricidad
E = 1/mu*((v^2 - mu/r)*R - r*vr*V);
e = norm(E);

%% Argumento del perigeo
if n ~= 0
    if e > eps
        if E(3) >= 0
            w = acos(dot(N,E)/n/e);
        else
            w = 2*pi - acos(dot(N,E)/n/e);
        end
    else
        w = 0;
    end
```

```
else
    w = 0;
end
% Si N·e > 0, entonces ω se encuentra en el primer o cuarto cuadrante.
% Si N·e < 0, entonces ω se encuentra en el segundo o tercer cuadrante.
% Para ubicar ω en el cuadrante adecuado, observa que el perigeo
% se encuentra por encima del plano ecuatorial (0° ≤ ω < 180°) si e apunta
hacia arriba
% (en la dirección positiva del eje Z) y que el perigeo se encuentra por
debajo del plano
% (180° ≤ ω < 360°) si e apunta hacia abajo.
% Por lo tanto, eZ ≥ 0 implica que 0° ≤ ω < 180°, mientras que eZ < 0 implica
que
% 180° ≤ ω < 360°.

%% Anomalia verdadera
if e > eps
    if vr >= 0
        TA = acos(dot(E,R)/e/r);
    else
        TA = 2*pi - acos(dot(E,R)/e/r);
    end
else
    cp = cross(N,R);
    if cp(3) >= 0
        TA = acos(dot(N,R)/n/r);
    else
        TA = 2*pi - acos(dot(N,R)/n/r);
    end
end


%% Semieje mayor
a = h^2/mu/(1 - e^2);

%% Parámetros orbitales de salida
coe = [h e RA incl w TA a];
end %coe_from_sv
```

TRANSFORMACION ENTRE SISTEMAS DE REFERENCIA ECUATORIAL GEOCENTRICO Y PERIFOCAL

La siguiente figura ilustra la relación entre el plano perifocal y el sistema ecuatorial geocéntrico

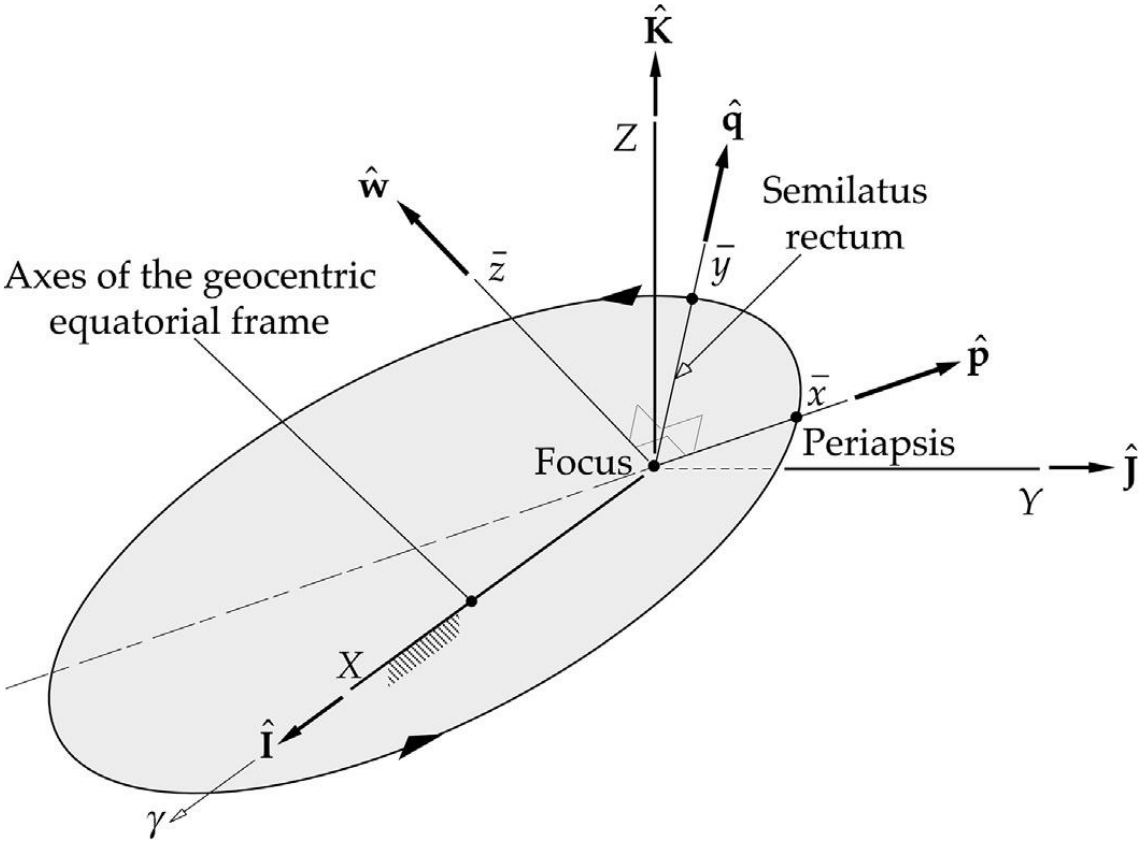


Figura 10. Sistema ecuatorial geocéntrico XYZ, y sistema perifocal $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

Reescribiendo las ecuaciones de posición y velocidad (vector estado) en términos matriciales se obtiene:

$$\boldsymbol{r} = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e\cos\theta}(\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{p}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{q}}) \quad \rightarrow \quad \{\boldsymbol{r}\}_{\bar{x}} = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e\cos\theta}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mu}{h}(-\sin\theta\;\hat{\boldsymbol{p}} + (e+e\cos\theta)\,\hat{\boldsymbol{q}}) \quad \rightarrow \quad \{\boldsymbol{v}\}_{\bar{x}} = \frac{\mu}{h}\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ e+e\cos\theta\\ 0\end{pmatrix}$$

La transformación del marco ecuatorial geocéntrico al marco perifocal puede lograrse mediante la secuencia clásica de ángulos de Euler $[\boldsymbol{R_3}(\gamma)][\boldsymbol{R_1}(\beta)][\boldsymbol{R_3}(\alpha)]$. En este caso, el primer ángulo de rotación es Ω, la ascensión recta del nodo ascendente o RAAN. La segunda rotación es i, el

ángulo de inclinación orbital, y el tercer ángulo de rotación es ω, el argumento del perigeo. Ω se mide alrededor del eje Z del marco ecuatorial geocéntrico, i se mide alrededor de la línea de nodos, y ω se mide alrededor del eje $\bar{z}$ del marco perifocal. Por lo tanto, la matriz de cosenos directores $[\boldsymbol{Q}]_{X\bar{x}}$ de la transformación de XYZ a $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ es

$$[\boldsymbol{Q}]_{X\bar{x}} = [\boldsymbol{R_3}(\omega)] \cdot [\boldsymbol{R_1}(i)] \cdot [\boldsymbol{R_3}(\Omega)]$$

De esta forma, la transformación del plano perifocal al sistema ecuatorial geocéntrico es:

$$\{\boldsymbol{r}\}_X = [\boldsymbol{Q}]_{X\bar{x}} \cdot \{\boldsymbol{r}\}_{\bar{x}}$$

$$\{\boldsymbol{v}\}_X = [\boldsymbol{Q}]_{X\bar{x}} \cdot \{\boldsymbol{v}\}_{\bar{x}}$$

Ejercicio

A partir de los elementos orbitales:

```
Momento angular (km^2/s)          = 58311.7
Excentricidad                     = 0.171212
Ascensión recta (deg)             = 255.279
Inclinación (deg)                 = 153.249
Argumento del perigeo (deg)       = 20.0683
Anomalía verdadera (deg)          = 28.4456
```

Determinar el vector de estado

```
%% VE de COE
% ------------------------------------------------------------------------
% UTN -FRH
% MECANICA ORBITAL 2024
% ELEMENTOS ORBITALES Y VECTOR DE ESTADO
% ------------------------------------------------------------------------
% Este programa obtiene el vector de estados (r,v) en el sistema ecuatorial
% geocentrico, a partir de los elementos orbitales clasicos (coe)
% pi    - 3.1415926...
% deg   - factor para convertir entre grados y radianes
% mu    - parámetro gravitacional (km^3/s^2)
% coe   - elementos orbitales [h e RA incl w TA a] donde:
%             h    = momento angular (km^2/s)
%             e    = excentricidad
%             RA   = ascensión recta del nodo ascendente (rad)
%             incl = inclinación de la órbita (rad)
%             w    = argumento del perigeo (rad)
%             TA   = anomalía verdadera (rad)
%             a    = semieje mayor (km)
```

```
% r     - vector de posición (km) en el marco ecuatorial geocéntrico
% v     - vector de velocidad (km/s) en el marco ecuatorial geocéntrico
%
% Función M del usuario requerida: sv_from_coe
% ---------------------------------------------
%% Limpieza
close all   % Cierra todas las ventanas abiertas
clear all   % Borra todas las variables guardadas en el Workspace
clc         % Limpia el Command Window

%% Constantes auxiliares
deg = pi/180; % Conversion de grados a radianes
mu  = 398600; % Constante gravitacional de la Tierra (km^3/s^2) G*Me

%% Elementos orbitales clasicos (COE)
h    = 58311.7;
e    = 0.171212;
RA   = 255.279;
incl = 153.249;
w    = 20.0683;
TA   = 28.4456;
coe  = [h, e, RA*deg, incl*deg, w*deg, TA*deg];

%% Calculo de vector estado
[r, v] = sv_from_coe(coe, mu);

%% Vector estado
fprintf('-----------------------------------------------------\n');
fprintf(' UTN-FRH\n');
fprintf(' MECANICA ORBITAL 2024\n');
fprintf(' Elementos orbitales y vector de estado\n');
fprintf('-----------------------------------------------------')
fprintf('\n VE a partir de COE\n')
fprintf('\n Parámetro gravitacional (km^3/s^2) = %g\n', mu)
fprintf('\n Momento angular (km^2/s)           = %g', h)
fprintf('\n Excentricidad                      = %g', e)
fprintf('\n Ascensión recta (deg)              = %g', RA)
fprintf('\n Inclinación (deg)                  = %g', incl)
fprintf('\n Argumento del perigeo (deg)        = %g', w)
fprintf('\n Anomalía verdadera (deg)           = %g', TA)
fprintf('\n\n Vector de estado:')
fprintf('\n     r (km)   = [%g %g %g]', r(1), r(2), r(3))
fprintf('\n     v (km/s) = [%g %g %g]', v(1), v(2), v(3))
fprintf('\n-----------------------------------------------------\n')
```

Función M del usuario requerida: sv_from_coe

```
function [r, v] = sv_from_coe(coe,mu)
% ------------------------------------------------------------------------
% Esta función calcula el vector de estado (r,v) a partir de los
% elementos orbitales clásicos (coe).
%
% mu   - parámetro gravitacional (km^3/s^2)
% coe  - elementos orbitales [h e RA incl w TA]
% donde
%       h    - momento angular (km^2/s)
%       e    - excentricidad
%       RA   - ascensión recta del nodo ascendente (rad)
%       incl - inclinación de la órbita (rad)
```

```
%       w    - argumento del perigeo (rad)
%       TA   - anomalía verdadera (rad)
% R3_w - Matriz de rotación sobre el eje z a través del ángulo w
% R1_i - Matriz de rotación sobre el eje x a través del ángulo i
% R3_W - Matriz de rotación sobre el eje z a través del ángulo RA
% Q_pX - Matriz de transformación de perifocal a marco ecuatorial geocéntrico
% rp   - vector de posición en el marco perifocal (km)
% vp   - vector de velocidad en el marco perifocal (km/s)
% r    - vector de posición en el marco ecuatorial geocéntrico (km)
% v    - vector de velocidad en el marco ecuatorial geocéntrico (km/s)
%
% Funciones M del usuario requeridas: Ninguna
% ------------------------------------------------
%% Datos de entrada
h    = coe(1);
e    = coe(2);
RA   = coe(3);
incl = coe(4);
w    = coe(5);
TA   = coe(6);

%% rp y vp
rp = (h^2/mu) * (1/(1 + e*cos(TA))) * (cos(TA)*[1;0;0] + sin(TA)*[0;1;0]);
vp = (mu/h) * (-sin(TA)*[1;0;0] + (e + cos(TA))*[0;1;0]);

%% Matriz de rotación sobre el eje z a través del ángulo w
R3_W = [ cos(RA) sin(RA) 0
        -sin(RA) cos(RA) 0
         0 0 1];

%% Matriz de rotación sobre el eje x a través del ángulo i
R1_i = [1 0 0
        0 cos(incl) sin(incl)
        0 -sin(incl) cos(incl)];

%% Matriz de rotación sobre el eje z a través del ángulo w
R3_w = [ cos(w) sin(w) 0
        -sin(w) cos(w) 0
         0 0 1];

%% Matriz de transformación de perifocal a marco ecuatorial geocéntrico
Q_pX = (R3_w*R1_i*R3_W)';

%% Vector estado
r = Q_pX*rp;
v = Q_pX*vp;

% Convertir de columna a fila:
r = r';
v = v';
end
% ------------------------------------------------------------------------
```

OTROS ELEMENTOS ORBITALES

Si analizamos los elementos orbitales clásicos definidos previamente, nos encontraremos que existen determinadas configuraciones de orbitas donde estos no están definidos. Por ejemplo, si consideramos una órbita circular ($e = 0$), vemos que el argumento de perigeo queda definido, ya que no existe perigeo

$$\omega = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\dfrac{\boldsymbol{N}}{N}\cdot\dfrac{\boldsymbol{e}}{e}\right) & si\ e_z \geq 0 \\ 360 - \cos^{-1}\left(\dfrac{\boldsymbol{N}}{N}\cdot\dfrac{\boldsymbol{e}}{e}\right) & si\ e_z < 0 \end{cases}$$

A su vez, tampoco podemos medir la anomalía verdadera, porque esta se media desde el perigeo

$$\theta = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\dfrac{\boldsymbol{e}}{e}\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right) & si\ v_r \geq 0 \\ 360 - \cos^{-1}\left(\dfrac{\boldsymbol{e}}{e}\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right) & si\ v_r < 0 \end{cases}$$

Otros valores que generan que los elementos orbitales no estén definidos son las orbitas ecuatoriales ($i = 0º$ o $i = 180º$), ya que en estos casos el plano orbital y el plano ecuatorial, coinciden, no existiendo en este caso la línea de nodos

$$\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{i=0º\ o\ i=180º}} = \widehat{\boldsymbol{K}} \times \boldsymbol{h} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{I}} & \hat{\boldsymbol{J}} & \widehat{\boldsymbol{K}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & h_Z \end{vmatrix}$$

Por lo que no se puede medir el RAAN

$$\Omega = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\dfrac{N_x}{N}\right) & si\ N_Y \geq 0 \\ 360 - \cos^{-1}\left(\dfrac{N_x}{N}\right) & si\ N_Y < 0 \end{cases}$$

Ni el argumento de perigeo

$$\omega = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\dfrac{\boldsymbol{N}}{N}\cdot\dfrac{\boldsymbol{e}}{e}\right) & si\ e_z \geq 0 \\ 360 - \cos^{-1}\left(\dfrac{\boldsymbol{N}}{N}\cdot\dfrac{\boldsymbol{e}}{e}\right) & si\ e_z < 0 \end{cases}$$

En resumen, tenemos la siguiente tabla

Elemento orbital	Rango de valores	Indefinido
$\boldsymbol{h = \lvert h\rvert = \lvert r \times v\rvert}$	Depende del tipo de orbita	Nunca
$\boldsymbol{e = \lvert e\rvert = \left\lvert \frac{1}{\mu}\left(\left(v^2 - \frac{\mu}{r}\right) r - r\, v_r v\right)\right\rvert}$	Depende del tipo de orbita	Nunca
$\boldsymbol{\theta = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{e}{e}\cdot\frac{r}{e}\right) & si\ v_r \geq 0 \\ 360 - \cos^{-1}\left(\frac{e}{e}\cdot\frac{r}{e}\right) & si\ v_r < 0 \end{cases}}$	Depende del tipo de orbita	Cuando $e = 0$ (órbitas circulares)
$\boldsymbol{i = \cos^{-1}(h_z/h)}$	$0° \leq i \leq 180$	Nunca
$\boldsymbol{\Omega = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{N_x}{N}\right) & si\ N_Y \geq 0 \\ 360 - \cos^{-1}\left(\frac{N_x}{N}\right) & si\ N_Y < 0 \end{cases}}$	$0° \leq \Omega \leq 360$	Cuando $i = 0$ o $i = 180$ (órbitas ecuatoriales)
$\boldsymbol{\omega = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{N}{N}\cdot\frac{e}{e}\right) & si\ e_z \geq 0 \\ 360 - \cos^{-1}\left(\frac{N}{N}\cdot\frac{e}{e}\right) & si\ e_z < 0 \end{cases}}$	$0° \leq \omega \leq 360$	Cuando $e = 0$ (órbitas circulares) y/o cuando $i = 0$ o $i = 180$ (órbitas ecuatoriales)

Para estos casos definimos unos nuevos elementos orbitales

Elemento orbital	Rango de valores	Cuando usarlos	Que reemplaza
$\boldsymbol{u = \arccos\left(\frac{N \cdot r}{N\, r}\right)}$	$0 \leq u \leq 360$	Cuando $i \neq 0$ o $i \neq 180$ y $e = 0$	Reemplaza θ y ω
$\boldsymbol{l_\omega = \arccos\left(\frac{e_I}{e}\right)}$	$0 \leq l_\omega \leq 360$	Cuando $i = 0$ o $i = 180$ y $e \neq 0$	Reemplaza Ω y ω
$\boldsymbol{l_{true} = \arccos\left(\frac{r_I}{r}\right)}$	$0 \leq l_{true} \leq 360$	Cuando $i = 0$ o $i = 180$ y $e = 0$	Reemplaza θ, Ω y ω

Argumento de latitud

Cuando un satélite está en una órbita circular, su argumento de perigeo (ω) y su anomalia verdadera (θ) no están definidas. En este caso utilizamos el argumento de latitud u, que indica la ubicación del satélite en la órbita. Es el ángulo medido entre el vector nodal $\boldsymbol{N}$ y el vector posición del satélite $\boldsymbol{r}$

$$\cos u = \frac{\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{r}}{N\, r}$$

$$u = \arccos\left(\frac{\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{r}}{N\, r}\right)$$

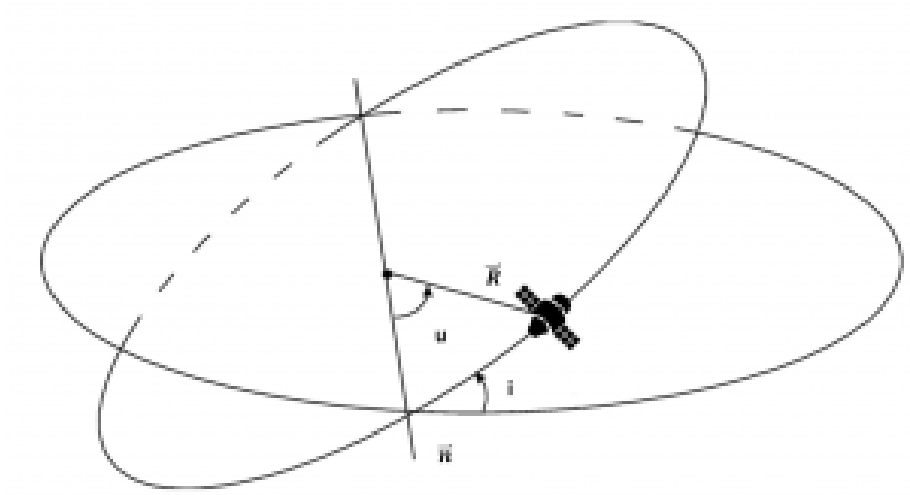


Figura 11. Argumento de latitud

El argumento de latitud puede tomar cualquier valor entre 0º y 360º, por lo que es necesario realizar una comprobación en el semiplano. Como se puede observar, si la tercera componente del vector posición es negativa ($r_z < 0$), entonces el argumento de latitud se encuentra en el segundo semiplano ($180º < u < 360º$).

Longitud del perigeo

Cuando un satélite está en órbita ecuatorial, no tiene vector nodal $\boldsymbol{N}$ y por lo tanto el RAAN (Ω) y el argumento de perigeo (ω) no están definidos. En este caso, utilizamos la longitud del perigeo l_ω que indica la orientación de la órbita, o donde se encuentra su perigeo. Es el ángulo medido entre la dirección del equinoccio vernal ($\check{\boldsymbol{I}}$) y el vector excentricidad $\boldsymbol{e}$ que apunta al perigeo

$$\cos l_\omega = \frac{\check{\boldsymbol{I}} \cdot \boldsymbol{e}}{e}$$

$$l_\omega = \arccos\left(\frac{e_I}{e}\right)$$

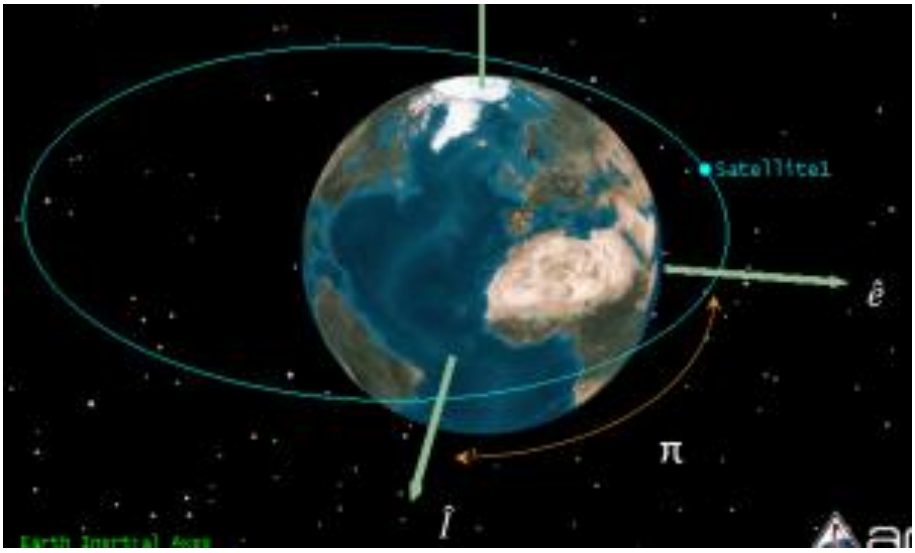


Figura 12. Longitud verdadera del perigeo

La longitud verdadera del perigeo puede tomar cualquier valor entre 0º y 360º, por lo que es necesario realizar una comprobación en el semiplano. Como se puede observar en la figura anterior, si la componente $e_J < 0$, entonces la longitud verdadera del perigeo se encuentra en el segundo semiplano $(180 < l_\omega < 360)$

Longitud verdadera

Cuando un satélite está en una órbita ecuatorial y es circular, no tiene vector nodal $\boldsymbol{N}$ y por lo tanto el RAAN (Ω), el argumento de perigeo (ω) y la anomalía verdadera (θ) no están definidas. En este caso, usamos la longitud verdadera l_{true} que indica la ubicación del satélite en su órbita. Por lo tanto, es el ángulo medido entre la dirección del equinoccio vernal ($\check{\boldsymbol{I}}$) y el vector posición ($\boldsymbol{r}$)

$$\cos l_{true} = \frac{\check{\boldsymbol{I}} \cdot \boldsymbol{r}}{r}$$

$$l_{true} = \arccos\left(\frac{r_I}{r}\right)$$

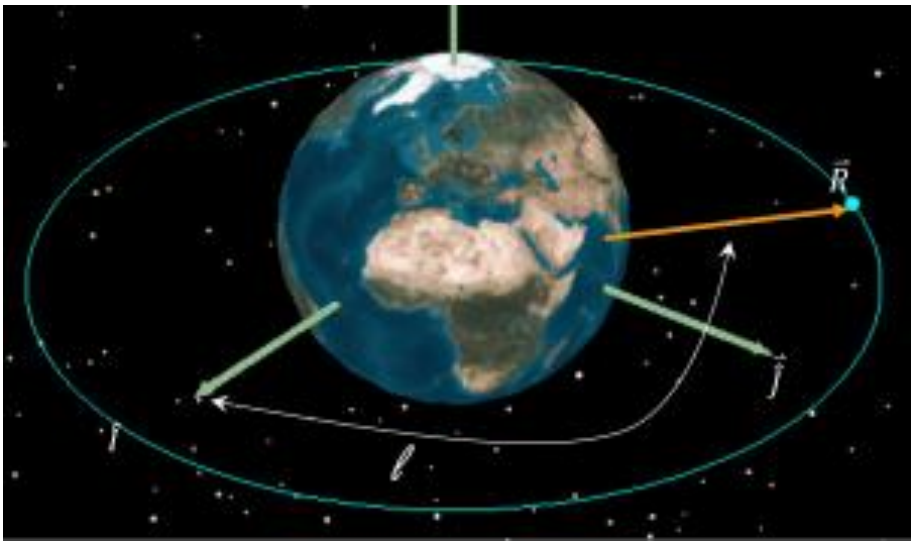


Figura 13. Longitud verdadera

La longitud puede tomar cualquier valor entre 0 y 360, por lo tanto es necesario realizar una comprobación en el semiplano. Como se puede observar en la figura anterior, si la componente $r_J < 0$, entonces la longitud verdadera se encuentra en el segundo semiplano $(180 < l_{true} < 360)$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Para los siguientes vectores estado:

1 $$\begin{cases} \boldsymbol{r} = 0\,\hat{\boldsymbol{I}} + 0\,\hat{\boldsymbol{J}} + 10.000\,\hat{\boldsymbol{K}}\ (km) \\ \boldsymbol{v} = 6\,\hat{\boldsymbol{I}} + 0\,\hat{\boldsymbol{J}} + 0\,\hat{\boldsymbol{K}}\ (km/s) \end{cases}$$

2 $$\begin{cases} \boldsymbol{r} = 10.000\,\hat{\boldsymbol{I}} + 0\,\hat{\boldsymbol{J}} + 0\,\hat{\boldsymbol{K}}\ (km) \\ \boldsymbol{v} = 0\,\hat{\boldsymbol{I}} + 4.464\,\hat{\boldsymbol{J}} - 4.464\,\hat{\boldsymbol{K}}\ (km/s) \end{cases}$$

3 $$\begin{cases} \boldsymbol{r} = 0\,\hat{\boldsymbol{I}} - 7.000\,\hat{\boldsymbol{J}} + 0\,\hat{\boldsymbol{K}}\ (km) \\ \boldsymbol{v} = 9\,\hat{\boldsymbol{I}} + 0\,\hat{\boldsymbol{J}} + 0\,\hat{\boldsymbol{K}}\ (km/s) \end{cases}$$

a) ¿Dónde se encuentra actualmente el satélite? Graficar

b) ¿Cuál es el ángulo de trayectoria de vuelo en su posición actual?

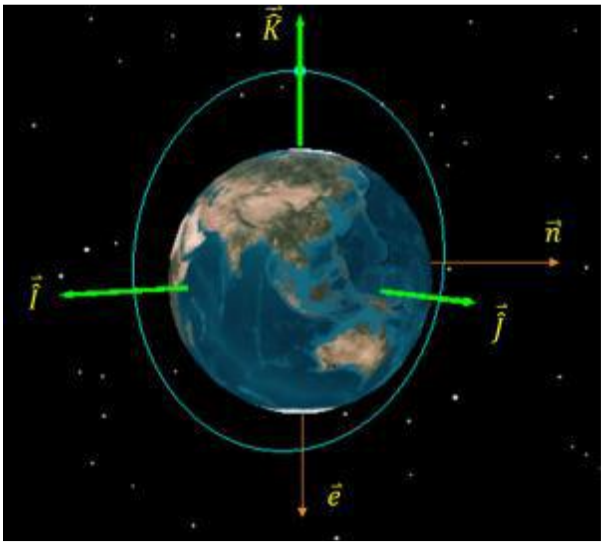
c) ¿Cuál es el momento angular específico de la órbita?

d) ¿Cuáles son sus elementos orbitales?

Ejercicio 1

¿Dónde se encuentra actualmente el satélite?

Sobre el polo norte. Esto se debe porque el vector de posición solo tiene un componente positivo. La imagen ilustra un escenario donde un satélite se encuentra actualmente sobre el Polo Norte.



¿Cuál es el ángulo de trayectoria de vuelo en su posición actual?

El ángulo de trayectoria de vuelo es cero, esto es porque los vectores de posición y velocidad son perpendiculares entre si (su producto escalar es cero).

$$\tan\gamma = \frac{v_r}{v_\perp}$$

$$\check{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = (0,0,1)$$

$$v_r = \boldsymbol{v} \cdot \check{\boldsymbol{r}} = (6,0,0) \cdot (0,0,1) = (0,0,0)$$

$$\tan\gamma = 0 \rightarrow \gamma = 0$$

¿Cual es el vector del momento angular específico, $\boldsymbol{h}$ de la órbita?

$$\vec{h} = \vec{R} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 10000 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 60000\,\hat{\jmath}\ \ km^2/s$$

$$\vec{h} = 60000\,\hat{\jmath}\ \ km^2/s$$

¿Cuál es el semieje mayor, a, de la órbita?

$$\varepsilon = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{R} = \frac{6^2}{2} - \frac{389600.5}{10000} = -21.86\ km^2/s^2$$

$$a = -\frac{\mu}{2\varepsilon} = -\frac{398600.5}{2\,(-21.68)} = 9117\ km$$

¿Cuál es la excentricidad, e , de la órbita?

Método 1. Utilizando la forma larga de la ecuación del vector de excentricidad; sin embargo, en este caso se simplificó considerablemente, ya que $\vec{R} \times \overrightarrow{V = 0}$

$\vec{e} = \frac{1}{\mu}[(V^2 - \frac{\mu}{R})\vec{R} - (\vec{R}\cdot\vec{V})\vec{V}] = \frac{1}{389600.5}[(6^2 - \frac{398600.5}{10000})10000\hat{K} - 0] = -0.0968\hat{K}$

$e = \vec{e} = 0.0968$

Método 2. Utilizr la forma del producto escalar de la ecuación del vector de excentricidad.

$$\vec{e} = \frac{1}{\mu}(\vec{V} \times \vec{h}) - \frac{\vec{R}}{|R|}$$

$$\vec{V} \times \vec{h} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 60000 & 0 \end{vmatrix} = 360000\,\hat{k}\ \ km^2/s$$

$$\vec{e} = \frac{1}{398600.5}(360000\,\hat{k}) - \frac{10000\,\hat{k}}{10000} = -0.0968\,\vec{k}$$

$$\vec{e} = 0.0968$$

¿Cuál es su inclinación, i?

Dado que el vector de posición solo tiene una componente en $\hat{k}$,

$$i = 90°$$

Alternativamente, puede calcular esto mediante la ecuación:

$$i = \cos^{-1}\left(\frac{h_k}{h}\right)$$

A partir de 3,

$$\vec{h} = 60000\,\hat{\jmath}\ \ km^2/s$$

La componente k de $\vec{h}$ es 0, por lo tanto,

$$i = \cos^{-1}(0) = 90°$$

$$i = 90°$$

¿Cuál es su RAAN, Ω?

Alternativamente, pueden calcular la RAAN mediante la ecuación:

$$\Omega = \cos^{-1}\left(\frac{n^i}{n}\right)$$

Primero, deberemos encontrar el vector del nodo ascendente $\vec{n} = \vec{K} \times \vec{h}$

$$\vec{K} \times \vec{h} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 60000 & 0 \end{vmatrix} = -60000\,\hat{\imath}\ \ km^2/s$$

$$\Omega = \cos^{-1}(-60000/60000) = \cos^{-1}(-1)$$

$$\Omega = 180°$$

¿Cuál es su argumento de perigeo,ω ?

Dado que el vector del nodo ascendente, $\vec{n}$, solo tiene un componente negativo $\hat{\imath}$y el vector de excentricidad pasa por el polo sur,

$$\omega = \ 270°$$

Alternativamente, se puede calcular el argumento del perigeo mediante la ecuación:

$$\omega = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{n}\,.\vec{e}}{n\ e}\right)$$

ya que

$$\vec{n} = -60000\,\hat{\imath}$$

y

$$\vec{e} = -0.0968\,\hat{k}$$

Su producto escalar es igual a cero. Por lo tanto,

$$\omega = \cos^{-1}(0) = 90°\ \ o\ \ 270°$$

Sin embargo, como $e_k\ < 0$,

$$\omega = 270°$$

¿Cuál es la anomalía verdadera del satélite, θ?

Dado que el satélite se encuentra actualmente en el apogeo,

$$\theta = 180°$$

Alternativamente, se puede calcular la anomalía verdadera mediante la ecuación:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{(-0.0968)(10000)}{(0.0968)(10000)}\right)$$

$$\theta = \cos^{-1}(-1)$$

$$\theta = 180°$$

Esto también verifica que la $v_r = \frac{\mu}{h} e \sin\theta = 0$