UTN HAEDO

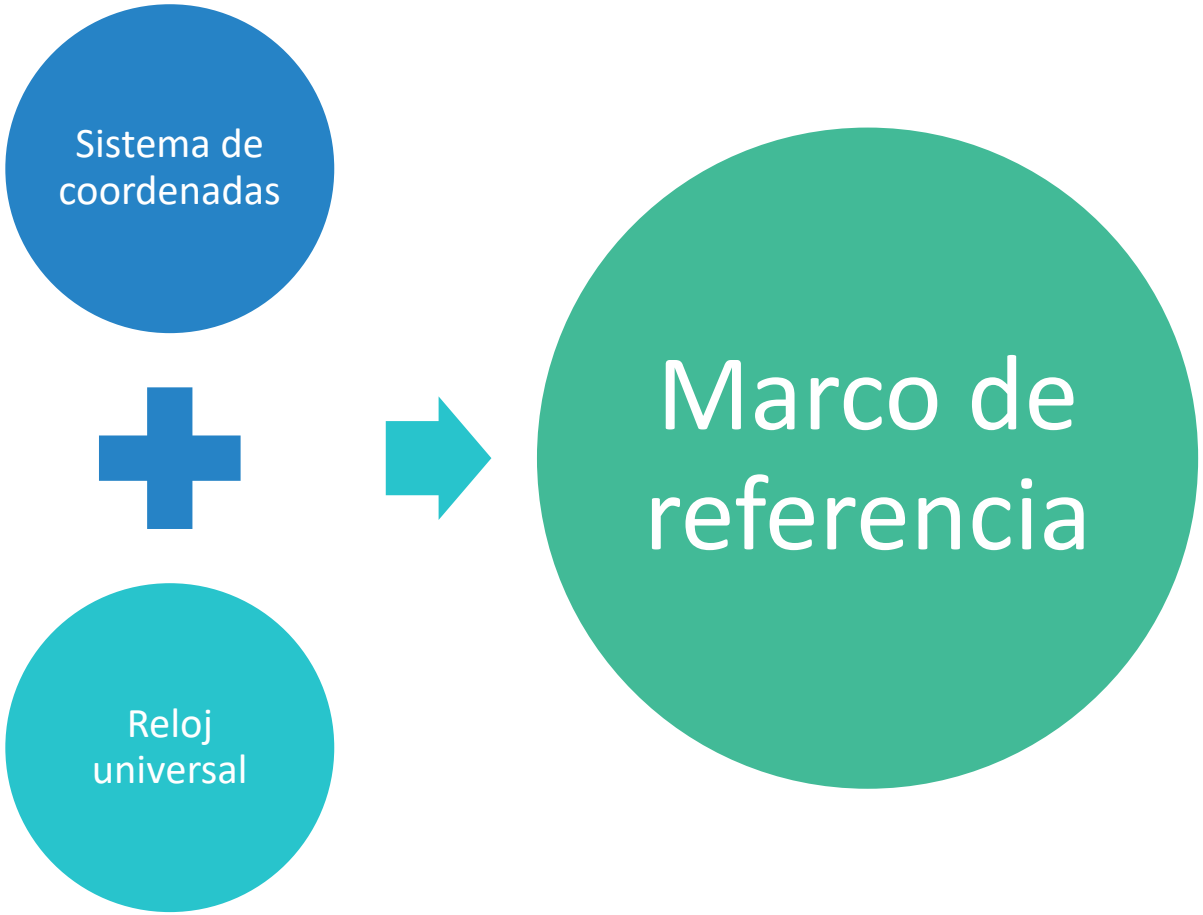
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL HAEDO

MECÁNICA ORBITAL

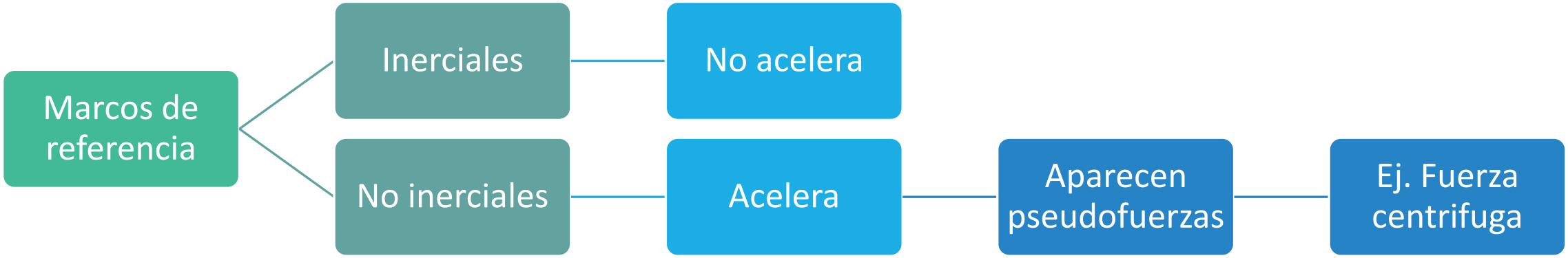
ELEMENTOS ORBITALES

Marco de referencia

Rastreamos el movimiento de partículas a través de un ***espacio euclidiano***. Esto significa que necesitamos un ***marco de referencia***, también conocido como sistema de referencia. El marco de referencia consiste en **un reloj** para contar el tiempo y **un sistema de coordenadas cartesianas no rotatorio** para rastrear el movimiento x,y,z de la posición de la partícula. Supondremos que la relatividad no es importante, por lo que un solo reloj universal es suficiente para especificar la hora en todos los sistemas de coordenadas cartesianas.



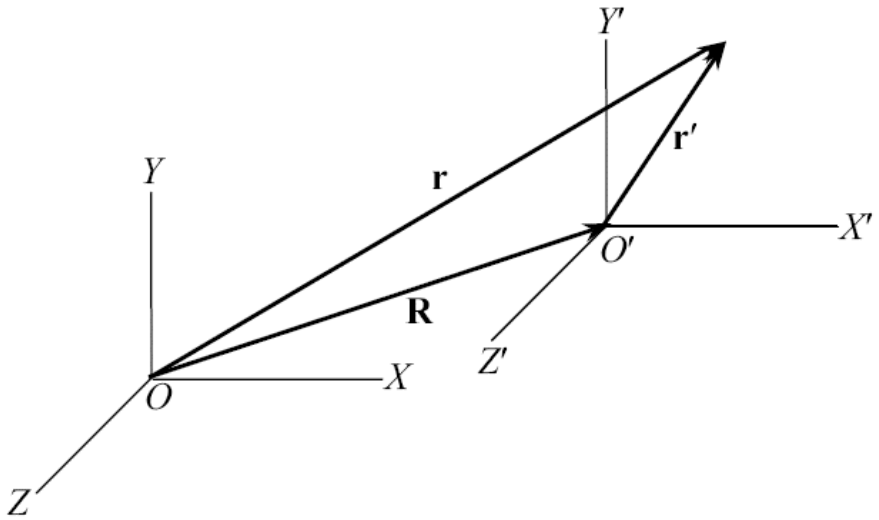
Marco de referencia

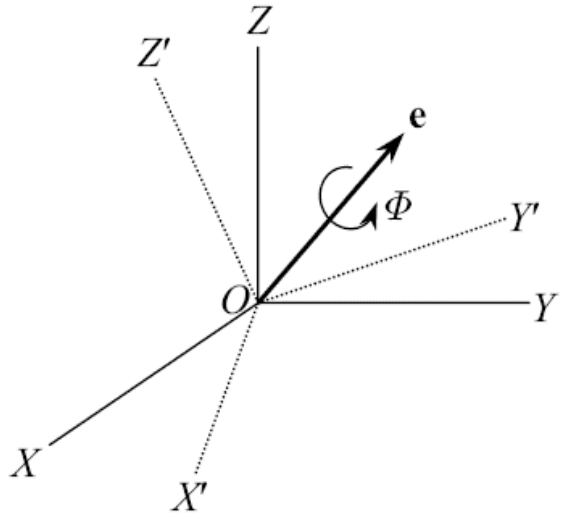


"Una fuerza ficticia, también conocida como fuerza inercial o pseudofuerza, es una fuerza que parece actuar sobre un objeto cuando su movimiento se describe o se experimenta desde un sistema de referencia no inercial. A diferencia de las fuerzas reales, que resultan de interacciones físicas entre objetos, las fuerzas ficticias se producen debido a la aceleración del sistema de referencia del observador".

Representación de un vector

Un vector se puede expresar en una variedad de marcos de referencia, cada uno de los cuales está representado por una tríada de vectores unitarios





La transformación general de un marco de coordenadas a otro consiste en una traslación del origen y una rotación de los ejes sobre el nuevo origen

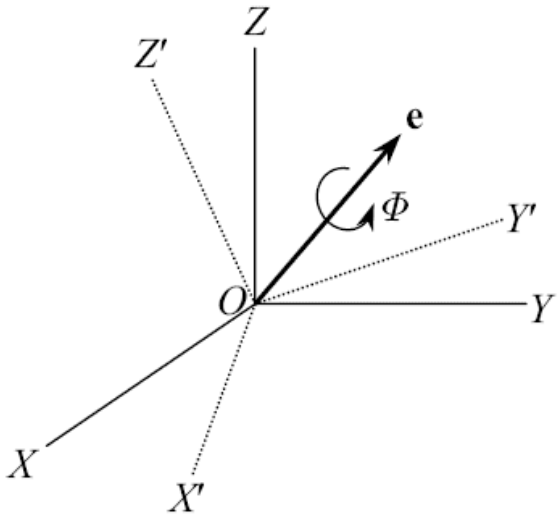
Transformación

Ahora, consideremos un vector, $\boldsymbol{A}$, expresado alternativamente en términos de sus componentes en los marcos original y rotado, de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k} = A'_x\boldsymbol{i}' + A'_y\boldsymbol{j}' + A'_z\boldsymbol{k}'$$

que se puede escribir en forma de matriz como

$$\boldsymbol{A} = (\,\boldsymbol{i}\;\boldsymbol{j}\;\boldsymbol{k}\,)\begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} = (\,\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'\boldsymbol{k}'\,)\begin{Bmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{Bmatrix}$$



Transformación

Para encontrar la relación entre los dos conjuntos de componentes, tomamos los productos escalares $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{j}'$ y $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{k}'$, resultando en

$$\begin{Bmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}' \cdot \mathrm{i} & \mathrm{i}' \cdot \mathrm{j} & \mathrm{i}' \cdot \mathrm{k} \\ \mathrm{j}' \cdot \mathrm{i} & \mathrm{j}' \cdot \mathrm{j} & \mathrm{j}' \cdot \mathrm{k} \\ \mathrm{k}' \cdot \mathrm{i} & \mathrm{k}' \cdot \mathrm{j} & \mathrm{k}' \cdot \mathrm{k} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} .$$

También podemos tomar productos escalares de $\boldsymbol{A}$ con $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$, para derivar lo siguiente:

$$\begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \cdot \mathrm{i}' & \mathrm{i} \cdot \mathrm{j}' & \mathrm{i} \cdot \mathrm{k}' \\ \mathrm{j} \cdot \mathrm{i}' & \mathrm{j} \cdot \mathrm{j}' & \mathrm{j} \cdot \mathrm{k}' \\ \mathrm{k} \cdot \mathrm{i}' & \mathrm{k} \cdot \mathrm{j}' & \mathrm{k} \cdot \mathrm{k}' \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{Bmatrix} .$$

Transformación

Reescribimos la ecuación como

$$\begin{Bmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}' \cdot \mathrm{i} & \mathrm{i}' \cdot \mathrm{j} & \mathrm{i}' \cdot \mathrm{k} \\ \mathrm{j}' \cdot \mathrm{i} & \mathrm{j}' \cdot \mathrm{j} & \mathrm{j}' \cdot \mathrm{k} \\ \mathrm{k}' \cdot \mathrm{i} & \mathrm{k}' \cdot \mathrm{j} & \mathrm{k}' \cdot \mathrm{k} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} . \quad \longrightarrow \quad \begin{Bmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{Bmatrix} = C \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix}$$

$$\mathrm{C} \doteq \begin{pmatrix} \mathrm{i}' \cdot \mathrm{i} & \mathrm{i}' \cdot \mathrm{j} & \mathrm{i}' \cdot \mathrm{k} \\ \mathrm{j}' \cdot \mathrm{i} & \mathrm{j}' \cdot \mathrm{j} & \mathrm{j}' \cdot \mathrm{k} \\ \mathrm{k}' \cdot \mathrm{i} & \mathrm{k}' \cdot \mathrm{j} & \mathrm{k}' \cdot \mathrm{k} \end{pmatrix} .$$

matriz de cosenos directores o *matriz de rotación*

Transformación

La matriz de rotación tiene la siguiente propiedad:

$$\boldsymbol{C^T . C = C . C^T = I}$$

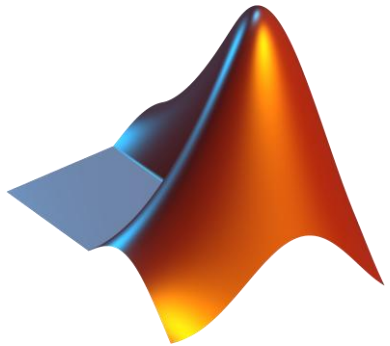
$$\boldsymbol{C^{-1} = C^T}$$

Se dice que una matriz con esta propiedad es *ortogonal*, ya que los vectores formados a partir de las columnas de la matriz son ortogonales

Ejercicio

Encuentre la matriz de rotación que produce el sistema de coordenadas diestro $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$, dado por:

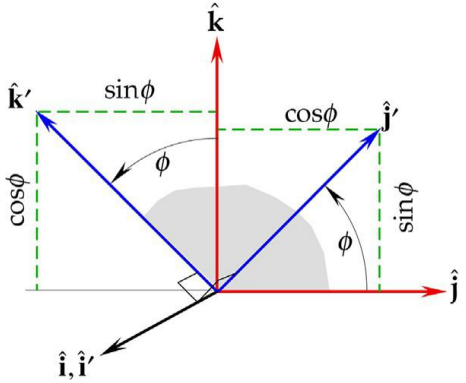
$$\boldsymbol{i}' = 0{,}1\boldsymbol{i} + 0{,}2\boldsymbol{j} + \sqrt{1 - 0{,}01 - 0{,}04}\boldsymbol{k} \text{ y } \boldsymbol{j}' = -0{,}1\boldsymbol{i} - 0{,}9726095077\boldsymbol{j} + \sqrt{1 - 0{,}01 - 0{,}9726095077^2}\boldsymbol{k}$$

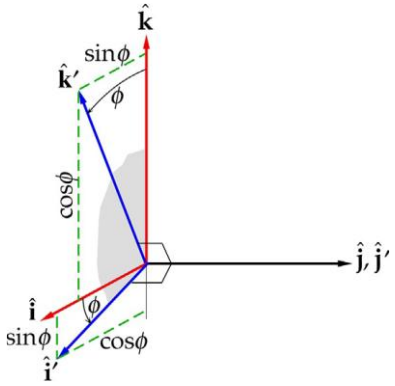


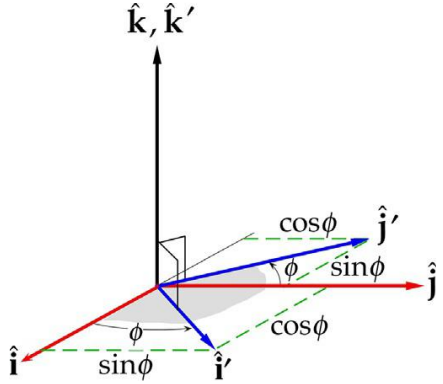
Rotaciones principales

Las transformaciones de coordenadas más simples son las rotaciones sobre los ejes de un marco de coordenadas, llamadas rotaciones elementales

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\Phi) & sin(\Phi) \\ 0 & -sin(\Phi) & cos(\Phi) \end{pmatrix} \qquad R_2 = \begin{pmatrix} cos(\Phi) & 0 & -sin(\Phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ sin(\Phi) & 0 & cos(\Phi) \end{pmatrix} \qquad R_3 = \begin{pmatrix} cos(\Phi) & sin(\Phi) & 0 \\ -sin(\Phi) & cos(\Phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$







Ángulos de Euler

El mayor número de rotaciones necesarias para especificar de forma única una orientación determinada, denominada grados de libertad de rotación, es tres. Por tanto, podemos emplear tres ángulos, cada uno con respecto a un eje de coordenadas en particular, para describir una orientación dada. Esta representación de la actitud mediante tres ángulos se denomina *representación de ángulo de Euler*, y los ángulos en cuestión se conocen como ángulos de Euler. La secuencia de rotaciones axiales es de suma importancia en la representación del ángulo de Euler.

Ángulos de Euler

Existen 12 secuencias de ángulos de Euler posibles tiene una matriz de cosenos directores [Q], que es el producto de tres matrices de rotación elementales. Las seis secuencias simétricas de Euler son aquellas que comienzan y terminan con una rotación sobre el mismo eje.

$$\begin{array}{ll} [\mathbf{R}_1(\gamma)][\mathbf{R}_2(\beta)][\mathbf{R}_1(\alpha)] & [\mathbf{R}_1(\gamma)][\mathbf{R}_3(\beta)][\mathbf{R}_1(\alpha)] \\ [\mathbf{R}_2(\gamma)][\mathbf{R}_1(\beta)][\mathbf{R}_2(\alpha)] & [\mathbf{R}_2(\gamma)][\mathbf{R}_3(\beta)][\mathbf{R}_2(\alpha)] \\ [\mathbf{R}_3(\gamma)][\mathbf{R}_1(\beta)][\mathbf{R}_3(\alpha)] & [\mathbf{R}_3(\gamma)][\mathbf{R}_2(\beta)][\mathbf{R}_3(\alpha)] \end{array}$$

Las secuencias asimétricas de Euler implican rotaciones alrededor de los tres ejes.

$$\begin{array}{ll} [\mathbf{R}_1(\gamma)][\mathbf{R}_2(\beta)][\mathbf{R}_3(\alpha)] & [\mathbf{R}_1(\gamma)][\mathbf{R}_3(\beta)][\mathbf{R}_2(\alpha)] \\ [\mathbf{R}_2(\gamma)][\mathbf{R}_3(\beta)][\mathbf{R}_1(\alpha)] & [\mathbf{R}_2(\gamma)][\mathbf{R}_1(\beta)][\mathbf{R}_3(\alpha)] \\ [\mathbf{R}_3(\gamma)][\mathbf{R}_1(\beta)][\mathbf{R}_2(\alpha)] & [\mathbf{R}_3(\gamma)][\mathbf{R}_2(\beta)][\mathbf{R}_1(\alpha)] \end{array}$$

Ángulos de Euler

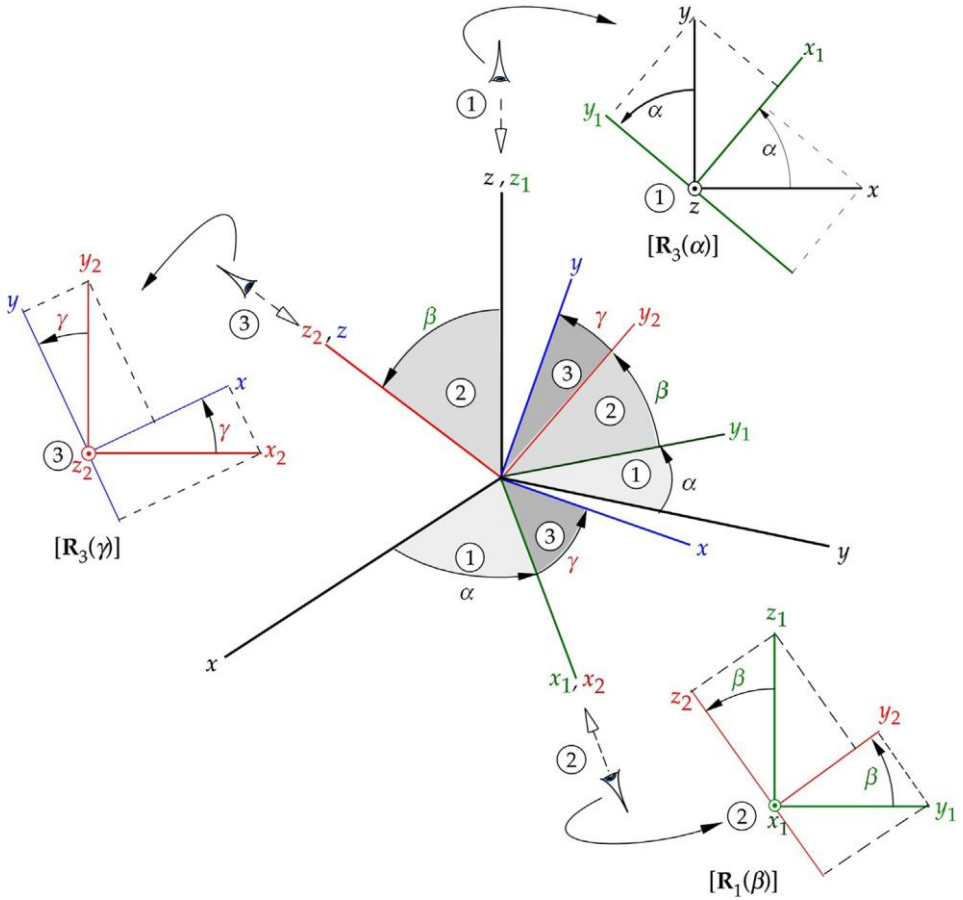
Una de las secuencias simétricas que tiene una aplicación frecuente en la mecánica espacial es la secuencia de ángulos de Euler "clásica", dada por:

$$[\boldsymbol{Q}] = [\boldsymbol{R}_3(\gamma)] \cdot [\boldsymbol{R}_1(\beta)] \cdot [\boldsymbol{R}_3(\alpha)]$$

$$0° < \alpha < 360°$$

$$0° < \beta < 180°$$

$$0° \gamma < 360°$$



Ángulos de Euler

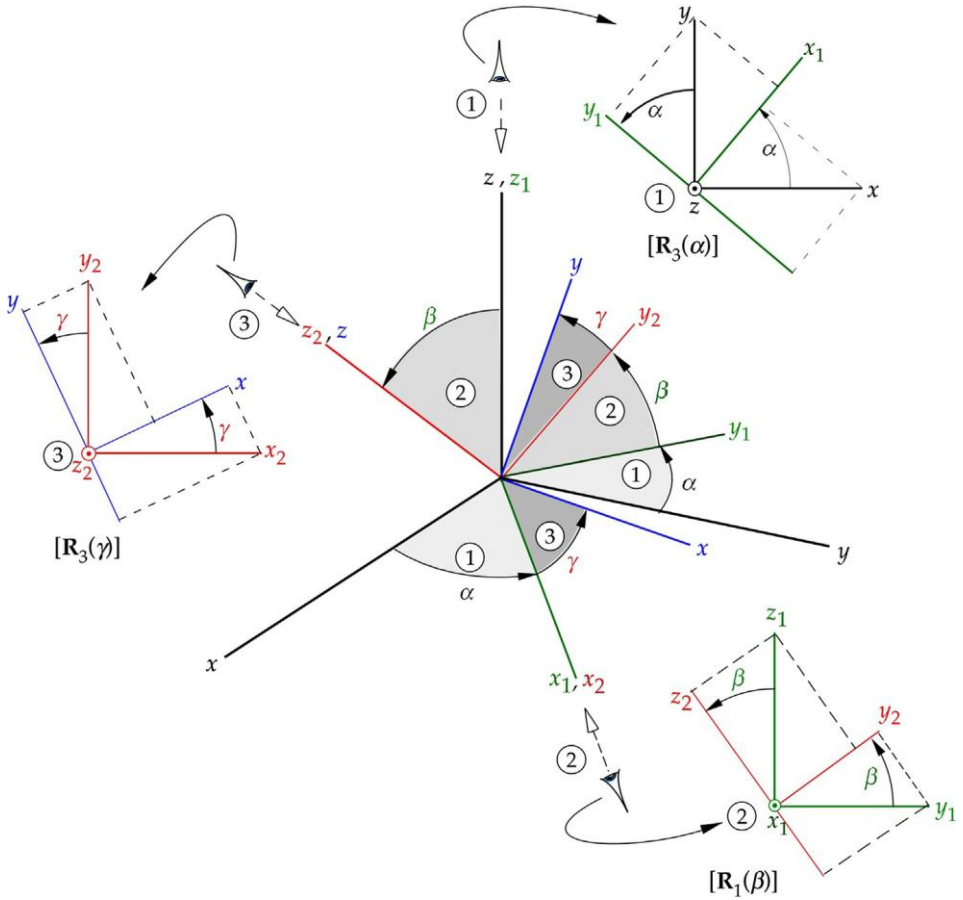
$$[\boldsymbol{Q}] = [\boldsymbol{R}_3(\gamma)] \cdot [\boldsymbol{R}_1(\beta)] \cdot [\boldsymbol{R}_3(\alpha)]$$

$$[\boldsymbol{Q}] = \begin{bmatrix} -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma + \sin\alpha\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma \\ -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \cos\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma & \sin\beta\cos\gamma \\ \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$\tan\alpha = \frac{Q_{31}}{-Q_{32}}$$

$$\cos\beta = Q_{33}$$

$$\tan\gamma = \frac{Q_{13}}{Q_{23}}$$



Ejercicio

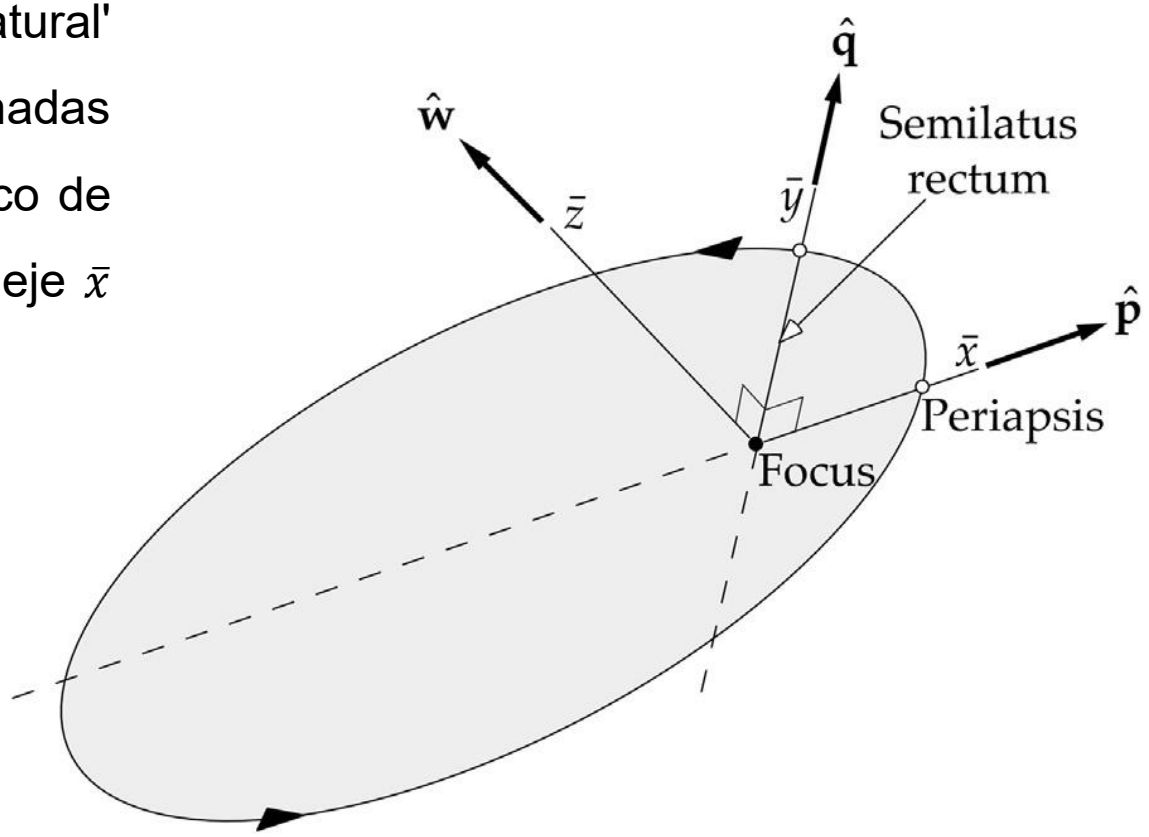
La matriz de cosenos directores de la transformación de xyz a $x'y'z'$ es:

$$[\boldsymbol{Q}] = \begin{bmatrix} 0{,}64050 & 0{,}75309 & -0{,}15038 \\ 0{,}76737 & -0{,}63530 & 0{,}086823 \\ -0{,}30152 & -0{,}17101 & -0{,}98481 \end{bmatrix}$$

Encontrar los ángulos α, β, y γ de la secuencia clásica de Euler

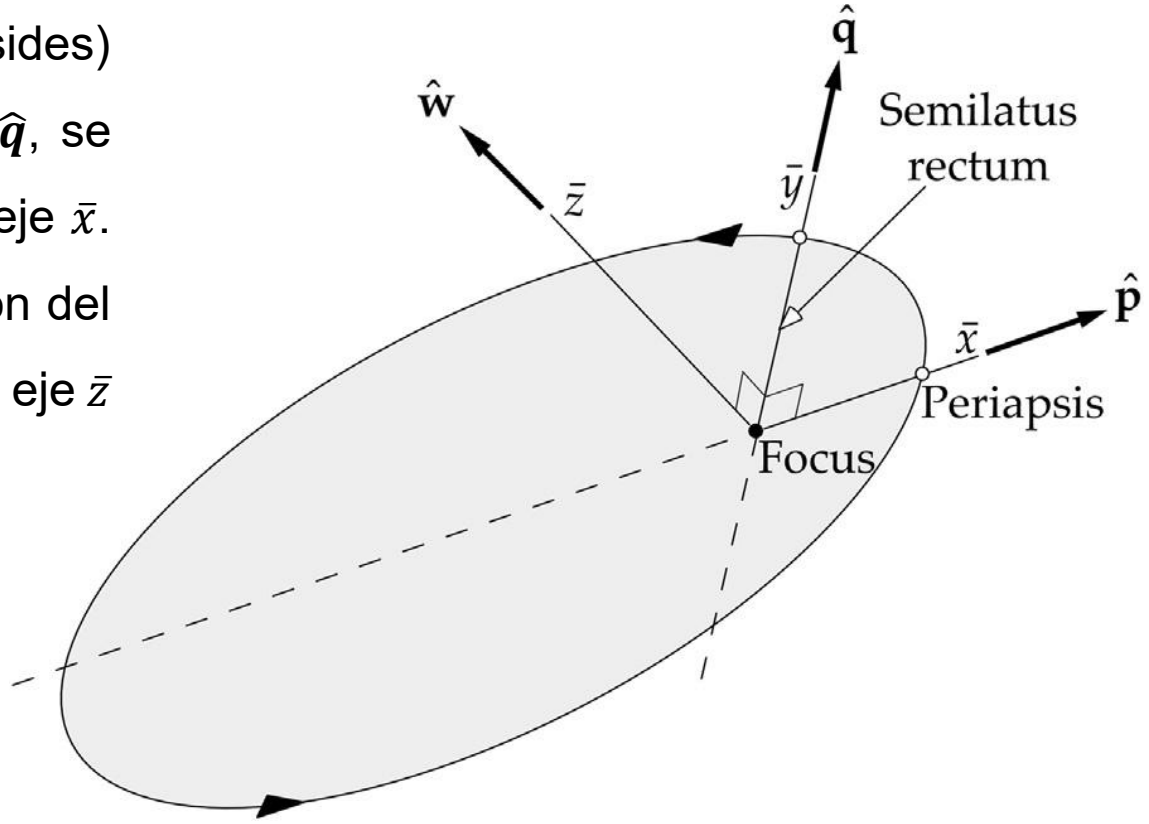
Plano Perifocal

El sistema de referencia perifocal es el 'sistema natural' para una órbita. Es un sistema de coordenadas cartesianas fijado en el espacio y centrado en el foco de la órbita. Su plano $\overline{xy}$ es el plano de la órbita, y su eje $\bar{x}$ está dirigido desde el foco a través del periapsis.



Plano Perifocal

El vector unitario a lo largo del eje $\bar{x}$ (la línea de ápsides) se denota como $\hat{\boldsymbol{p}}$. El eje $\bar{y}$, con el vector unitario $\hat{\boldsymbol{q}}$, se encuentra a $90°$ de anomalía verdadera respecto al eje $\bar{x}$. El eje $\bar{z}$ es normal al plano de la órbita en la dirección del vector de momento angular $\boldsymbol{h}$. El vector unitario del eje $\bar{z}$ es $\hat{\boldsymbol{w}}$, $\hat{\boldsymbol{w}} = \frac{\boldsymbol{h}}{h}$



Plano Perifocal

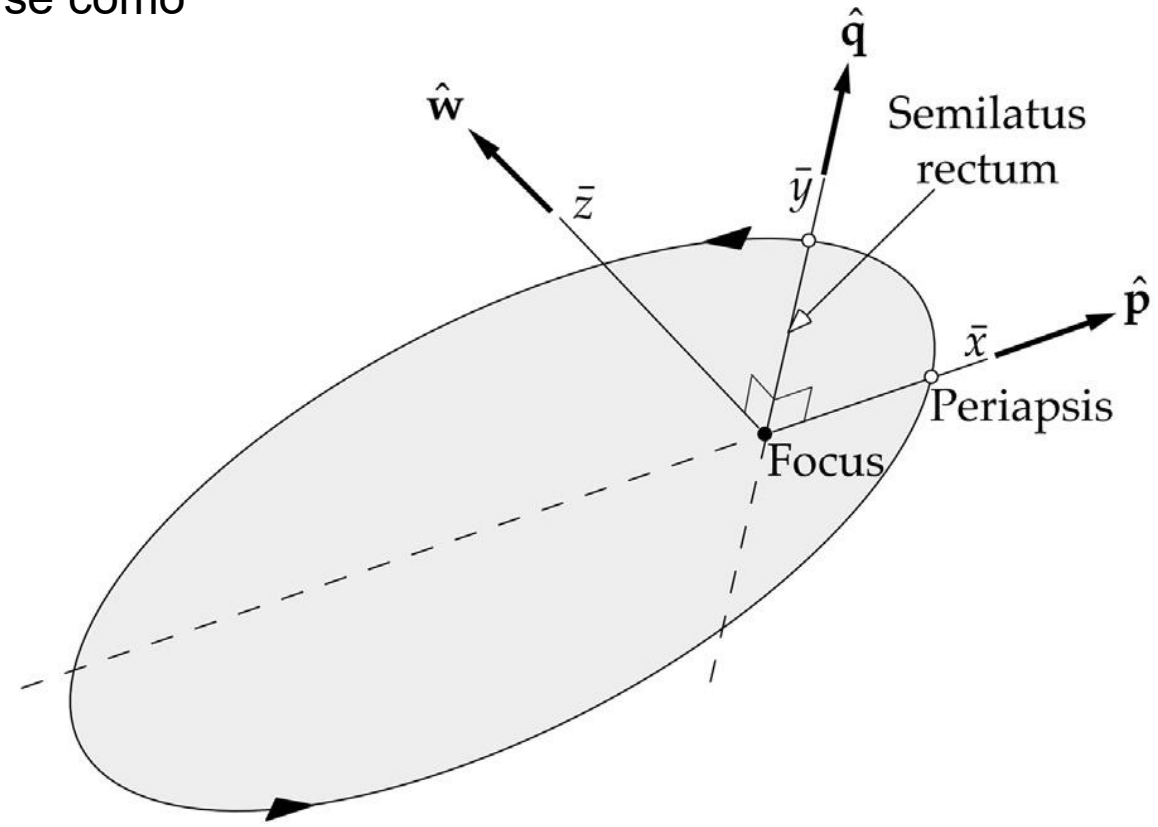
En el plano perifocal el vector posición puede escribirse como

$$\boldsymbol{r} = \bar{x}\hat{\boldsymbol{p}} + \bar{y}\hat{\boldsymbol{q}}$$

$$\bar{x} = r\cos\theta \qquad \bar{y} = r\sin\theta$$

Recordando la ecuación de la órbita, $r = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e\cos\theta}$

$$\boldsymbol{r} = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e\cos\theta}(\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{p}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{q}})$$



Plano Perifocal

La velocidad se puede encontrar derivando el vector posición

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\bar{x}}\hat{\boldsymbol{p}} + \dot{\bar{y}}\hat{\boldsymbol{q}}$$

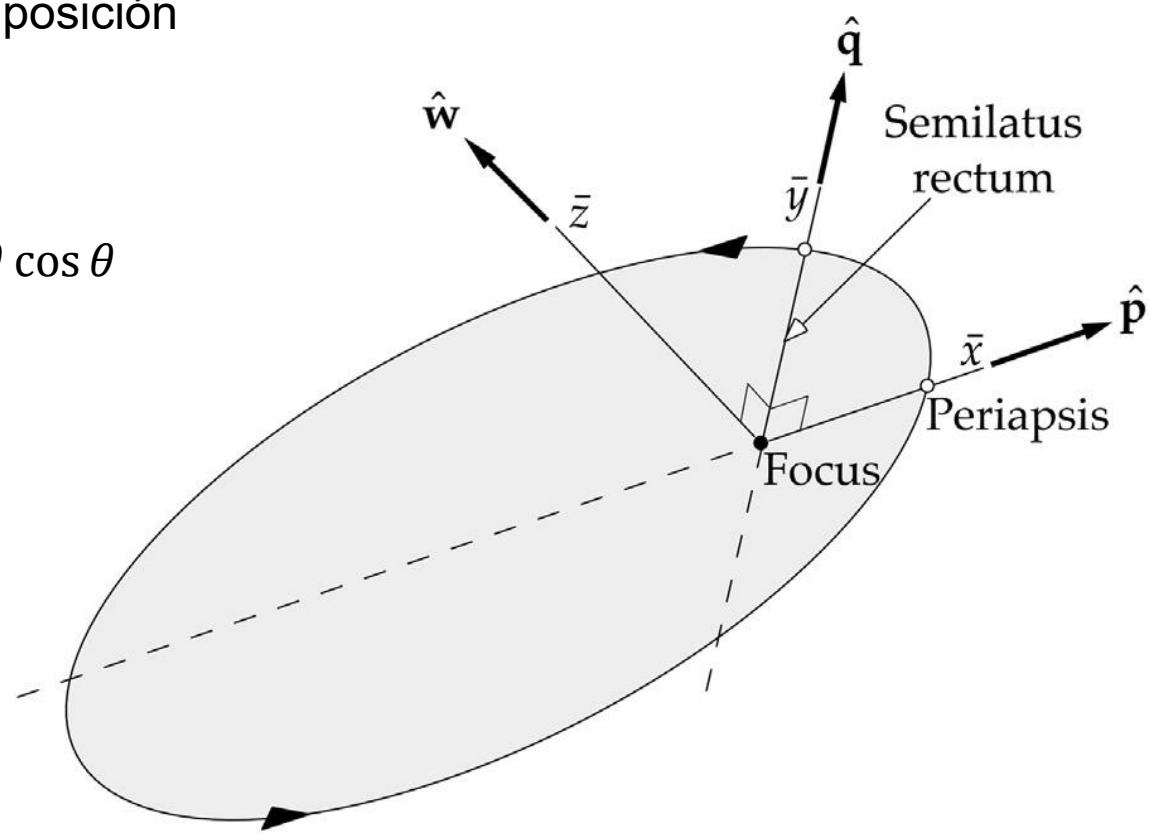
$$\dot{\bar{x}} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \qquad \dot{\bar{y}} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

$\dot{r}$ es la componente radial de la velocidad, v_r

$$\dot{r} = v_r = \frac{\mu}{h}e\sin\theta$$

$r\dot{\theta}$ es la componente tangencial de la velocidad $v_\perp$

$$r\dot{\theta} = v_\perp = \frac{\mu}{h}(1 + e\cos\theta)$$



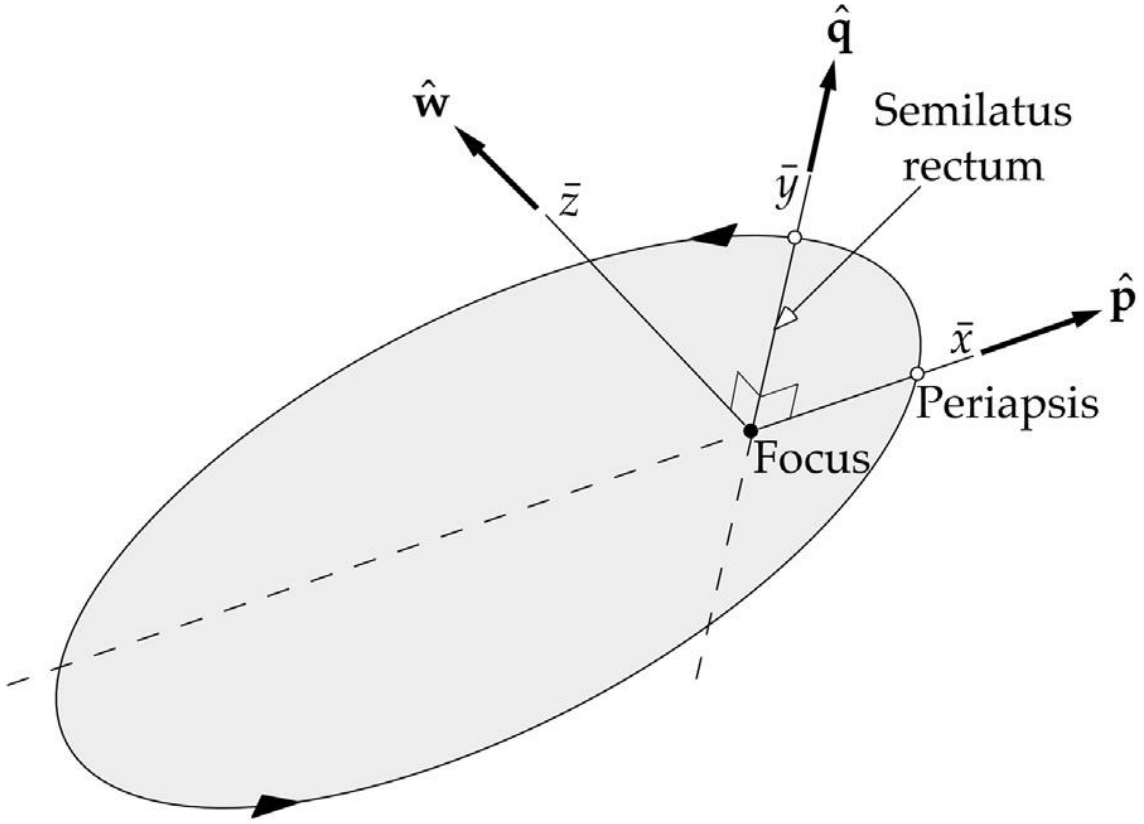
Plano Perifocal

Así, $\dot{\bar{x}}$ e $\dot{\bar{y}}$ quedan como:

$$\dot{\bar{x}} = -\frac{\mu}{h}\sin\theta \qquad \dot{\bar{y}} = \frac{\mu}{h}(e + e\cos\theta)$$

Reemplazando en la ecuación de la velocidad

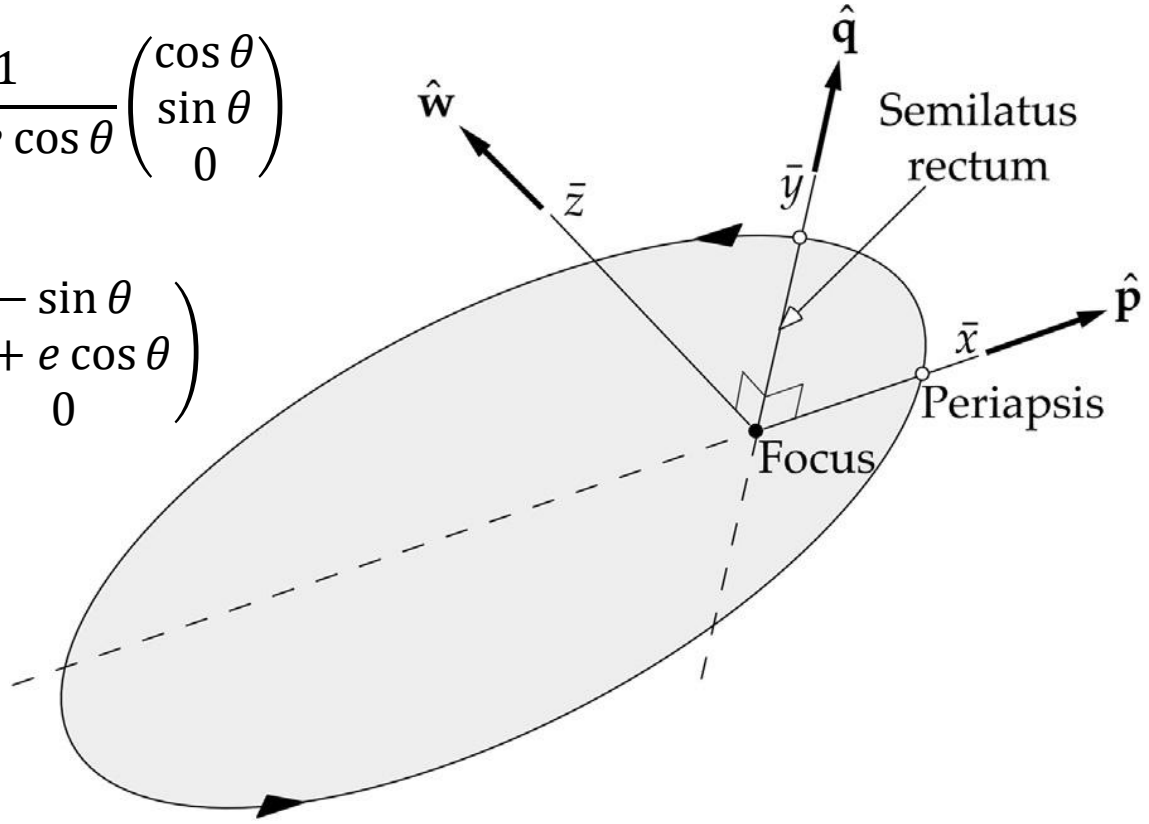
$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\bar{x}}\hat{\boldsymbol{p}} + \dot{\bar{y}}\hat{\boldsymbol{q}} = \frac{\mu}{h}(-\sin\theta\ \hat{\boldsymbol{p}} + (e + e\cos\theta)\ \hat{\boldsymbol{q}}\ )$$



Plano Perifocal

$$\boldsymbol{r} = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e\cos\theta}(\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{p}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{q}}) \;\rightarrow\; \{\boldsymbol{r}\}_{\overline{xyz}} = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e\cos\theta}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mu}{h}(-\sin\theta\;\hat{\boldsymbol{p}} + (e+e\cos\theta)\,\hat{\boldsymbol{q}}) \;\rightarrow\; \{\boldsymbol{v}\}_{\overline{xyz}} = \frac{\mu}{h}\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ e+e\cos\theta\\ 0\end{pmatrix}$$



Ejercicio

Un satélite en una órbita terrestre que tiene una excentricidad de $0{,}3$, un momento angular de $60.000\ km^2/s$ y una anomalía verdadera de $120°$. ¿Cuáles son el vector de posición $\boldsymbol{r}$ y el vector de velocidad $\boldsymbol{v}$ en el sistema de referencia perifocal?

$$\boldsymbol{r} = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1 + e\cos\theta}(\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{p}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{q}})$$

$$\boldsymbol{r} = \frac{60000^2}{398600}\frac{1}{1 + 0.3\cos 120}(\cos 120\,\hat{\boldsymbol{p}} + \sin 120\,\hat{\boldsymbol{q}})$$

$$\boldsymbol{r} = -5312.7\,\hat{\boldsymbol{p}} + 9201.9\,\hat{\boldsymbol{q}}\ (km)$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mu}{h}(-\sin\theta\ \hat{\boldsymbol{p}} + (e + e\cos\theta)\,\hat{\boldsymbol{q}}\ )$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{398600}{60000}(-\sin 120\ \hat{\boldsymbol{p}} + (0.3 + 0.3\cos 120)\,\hat{\boldsymbol{q}}\ )$$

$$\boldsymbol{v} = -5.7533\,\hat{\boldsymbol{p}} - 1.3287\,\hat{\boldsymbol{q}}\ (km/s)$$

Ejercicio

Un satélite en una órbita terrestre que tiene en un instante dado la posición y velocidad:

$$\boldsymbol{r} = 7000\,\hat{\boldsymbol{p}} + 9000\,\hat{\boldsymbol{q}}\ (km)$$

$$\boldsymbol{v} = -3.3472\,\hat{\boldsymbol{p}} + 9.1251\,\hat{\boldsymbol{q}}\ (km/s)$$

Calcular el momento angular especifico h, la anomalía verdadera θ, y el vector excentricidad e

Ejercicio

Momento angular especifico

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{p}} & \hat{\boldsymbol{q}} & \hat{\boldsymbol{w}} \\ 7000 & 9000 & 0 \\ -3{,}3472 & 9{,}1251 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{h} = 94.000\ \hat{\boldsymbol{w}}\ (km^2/s)$$

$$h\ = 94.000\ km^2/s$$

Ejercicio

La anomalía verdadera se mide desde el eje $\bar{x}$ positivo. Por definición del producto escalar, se tiene que: $\boldsymbol{r} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} = r \cos\theta$, por lo tanto:

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{r}}{r} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} = \frac{7000\,\hat{\boldsymbol{p}} + 9000\,\hat{\boldsymbol{q}}}{\sqrt{7000^2 + 9000^2}} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} = \frac{7000}{11402} = 0{,}61394$$

Lo cual implica:

$$\theta = 52{,}125º \quad o \quad \theta = -52{,}125º$$

Dado que la componente en $\bar{y}$ de $\boldsymbol{r}$ es positiva, la anomalía verdadera debe estar entre 0° y 180°, por lo tanto: $\theta = 52{,}125º$

Ejercicio

Finalmente, la excentricidad se encuentra con la fórmula de orbita:

$$r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{(1 - e\cos\theta)}$$

$$\sqrt{7000^2 + 9000^2} = \frac{60000^2}{398600} \frac{1}{(1 - e\cos 52{,}125)}$$

$$e = 1.538$$

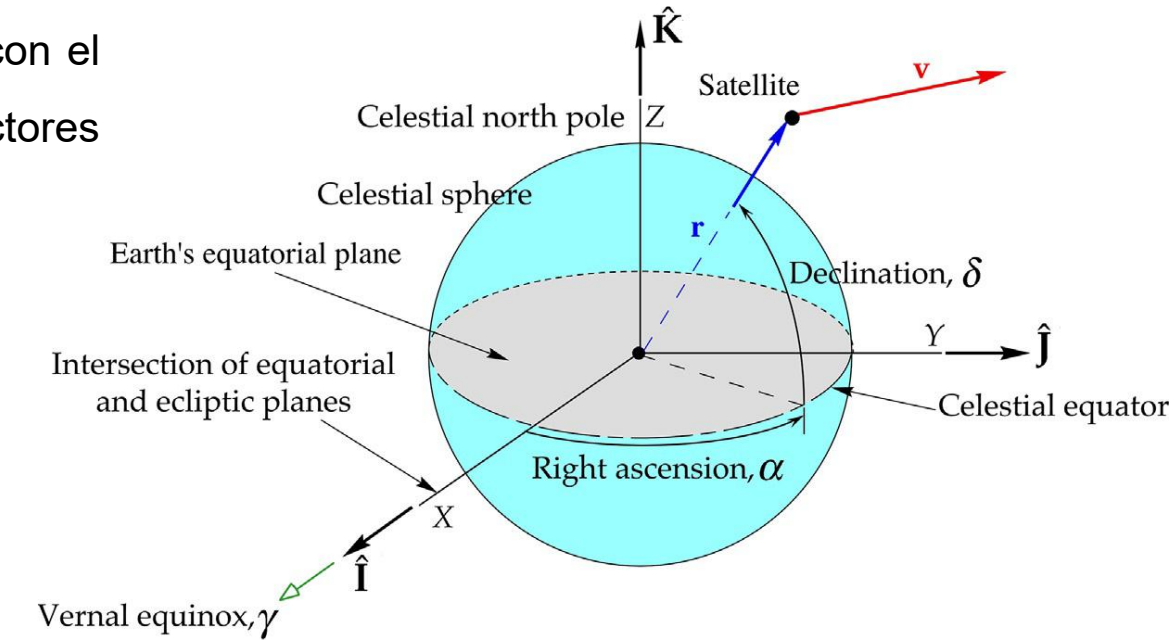
La trayectoria es una hipérbola

ECI (Earth-Centered Inertial)

El eje X apunta en la dirección del equinoccio vernal. El plano XY coincide con el plano ecuatorial terrestre, y el eje Z coincide con el eje de rotación de la Tierra y apunta hacia el norte. Los vectores unitarios $\hat{\boldsymbol{I}}$, $\hat{\boldsymbol{J}}$ y $\hat{\boldsymbol{K}}$ forman una tríada diestra.

$$\boldsymbol{r} = X\hat{\boldsymbol{I}} + Y\hat{\boldsymbol{J}} + Z\hat{\boldsymbol{K}}$$

$$\boldsymbol{v} = v_X\hat{\boldsymbol{I}} + \boldsymbol{v}_Y\hat{\boldsymbol{J}} + \boldsymbol{v}_Z\hat{\boldsymbol{K}}$$



ECI (Earth-Centered Inertial)

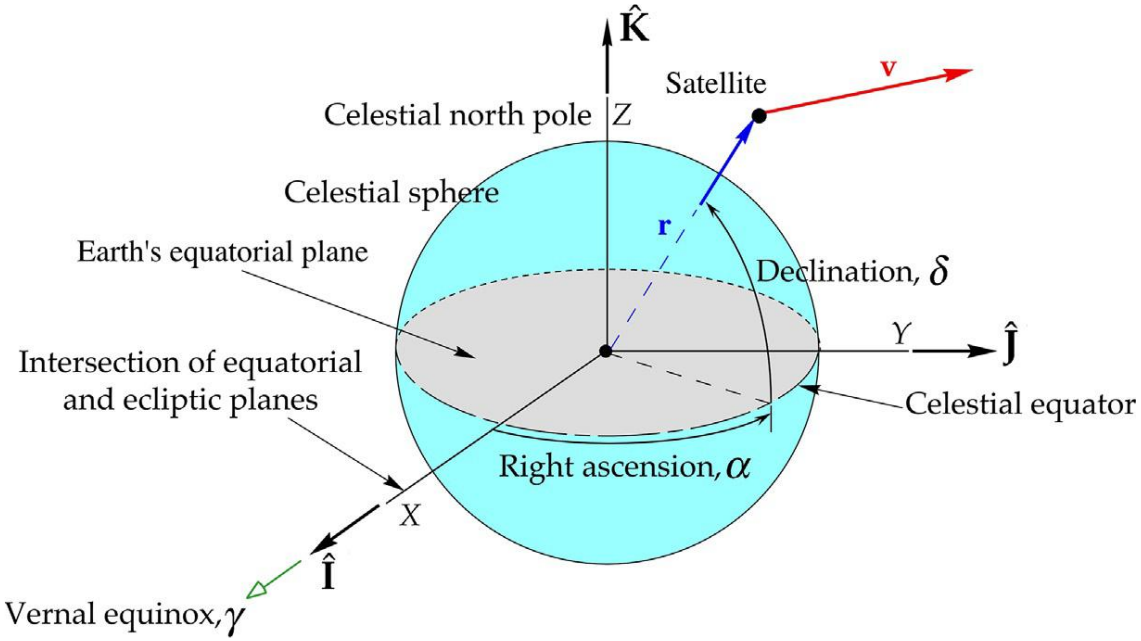
Si r es la magnitud del vector posición, el vector posición también puede expresarse en la dirección radial (dirección que une el centro de la Tierra con el satélite)

$$\boldsymbol{r} = r\,\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}$$

La componente de $\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}$ en el sistema ecuatorial geocéntrico se expresa en función de la ascensión recta α y la declinación δ

$$\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}} = l\hat{\boldsymbol{I}} + m\hat{\boldsymbol{J}} + n\hat{\boldsymbol{K}}$$

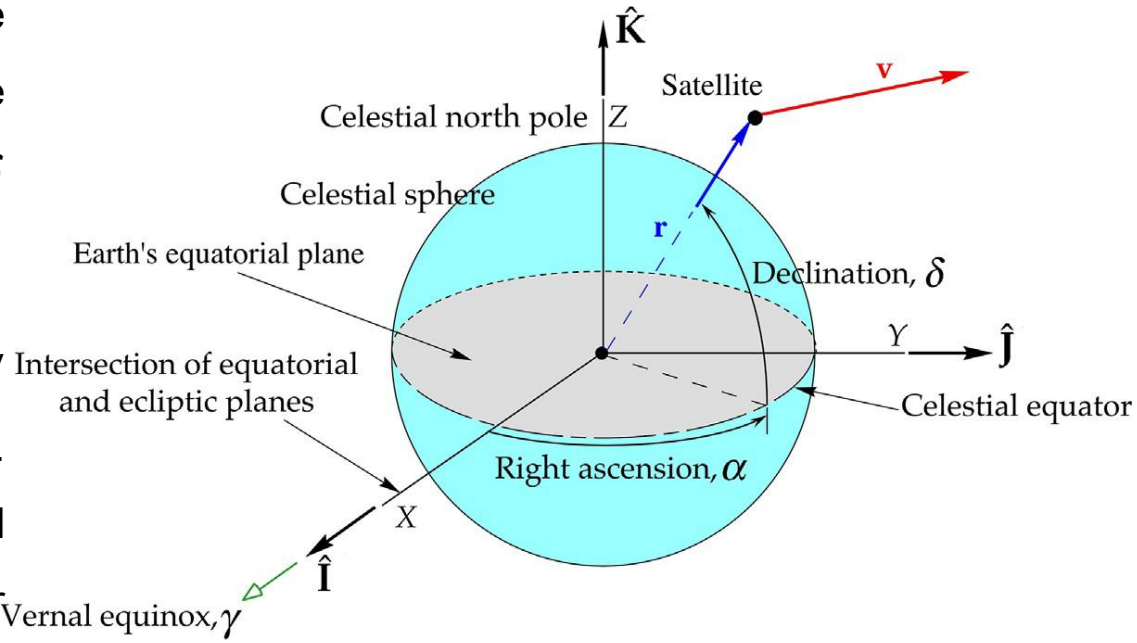
$$\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}} = \cos\delta\cos\alpha\,\hat{\boldsymbol{I}} + \cos\delta\sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{J}} + \sin\delta\,\hat{\boldsymbol{K}}$$



ECI (Earth-Centered Inertial)

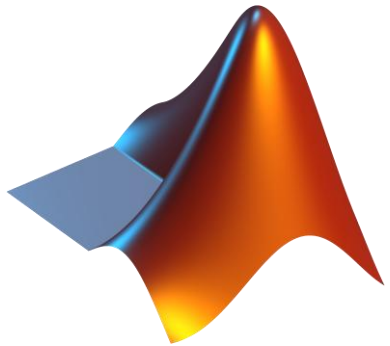
La declinación se obtiene como $\delta = \arcsin n$. No existe ambigüedad de cuadrante, ya que por definición la declinación se encuentra entre $-90°$ y $+90°$, que es precisamente el rango de los valores principales de la función arco seno. Por lo tanto, $cos\,\delta$ no puede ser negativo.

La ascensión recta se puede encontrar como $\alpha = \arccos(l/\cos\delta)$. Esto produce dos posibles valores de α entre $0°$ y $360°$. Para determinar el cuadrante correcto, se verifica el signo del coseno director $m = \cos\delta \sin\alpha$. Dado que $cos\,\delta$ no puede ser negativo, el signo de m coincide con el de $sin\,\alpha$. Si $sin\,\alpha > 0$, entonces α se encuentra entre $0°$ y $180°$; si $sin\,\alpha < 0$, α se ubica entre $180°$ y $360°$.



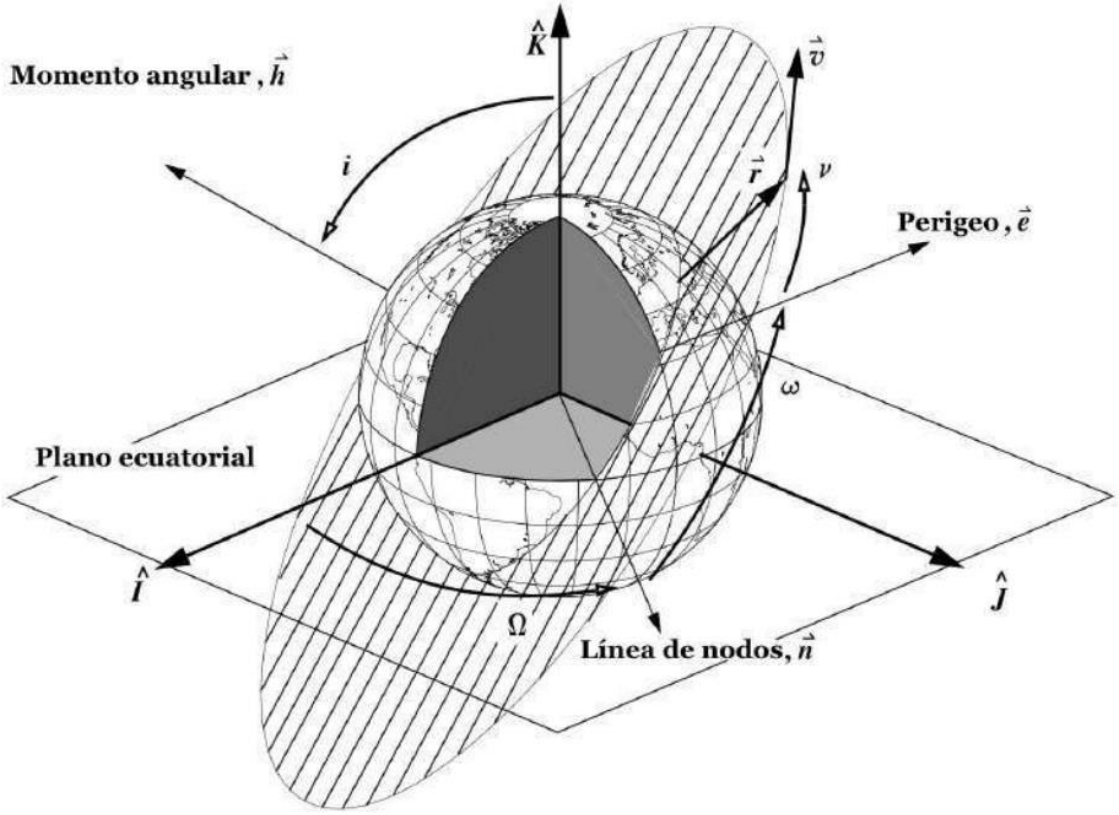
Ejercicio

Si el vector posición de la Estación Espacial Internacional (ISS) en el marco de referencia ECI es $\boldsymbol{r} = -5368\hat{\boldsymbol{I}} - 1784\hat{\boldsymbol{J}} + 3691\hat{\boldsymbol{K}}$ determinar la ascensión recta y declinación.



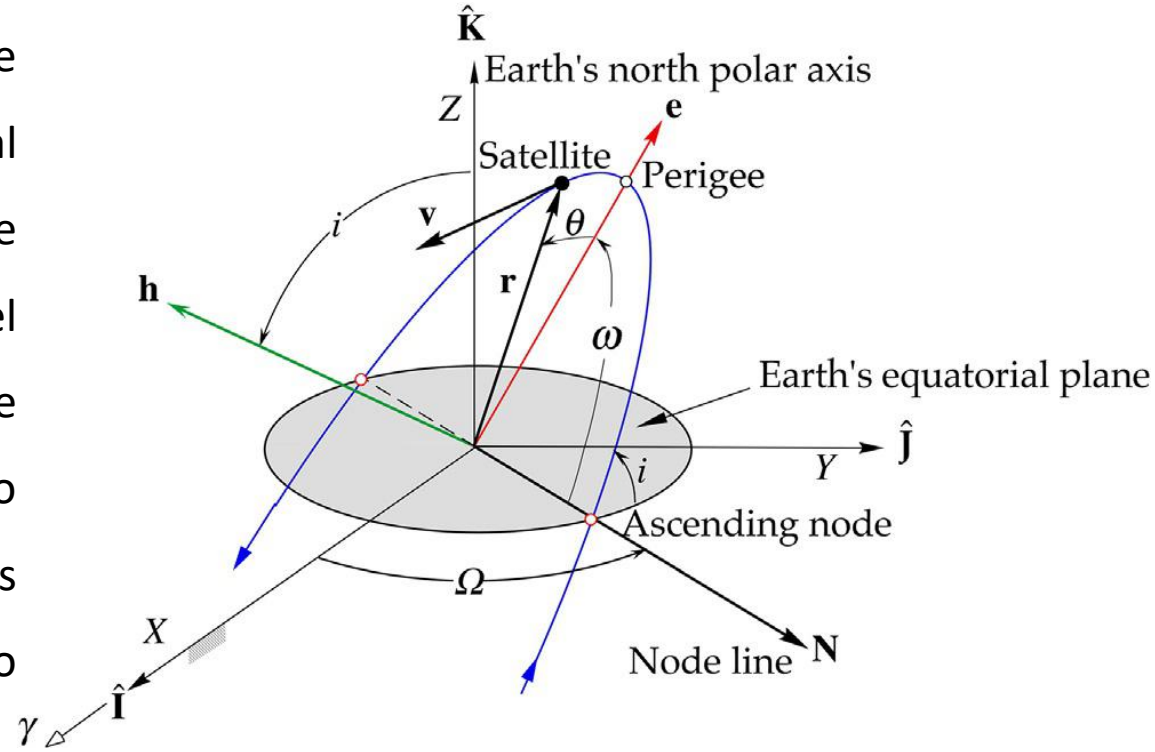
Elementos orbitales clásicos (COE)

Para definir una órbita en el plano se requieren dos parámetros: la excentricidad e y el momento angular h. Otros parámetros, como el semieje mayor, la energía específica y (para una elipse) el período, se obtienen a partir de estos dos. Para localizar un punto en la órbita se necesita un tercer parámetro, la anomalía verdadera θ, que nos lleva al tiempo desde el perigeo. Describir la orientación de una órbita en tres dimensiones requiere tres parámetros adicionales, llamados ángulos de Euler.



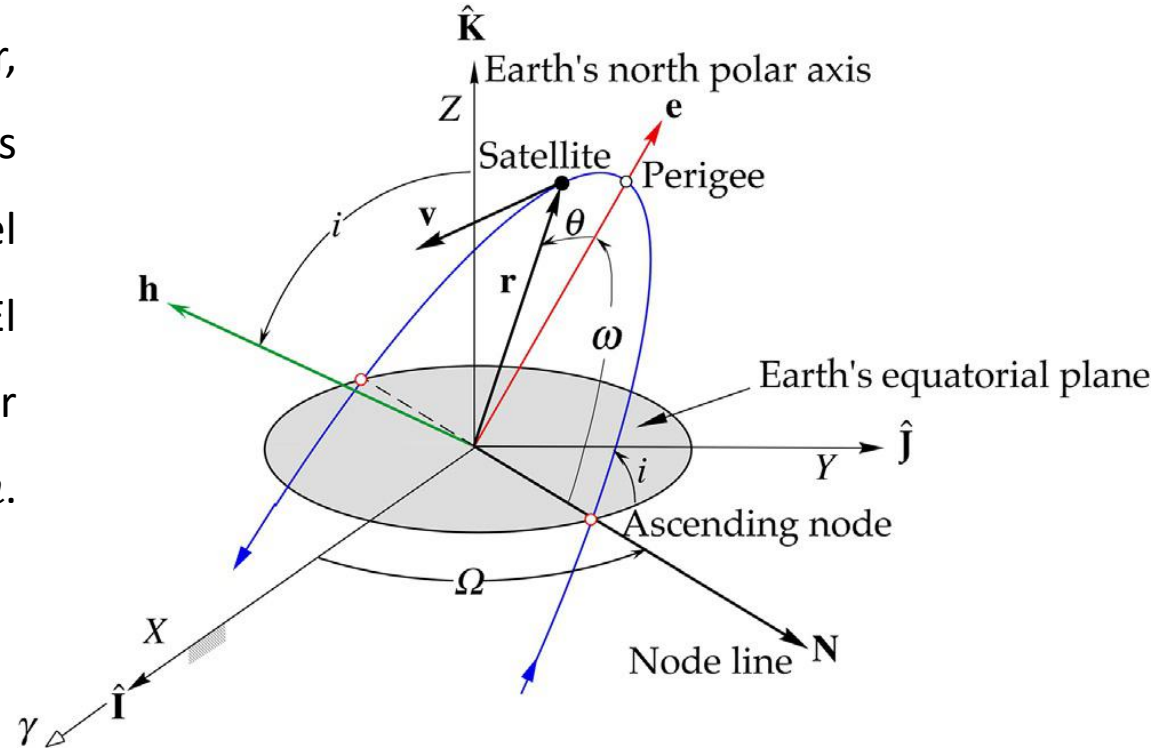
Elementos orbitales clásicos (COE)

Primero, ubicamos la intersección del plano orbital con el plano ecuatorial (XY), esta es la línea de nodos. El punto en la línea de nodos donde la órbita pasa por encima del plano ecuatorial desde abajo se llama nodo ascendente. El vector de la línea de nodos N se extiende hacia afuera desde el origen a través del nodo ascendente. En el otro extremo de la línea de nodos, donde la órbita se sumerge por debajo del plano ecuatorial, está el nodo descendente. El ángulo entre el eje X positivo y la línea de nodos es el primer ángulo de Euler Ω, ascensión recta del nodo ascendente (varia entre $0°$ y $360°$).



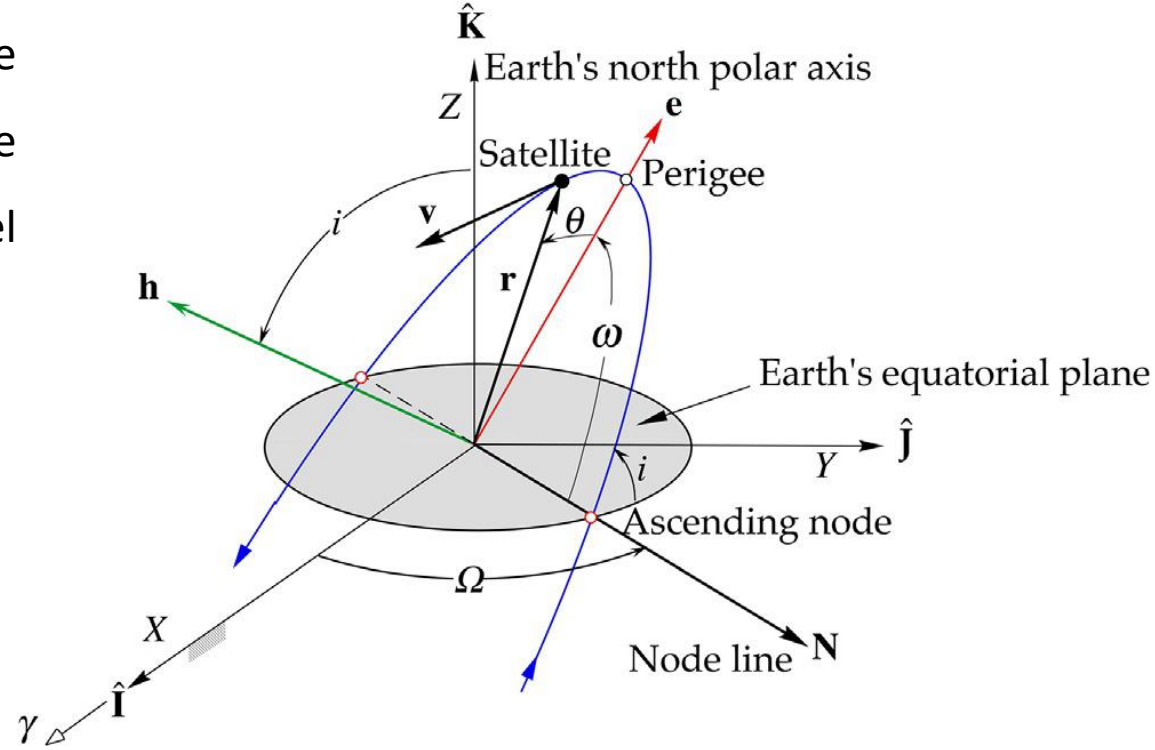
Elementos orbitales clásicos (COE)

El ángulo entre el plano orbital y el plano ecuatorial es la inclinación i, medida según la regla de la mano derecha (es decir, en sentido antihorario alrededor del vector de la línea de nodos desde el ecuador hasta la órbita). La inclinación también es el ángulo entre el eje Z positivo y la normal al plano de la órbita. El vector de momento angular $\boldsymbol{h}$ es normal al plano de la órbita. Por lo tanto, la inclinación i es el ángulo entre el eje Z positivo y $\boldsymbol{h}$. Este es el segundo ángulo de Euler y varía entre $0°$ y $180°$.



Elementos orbitales clásicos (COE)

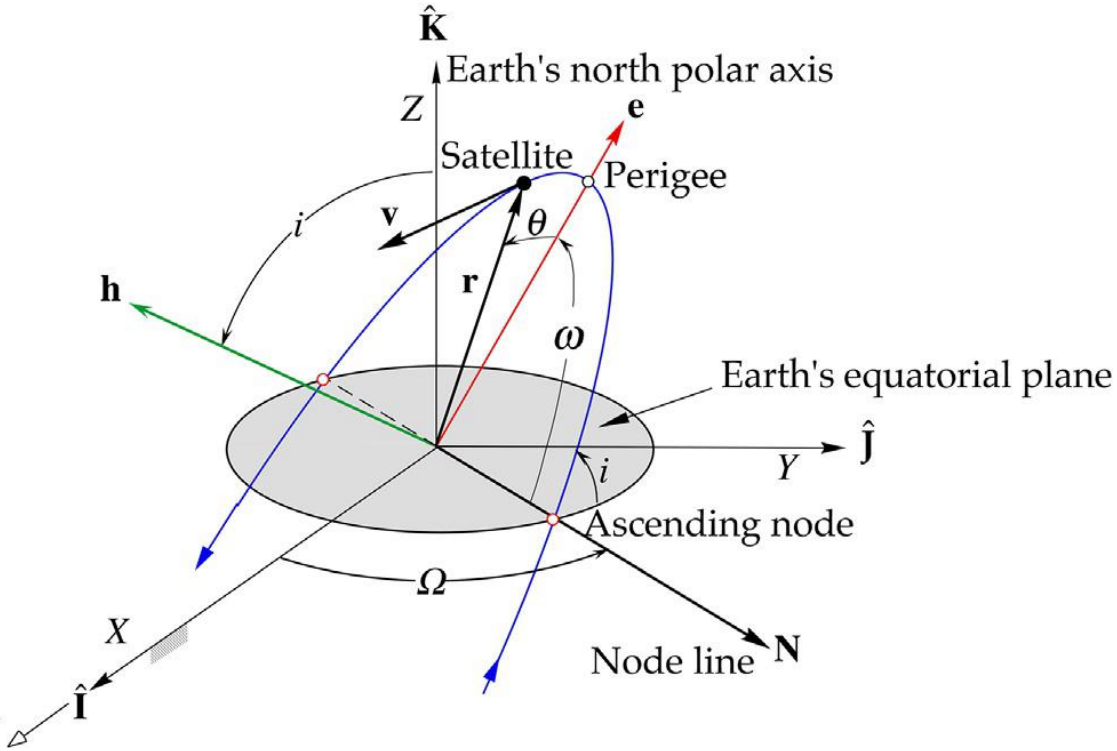
El perigeo se encuentra en la intersección del vector de excentricidad e con la trayectoria orbital. El tercer ángulo de Euler ω, el argumento del perigeo, es el ángulo entre el vector de la línea de nodos $\boldsymbol{N}$ y el vector de excentricidad e, medido en el plano de la órbita. Varía entre $0°$ y $360°$.



Elementos orbitales clásicos (COE)

En resumen, los seis elementos orbitales son:

- h momento angular específico
- e excentricidad
- θ anomalía verdadera.
- i inclinación
- Ω o RAAN ascensión recta del nodo ascendente
- ω argumento del perigeo



Nota: Para algunos tipos de órbitas, se requieren otros parámetros que reemplazan a uno o más de estos elementos clásicos

Elementos orbitales y vector de estado

Para obtener los elementos orbitales, a partir del vector posición y velocidad son necesarios una serie de cálculos:

1. Calcular la distancia, $r = \sqrt{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$

2. Calcular la velocidad, $v = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} = \sqrt{v_X^2 + v_Y^2 + v_Z^2}$

3. Calcular la velocidad radial, $v_r = \boldsymbol{r} \cdot \frac{\boldsymbol{v}}{r} = \frac{(Xv_X + Yv_Y + Zv_Z)}{r}$.

Si $v_r > 0$, el vehículo se aleja del perigeo, y si $v_r < 0$ se acerca al perigeo

Elementos orbitales y vector de estado

4. Calcular el momento angular especifico

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{I}} & \hat{\boldsymbol{J}} & \hat{\boldsymbol{K}} \\ X & Y & Z \\ v_X & v_Y & v_Z \end{vmatrix}$$

5. Calcular el modulo del momento angular especifico, $h = \sqrt{\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{h}}$

Este es el primer elemento orbital

Elementos orbitales y vector de estado

6. Calcular la inclinación

$$i = \cos^{-1}(h_z/h)$$

Este es el segundo elemento orbital. Recordar que i debe estar entre 0° y 180°, que es precisamente el rango (valores principales) de la función arcocoseno. Por lo tanto, no hay ambigüedad de cuadrante. Si 90° < i ≤ 180°, el momento angular **h** apunta en dirección sur. En ese caso, la órbita es retrógrada, lo que significa que el movimiento del satélite alrededor de la Tierra es opuesto a la rotación de la Tierra.

Elementos orbitales y vector de estado

7. Calcular el vector que define la línea de nodos

$$\boldsymbol{N} = \widehat{\boldsymbol{K}} \times \boldsymbol{h} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{I}} & \hat{\boldsymbol{J}} & \widehat{\boldsymbol{K}} \\ 0 & 0 & 1 \\ h_X & h_Y & h_Z \end{vmatrix}$$

8. Calcular el modulo de $\boldsymbol{N}$, $N = \sqrt{\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{N}}$

Elementos orbitales y vector de estado

9. Calcular la ascensión recta del nodo ascendente (RAAN), $\Omega = \cos^{-1}(N_x/N)$. Si Nx > 0, entonces Ω se encuentra en el primer o cuarto cuadrante. Si Nx < 0, entonces Ω se encuentra en el segundo o tercer cuadrante. Por lo tanto, Ny > 0 implica que 0 ≤ Ω < 180°, mientras que Ny < 0 implica que 180° ≤ Ω < 360°

$$\Omega = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{N_x}{N}\right) & si\ N_Y \geq 0 \\ 360 - \cos^{-1}\left(\frac{N_x}{N}\right) & si\ N_Y < 0 \end{cases}$$

Elementos orbitales y vector de estado

10. Calcular el vector excentricidad

$$\boldsymbol{e} = \frac{1}{\mu}\left(\left(v^2 - \frac{\mu}{r}\right)\boldsymbol{r} - r\, v_r \boldsymbol{v}\right)$$

11. Calcular el modulo del vector excentricidad

$$e = \sqrt{\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e}}$$

Elementos orbitales y vector de estado

12. Calcular el argumento del perigeo

$$\omega = \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{N}}{N} \cdot \frac{\boldsymbol{e}}{e}\right)$$

Si $N \cdot e > 0$, entonces ω se encuentra en el primer o cuarto cuadrante.

Si $N \cdot e < 0$, entonces ω se encuentra en el segundo o tercer cuadrante.

Para ubicar ω en el cuadrante adecuado, observa que el perigeo se encuentra por encima del plano ecuatorial ($0° \leq \omega < 180°$) si e apunta hacia arriba (en la dirección positiva del eje Z) y que el perigeo se encuentra por debajo del plano (180° ≤ ω < 360°) si e apunta hacia abajo.

Elementos orbitales y vector de estado

12. Calcular el argumento del perigeo

Por lo tanto, $e_Z \geq 0$ implica que $0° \leq \omega < 180°$, mientras que $e_Z < 0$ implica que $180° \leq \omega < 360°$.

$$\omega = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\dfrac{\boldsymbol{N}}{N} \cdot \dfrac{\boldsymbol{e}}{e}\right) & si\ e_z \geq 0 \\ 360 - \cos^{-1}\left(\dfrac{\boldsymbol{N}}{N} \cdot \dfrac{\boldsymbol{e}}{e}\right) & si\ e_z < 0 \end{cases}$$

Elementos orbitales y vector de estado

13. Calcular la anomalía verdadera

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{e}}{e} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$$

Si $\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{r} > 0$, entonces θ se encuentra en el primer o cuarto cuadrante. Si $\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{r} < 0$, entonces θ se encuentra en el segundo o tercer cuadrante. Para ubicar θ en el cuadrante adecuado, notar que si el satélite se está alejando del perigeo ($\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v} \geq 0$), entonces $0 \leq \theta < 180$, mientras que si el satélite se está acercando al perigeo ($\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v} < 0$), entonces $180 \leq \theta < 360$.

$$\theta = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{e}}{e} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) & si\ v_r \geq 0 \\ 360 - \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{e}}{e} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) & si\ v_r < 0 \end{cases}$$

Elementos orbitales y vector de estado

13. Calcular la anomalía verdadera

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{e}}{e} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{e}\right)$$

Si $\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{r} > 0$, entonces θ se encuentra en el primer o cuarto cuadrante. Si $\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{r} < 0$, entonces θ se encuentra en el segundo o tercer cuadrante. Para ubicar θ en el cuadrante adecuado, notar que si el satélite se está alejando del perigeo ($\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v} \geq 0$), entonces $0 \leq \theta < 180$, mientras que si el satélite se está acercando al perigeo ($\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v} < 0$), entonces $180 \leq \theta < 360$.

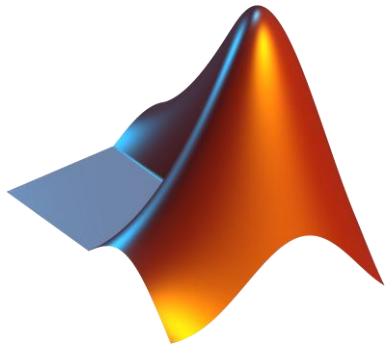
$$\theta = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{e}}{e} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{e}\right) & si\ v_r \geq 0 \\ 360 - \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{e}}{e} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{e}\right) & si\ v_r < 0 \end{cases}$$

Ejercicio

Calcular los elementos orbitales clásicos a partir del vector de estado:

$$\boldsymbol{r} = -6045\hat{\boldsymbol{I}} - 3490\hat{\boldsymbol{J}} + 2500\hat{\boldsymbol{K}}\ (km)$$

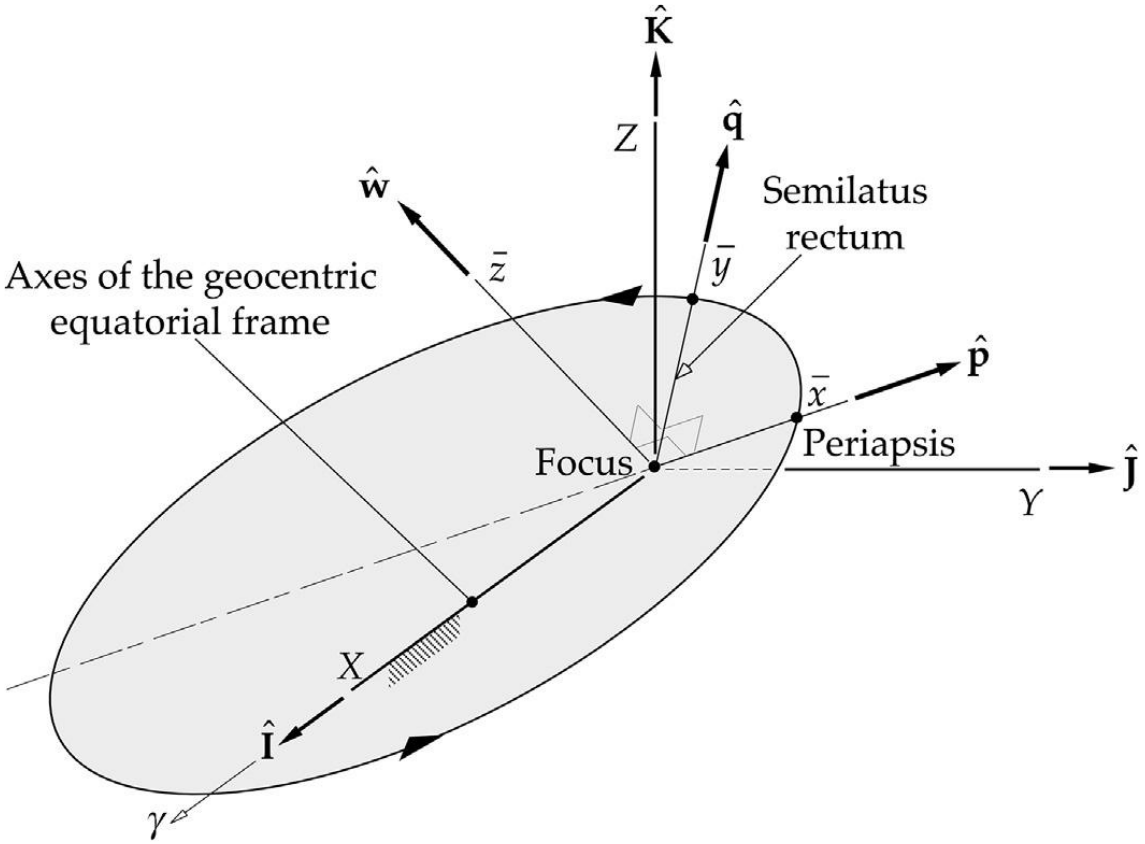
$$\boldsymbol{v} = -3.457\hat{\boldsymbol{I}} + 6.618\hat{\boldsymbol{J}} + 2.533\hat{\boldsymbol{K}}\ (km/s)$$



Ecuatorial Geocentrico - Perifocal

La transformación del marco ecuatorial geocéntrico al marco perifocal puede lograrse mediante la secuencia clásica de ángulos de Euler $[\boldsymbol{R_3}(\gamma)][\boldsymbol{R_1}(\beta)][\boldsymbol{R_3}(\alpha)]$.

- El primer ángulo de rotación es Ω, la ascensión recta del nodo ascendente o RAAN (se mide alrededor del eje z del marco ecuatorial geocéntrico)
- La segunda rotación es i, el ángulo de inclinación orbital (se mide alrededor de a línea de nodos)
- El tercer ángulo de rotación es ω, el argumento del perigeo (se mide alrededor del eje $\bar{z}$ del marco perifocal)



Ecuatorial Geocentrico - Perifocal

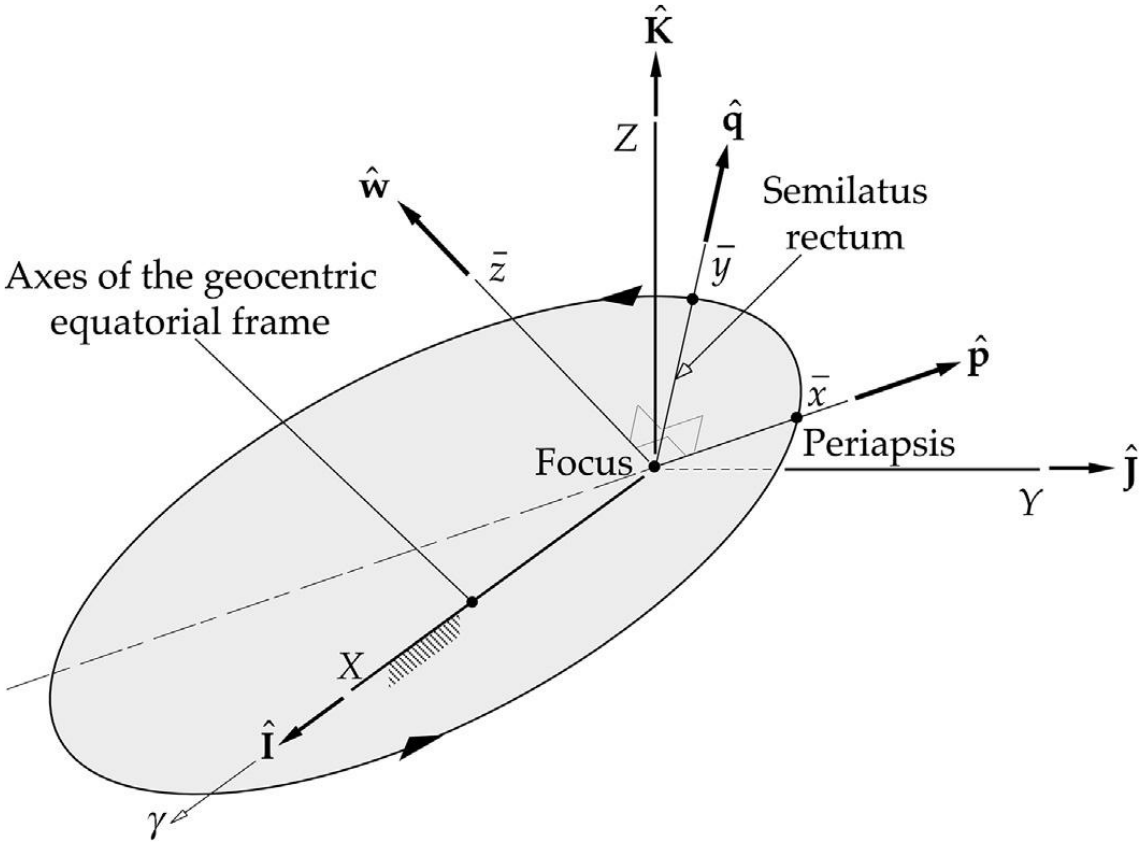
Por lo tanto, la matriz de cosenos directores $[\boldsymbol{Q}]_{X\bar{x}}$ de la transformación de XYZ a $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ es

$$[\boldsymbol{Q}]_{X\bar{x}} = [\boldsymbol{R_3}(\omega)] \cdot [\boldsymbol{R_1}(i)] \cdot [\boldsymbol{R_3}(\Omega)]$$

De esta forma, la transformación del plano perifocal al sistema ecuatorial geocéntrico es:

$$\{\boldsymbol{r}\}_X = [\boldsymbol{Q}]_{X\bar{x}} \cdot \{\boldsymbol{r}\}_{\bar{x}}$$

$$\{\boldsymbol{v}\}_X = [\boldsymbol{Q}]_{X\bar{x}} \cdot \{\boldsymbol{v}\}_{\bar{x}}$$



Ecuatorial Geocentrico - Perifocal

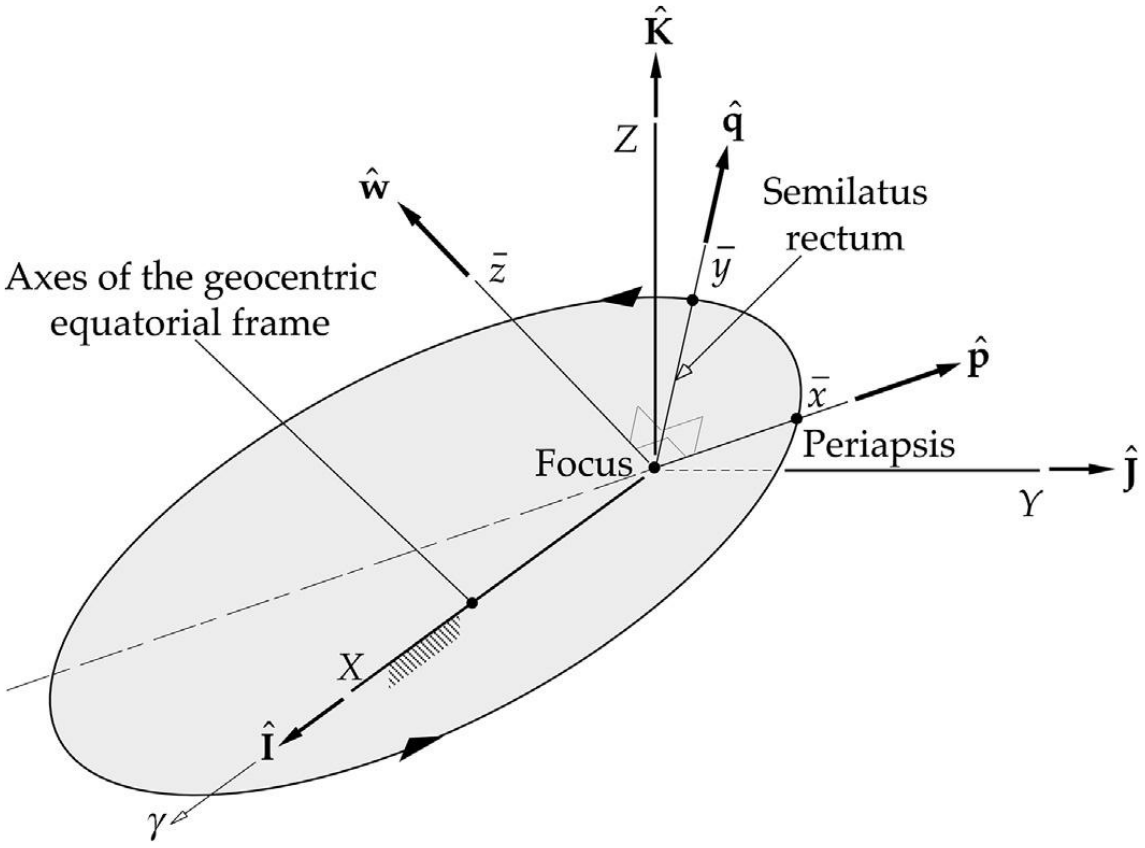
Por lo tanto, la matriz de cosenos directores $[\boldsymbol{Q}]_{X\bar{x}}$ de la transformación de XYZ a $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ es

$$[\boldsymbol{Q}]_{X\bar{x}} = [\boldsymbol{R_3}(\omega)] \cdot [\boldsymbol{R_1}(i)] \cdot [\boldsymbol{R_3}(\Omega)]$$

De esta forma, la transformación del plano perifocal al sistema ecuatorial geocéntrico es:

$$\{\boldsymbol{r}\}_X = [\boldsymbol{Q}]_{X\bar{x}} \cdot \{\boldsymbol{r}\}_{\bar{x}}$$

$$\{\boldsymbol{v}\}_X = [\boldsymbol{Q}]_{X\bar{x}} \cdot \{\boldsymbol{v}\}_{\bar{x}}$$



Ejercicio

A partir de los elementos orbitales:

Momento angular (km^2/s)	= 58311.7
Excentricidad	= 0.171212
Ascensión recta (deg)	= 255.279
Inclinación (deg)	= 153.249
Argumento del perigeo (deg)	= 20.0683
Anomalía verdadera (deg)	= 28.4456

Determinar el vector de estado

Ejercicio propuesto

Para el siguiente vector de estado:

$$\boldsymbol{r} = 0\,\hat{\boldsymbol{I}} - 0\,\hat{\boldsymbol{J}} + 10{,}000\,\hat{\boldsymbol{K}}\ (km)$$

$$\boldsymbol{v} = 6\,\hat{\boldsymbol{I}} + 0\,\hat{\boldsymbol{J}} + 0\,\hat{\boldsymbol{K}}\ (km/s)$$

a) ¿Dónde se encuentra actualmente el satélite? Graficar

b) ¿Cuál es el ángulo de trayectoria de vuelo en su posición actual?

c) ¿Cuál es el momento angular específico de la órbita?

d) ¿Cuáles son sus elementos orbitales?

Ejercicio

Otros elementos orbitales

¿Que pasa si la órbita es ecuatorial?

$$i = 0º \text{ o } i = 180º$$

el plano orbital y el plano ecuatorial, coinciden, no existiendo en este caso la línea de nodos

$$\boldsymbol{N_{i=0º\ o\ i=180º}} = \hat{\boldsymbol{K}} \times \boldsymbol{h} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{I}} & \hat{\boldsymbol{J}} & \hat{\boldsymbol{K}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & h_Z \end{vmatrix}$$

Otros elementos orbitales

Por lo que no se puede medir el RAAN

$$\Omega = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{N_x}{N}\right) & si\ N_Y \geq 0 \\ 360 - \cos^{-1}\left(\frac{N_x}{N}\right) & si\ N_Y < 0 \end{cases}$$

Ni el argumento de perigeo

$$\omega = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{N}}{N} \cdot \frac{\boldsymbol{e}}{e}\right) & si\ e_z \geq 0 \\ 360 - \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{N}}{N} \cdot \frac{\boldsymbol{e}}{e}\right) & si\ e_z < 0 \end{cases}$$

Otros elementos orbitales

si consideramos una órbita circular ($e = 0$), vemos que el argumento de perigeo queda definido, ya que no existe perigeo

$$\omega = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{N}}{N} \cdot \frac{\boldsymbol{e}}{e}\right) & si\ e_z \geq 0 \\ 360 - \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{N}}{N} \cdot \frac{\boldsymbol{e}}{e}\right) & si\ e_z < 0 \end{cases}$$

A su vez, tampoco podemos medir la anomalía verdadera, porque esta se media desde el perigeo

$$\theta = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{e}}{e} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) & si\ v_r \geq 0 \\ 360 - \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{e}}{e} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) & si\ v_r < 0 \end{cases}$$

Otros elementos orbitales

Elemento orbital	Rango de valores	Indefinido
$\boldsymbol{h = \lvert h \rvert = \lvert r \times v \rvert}$	Depende del tipo de orbita	Nunca
$\boldsymbol{e = \lvert e \rvert = \left\lvert \frac{1}{\mu}\left(\left(v^2 - \frac{\mu}{r}\right) r - r\, v_r v\right)\right\rvert}$	Depende del tipo de orbita	Nunca
$\boldsymbol{\theta = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{e}{e}\cdot\frac{r}{e}\right) & si\ v_r \geq 0 \\ 360 - \cos^{-1}\left(\frac{e}{e}\cdot\frac{r}{e}\right) & si\ v_r < 0 \end{cases}}$	Depende del tipo de orbita	Cuando $e = 0$ (órbitas circulares)
$\boldsymbol{i = \cos^{-1}(h_z/h)}$	$0° \leq i \leq 180$	Nunca
$\boldsymbol{\Omega = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{N_x}{N}\right) & si\ N_Y \geq 0 \\ 360 - \cos^{-1}\left(\frac{N_x}{N}\right) & si\ N_Y < 0 \end{cases}}$	$0° \leq \Omega \leq 360$	Cuando $i = 0$ o $i = 180$ (órbitas ecuatoriales)
$\boldsymbol{\omega = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{N}{N}\cdot\frac{e}{e}\right) & si\ e_z \geq 0 \\ 360 - \cos^{-1}\left(\frac{N}{N}\cdot\frac{e}{e}\right) & si\ e_z < 0 \end{cases}}$	$0° \leq \omega \leq 360$	Cuando $e = 0$ (órbitas circulares) y/o cuando $i = 0$ o $i = 180$ (órbitas ecuatoriales)

Otros elementos orbitales

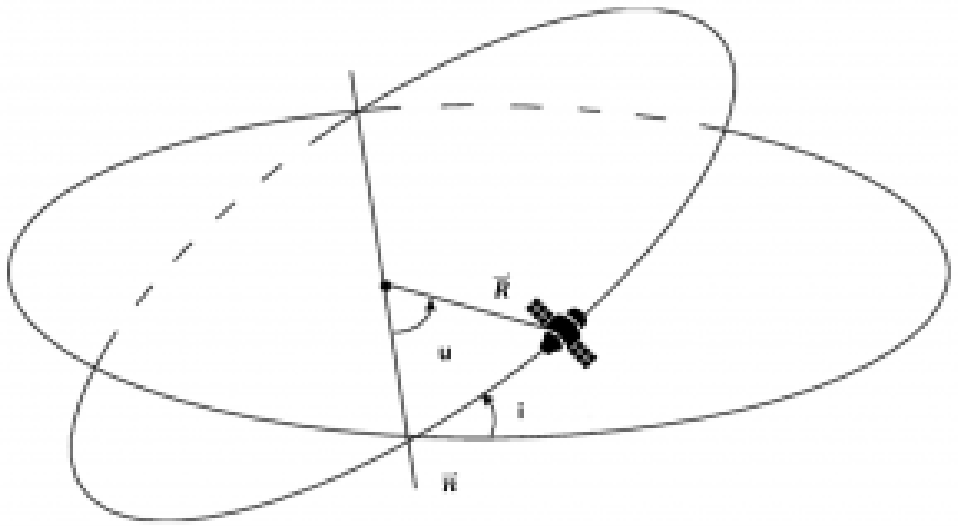
Elemento orbital	Rango de valores	Cuando usarlos	Que reemplaza
Argumento de latitud $u = \arccos\left(\frac{\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{r}}{N\,r}\right)$	$0 \le u \le 360$	Cuando $i \neq 0$ o $i \neq 180$ y $e = 0$	Reemplaza θ y ω
Longitud del perigeo $l_\omega = \arccos\left(\frac{e_I}{e}\right)$	$0 \le \omega_{true} \le 360$	Cuando $i = 0$ o $i = 180$ y $e \neq 0$	Reemplaza Ω y ω
Longitud verdadera $l_{true} = \arccos\left(\frac{r_I}{r}\right)$	$0 \le l_{true} \le 360$	Cuando $i = 0$ o $i = 180$ y $e = 0$	Reemplaza

Argumento de latitud

Cuando un satélite está en una órbita circular, su argumento de perigeo (ω) y su anomalía verdadera (θ) no están definidas. En este caso utilizamos el argumento de latitud u, que indica la ubicación del satélite en la órbita. Es el ángulo medido entre el vector nodal $\boldsymbol{N}$ y el vector posición del satélite $\boldsymbol{r}$

$$\cos u = \frac{\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{r}}{N\, r}$$

$$u = \arccos\left(\frac{\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{r}}{N\, r}\right)$$

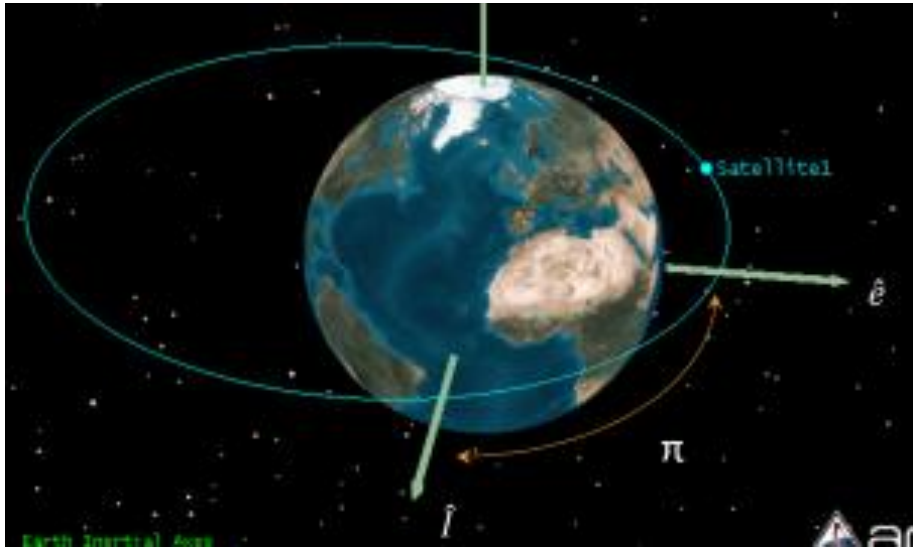


Longitud del perigeo

Cuando un satélite está en órbita ecuatorial, no tiene vector nodal $\boldsymbol{N}$ y por lo tanto el RAAN (Ω) y el argumento de perigeo (ω) no están definidos. En este caso, utilizamos la longitud del perigeo$l_\omega$que indica la orientación de la órbita, o donde se encuentra su perigeo. Es el ángulo medido entre la dirección del equinoccio vernal ($\check{\boldsymbol{I}}$) y el vector excentricidad $\boldsymbol{e}$ que apunta al perigeo

$$\cos l_\omega = \frac{\check{\boldsymbol{I}} \cdot \boldsymbol{e}}{e}$$

$$l_\omega = \arccos\left(\frac{e_I}{e}\right)$$

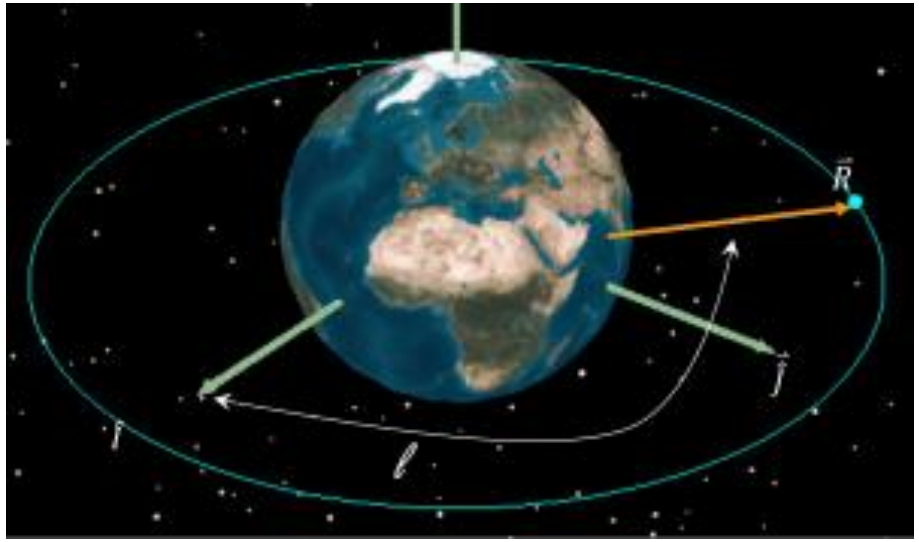


Longitud verdadera

Cuando un satélite está en una órbita ecuatorial y es circular, no tiene vector nodal $\boldsymbol{N}$ y por lo tanto el RAAN (Ω), el argumento de perigeo (ω) y la anomalía verdadera (θ) no están definidas. En este caso, usamos la longitud verdadera l_{true} que indica la ubicación del satélite en su órbita. Por lo tanto, es el ángulo medido entre la dirección del equinoccio vernal ($\check{\boldsymbol{I}}$) y el vector posición ($\boldsymbol{r}$)

$$\cos l_{true} = \frac{\check{\boldsymbol{I}} \cdot \boldsymbol{r}}{r}$$

$$l_{true} = \arccos\left(\frac{r_I}{r}\right)$$



Ejercicio propuesto

Para el siguiente vector de estado:

$$\boldsymbol{r} = 10.000\,\hat{\boldsymbol{I}} + 0\,\hat{\boldsymbol{J}} + 0\,\hat{\boldsymbol{K}}\ (km)$$

$$\boldsymbol{v} = 0\,\hat{\boldsymbol{I}} + 4.464\,\hat{\boldsymbol{J}} - 4.464\,\hat{\boldsymbol{K}}\ (km/s)$$

a) ¿Dónde se encuentra actualmente el satélite? Graficar

b) ¿Cuál es el ángulo de trayectoria de vuelo en su posición actual?

c) ¿Cuál es el momento angular específico de la órbita?

d) ¿Cuáles son sus elementos orbitales?

Ejercicio propuesto

Para el siguiente vector de estado:

$$\boldsymbol{r} = 0\,\hat{\boldsymbol{I}} - 7.000\,\hat{\boldsymbol{J}} + 0\,\hat{\boldsymbol{K}}\ (km)$$

$$\boldsymbol{v} = 9\,\hat{\boldsymbol{I}} + 0\,\hat{\boldsymbol{J}} + 0\,\hat{\boldsymbol{K}}\ (km/s)$$

a) ¿Dónde se encuentra actualmente el satélite? Graficar

b) ¿Cuál es el ángulo de trayectoria de vuelo en su posición actual?

c) ¿Cuál es el momento angular específico de la órbita?

d) ¿Cuáles son sus elementos orbitales?