UTN HAEDO

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL HAEDO

MECÁNICA ORBITAL

TIPOS DE ÓRBITAS

Formulas generales

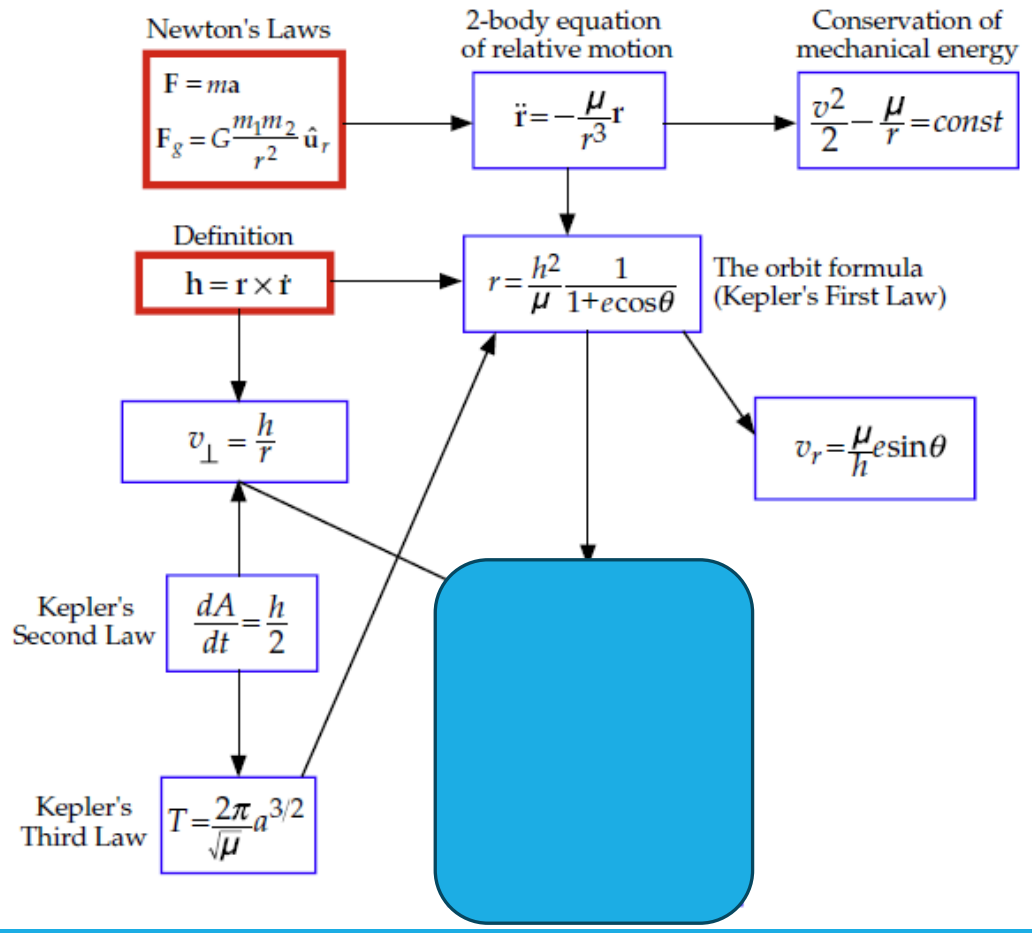
Ecuación de Órbita: $r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e\cos\theta}$

Momento angular específico: $h = r\, v_\perp$

Velocidad radial: $v_r = \frac{\mu}{h} e \sin\theta$

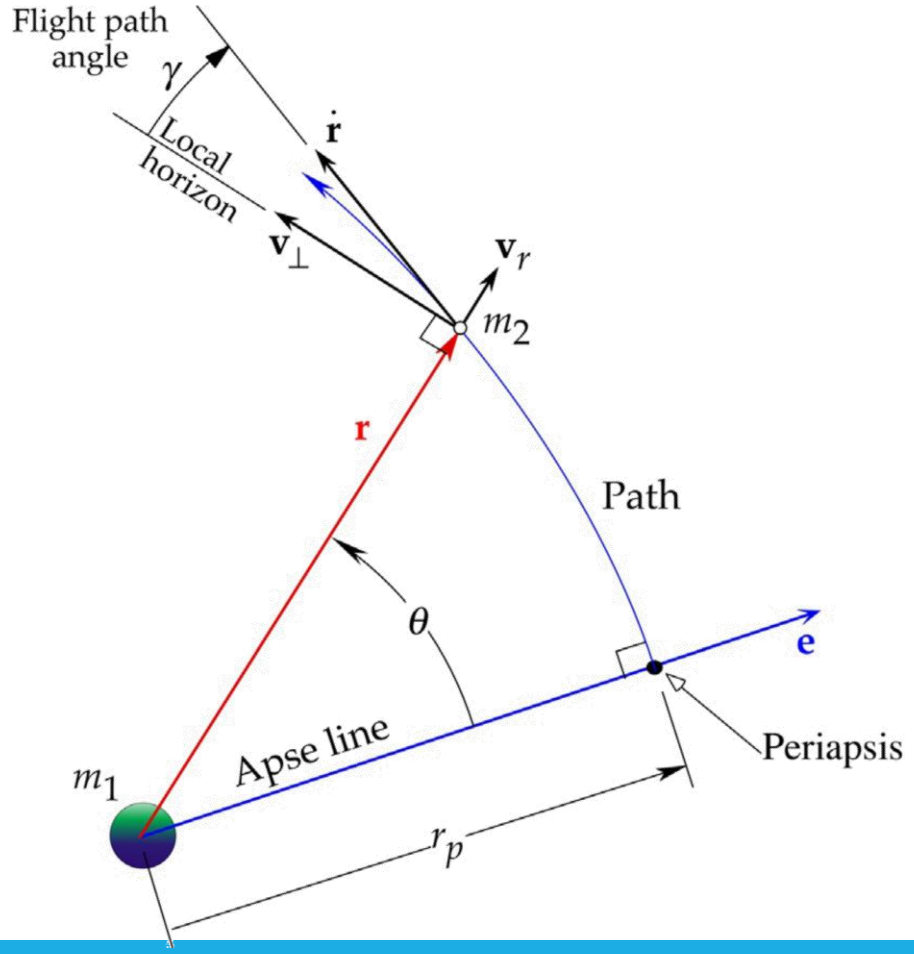
Velocidad total: $v = \sqrt{v_r^2 + v_\perp^2}$

Energía específica $\varepsilon = -\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{h^2}(1 - e^2)$



Formulas generales

Angulo de vuelo: $\tan\gamma = \frac{v_r}{v_\perp} = \frac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta}$



UTN HAEDO

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL HAEDO

ÓRBITA HIPERBÓLICA

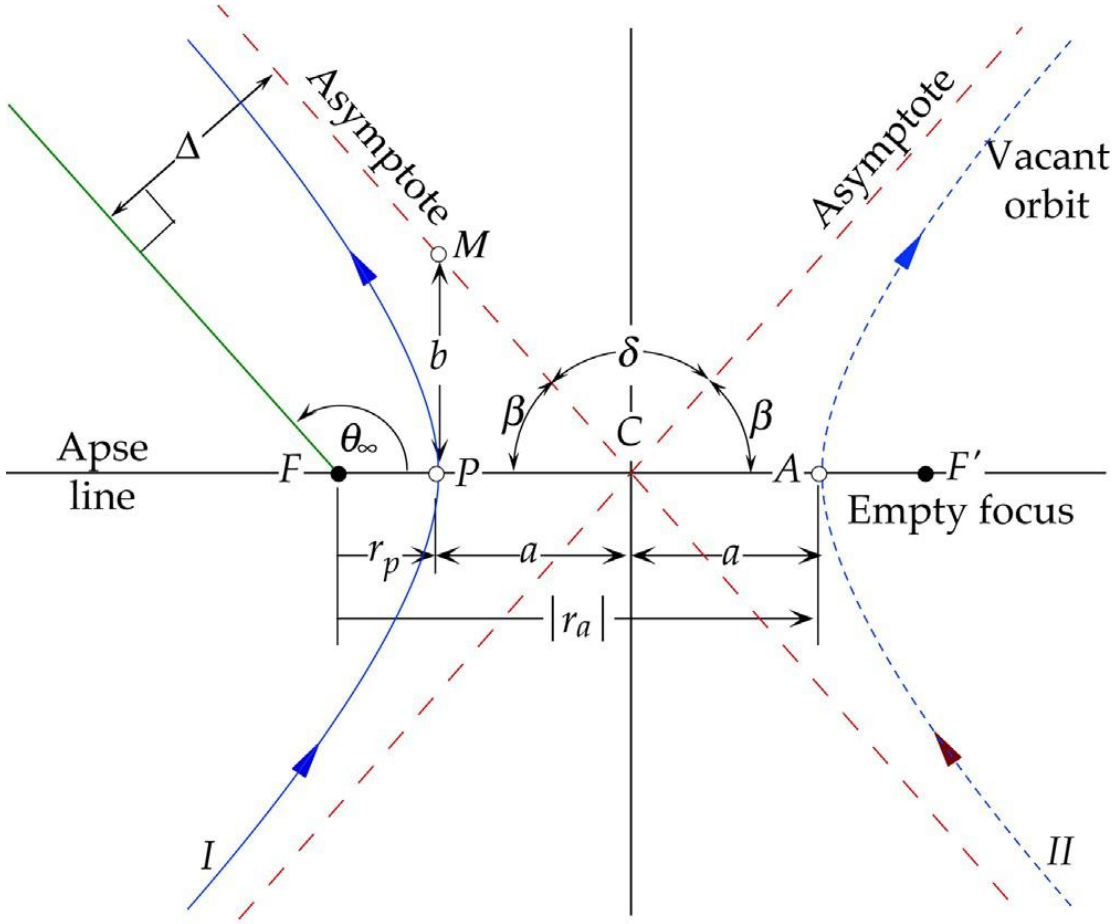
TIPOS DE ÓRBITAS

Órbita Hiperbólica

Si la excentricidad es mayor a 1, la fórmula de orbita queda expresada como

$$r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e\cos\theta}$$

describe la geometría de la hipérbola que se muestra en la Figura. El sistema consta de dos curvas simétricas. El cuerpo en órbita ocupa uno de ellos. La otra es su imagen matemática vacía



Órbita Hiperbólica

Claramente, el denominador de la ecuación anterior tiende a cero cuando $\cos\theta = 1/e$. Denotamos este valor de anomalía verdadera como

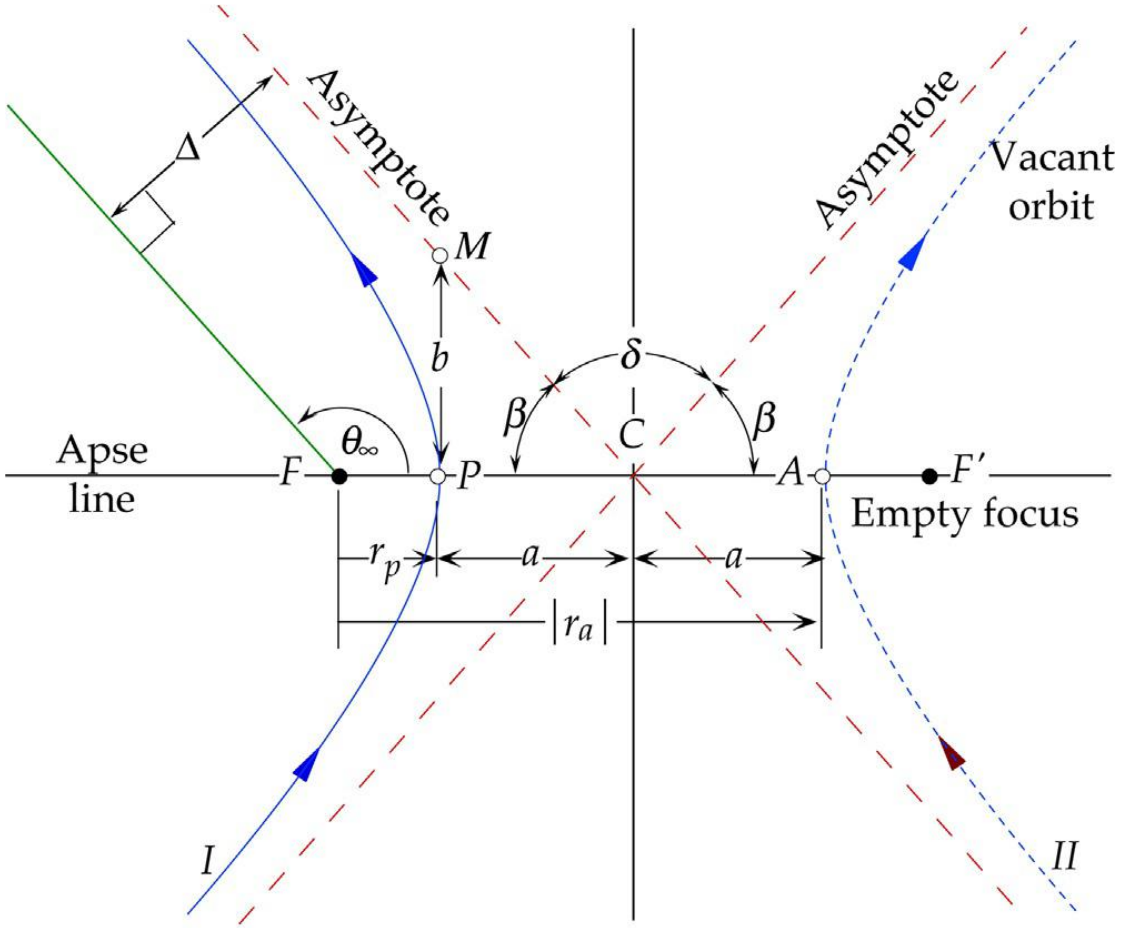
$$\theta_\infty = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{e}\right)$$

ya que la distancia radial se acerca al infinito a medida que la anomalía verdadera se acerca a θ_∞. θ_∞ se conoce como la anomalía verdadera de la asíntota. Observe que θ_∞ se encuentra entre $90°$ y $180°$. De la identidad trigonométrica $sin^2\theta_\infty + cos^2\theta_\infty = 1$ se deduce que

$$\sin\theta_\infty = \sqrt{\frac{e^2-1}{e}}$$

Órbita Hiperbólica

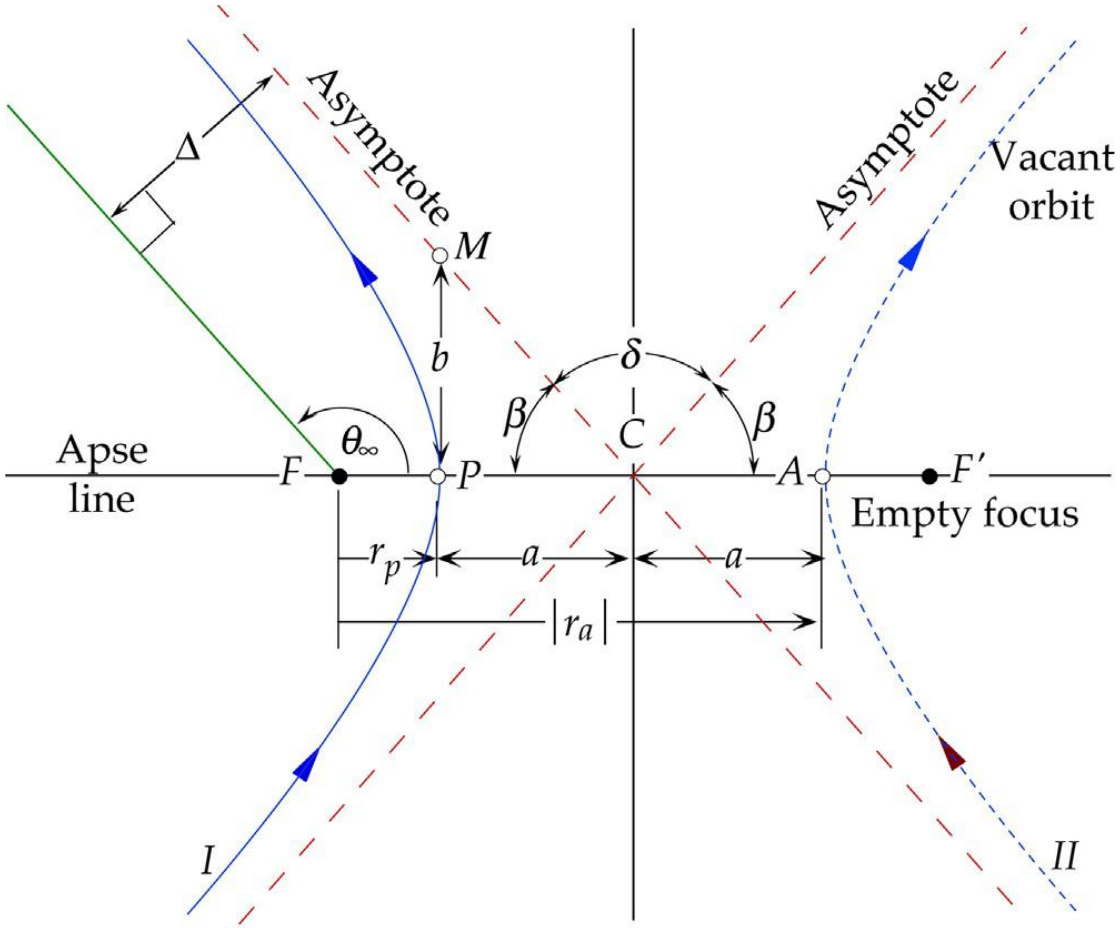
- Para $-\theta_\infty < \theta < \theta_\infty$, la trayectoria física es la hipérbola ocupada I que se muestra a la izquierda en la figura.
- Para $\theta_\infty < \theta < (360° - \theta_\infty)$, se traza la hipérbola II, la órbita vacía alrededor del foco vacío F'. (La órbita vacía es físicamente imposible, porque requeriría una fuerza gravitacional repulsiva).



Órbita Hiperbólica

La periapsis P se encuentra en la línea de apsis de la hipérbola física I, mientras que la apoapsis A se encuentra en la línea de apsis de la órbita vacía. El punto medio entre periapsis y apoapsis es el centro C de la hipérbola. Las asíntotas de la hipérbola son las líneas rectas hacia las que tienden las curvas cuando se acercan al infinito. Las asíntotas se cortan en C, formando un ángulo agudo β con la línea de apsis, donde $\beta = 180° - \theta_\infty$. Por lo tanto, $cos\beta = -\ cos\ \theta_\infty$, lo que significa

$$\beta = \cos^1(1/e)$$



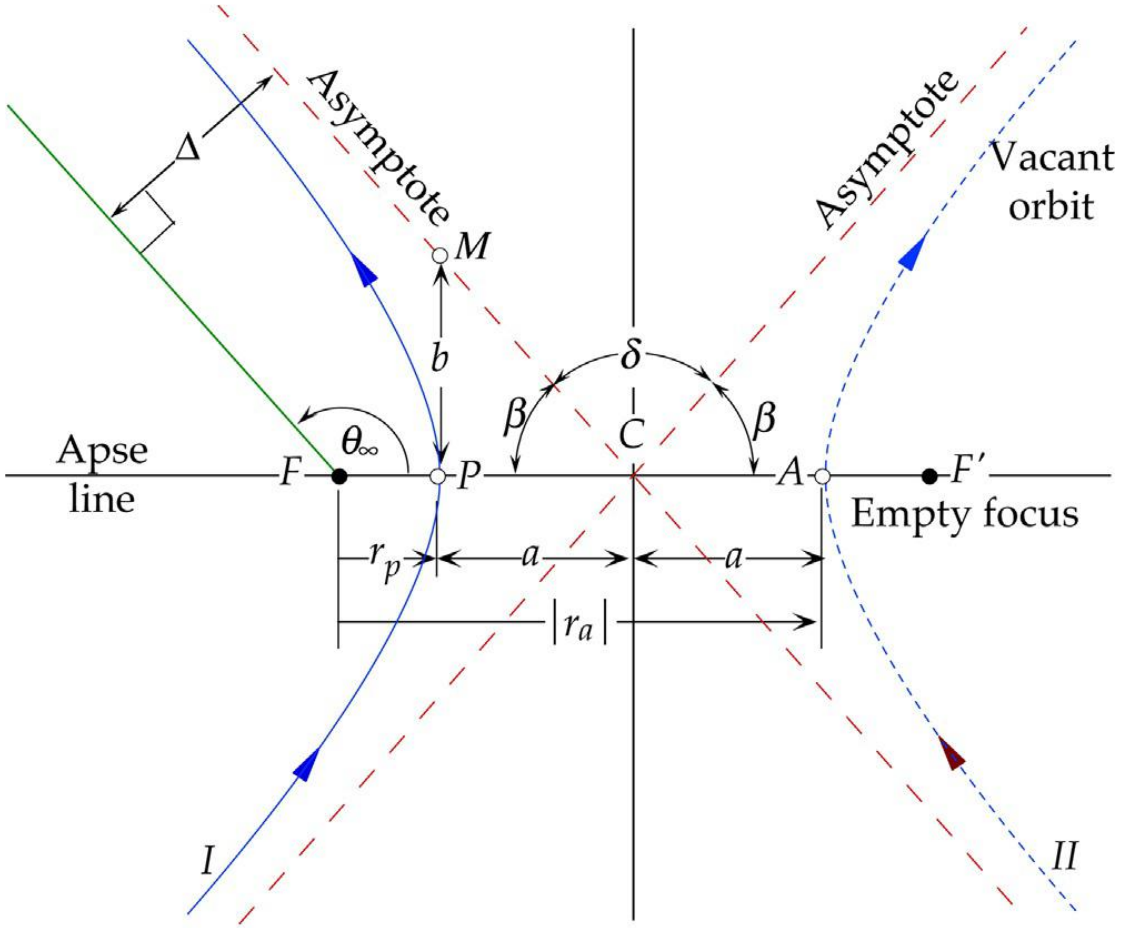
Órbita Hiperbólica

El ángulo δ entre las asíntotas se llama ángulo de giro. Este es el ángulo a través del cual el vector de velocidad del cuerpo en órbita gira cuando rodea el cuerpo que se atrae en F y regresa hacia el infinito. De la figura vemos que $\delta = 180° - 2\beta$, de modo que

$$\sin\frac{\delta}{2} = \sin\left(\frac{180° - 2\beta}{2}\right) = \sin(90° - \beta) = \cos\beta \overset{Ec.39}{=} \frac{1}{e}$$

O

$$\delta = 2\,sin^{-1}(1/e)$$



Órbita Hiperbólica

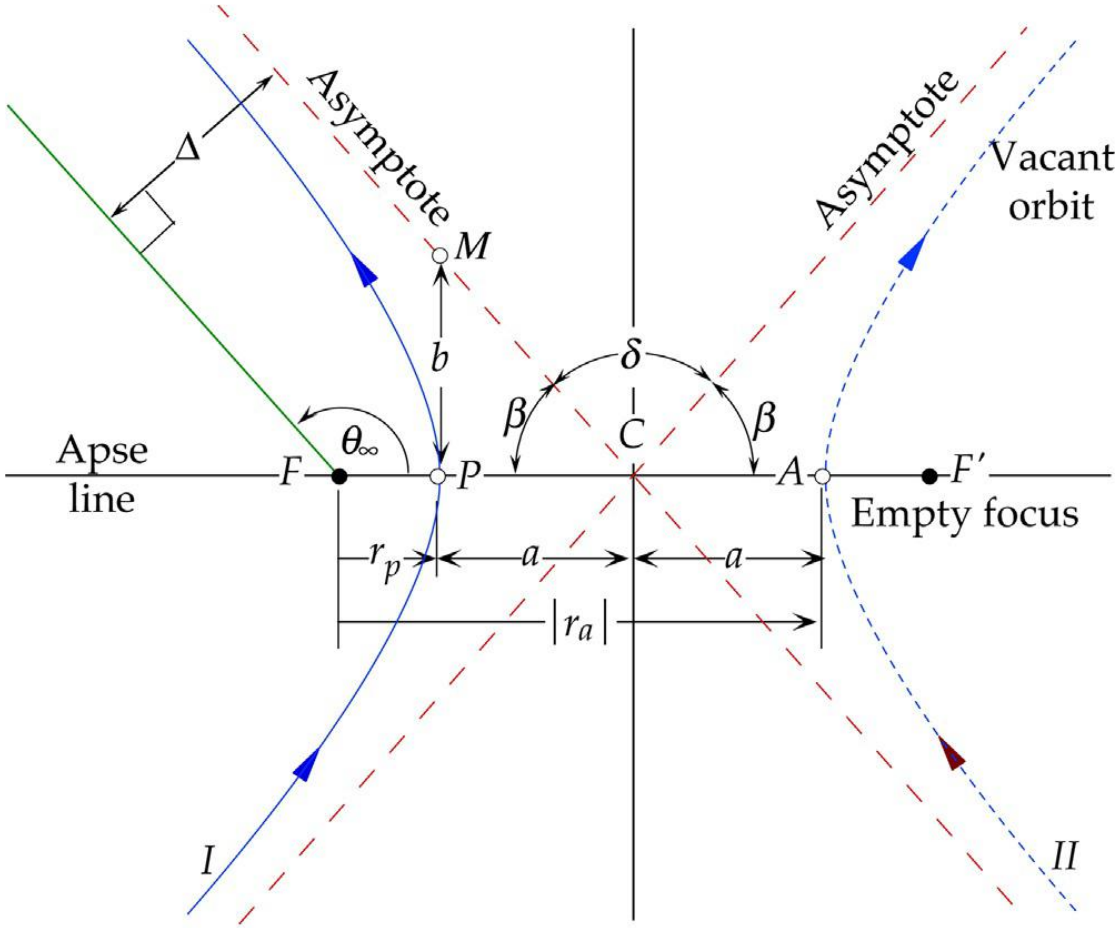
La distancia r_p desde el foco F hasta el periapsis,

$$r_p = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e}$$

Al igual que para una elipse, la coordenada radial r_a de la apoapsis se encuentra estableciendo $\theta = 180°$ en la ecuación

$$r_a = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1-e}$$

Observe que r_a es negativo, ya que $e > 1$ para la hipérbola. Esto significa que la apoapsis se encuentra a la derecha del foco F.



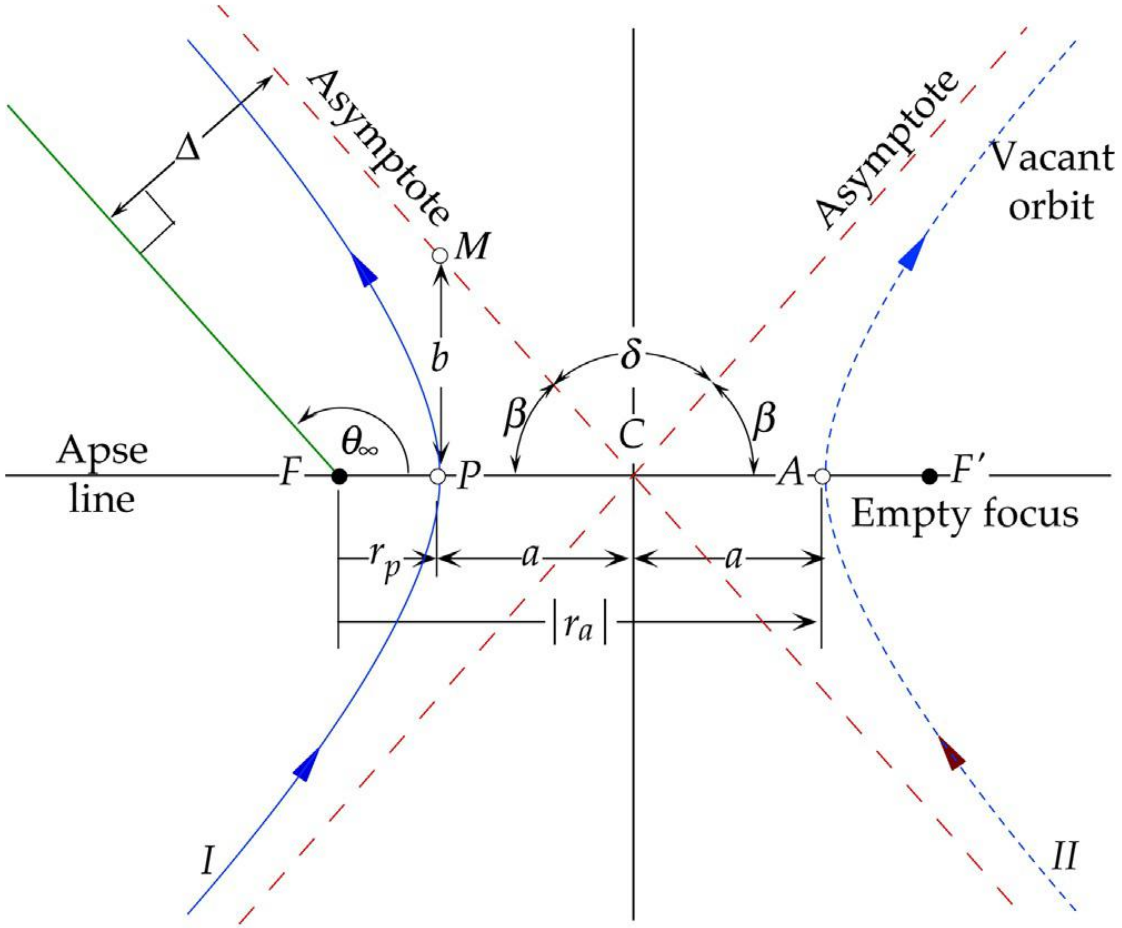
Órbita Hiperbólica

En la Figura vemos que la distancia $2a$ desde la periapsis P hasta la apoapsis A es

$$2a = |r_a| - r_p = -r_a - r_p$$

$$2a = -\frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e} - \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1-e}$$

$$2a = -\frac{h^2}{\mu}\left(\frac{1}{1+e} + \frac{1}{1-e}\right)$$



Órbita Hiperbólica

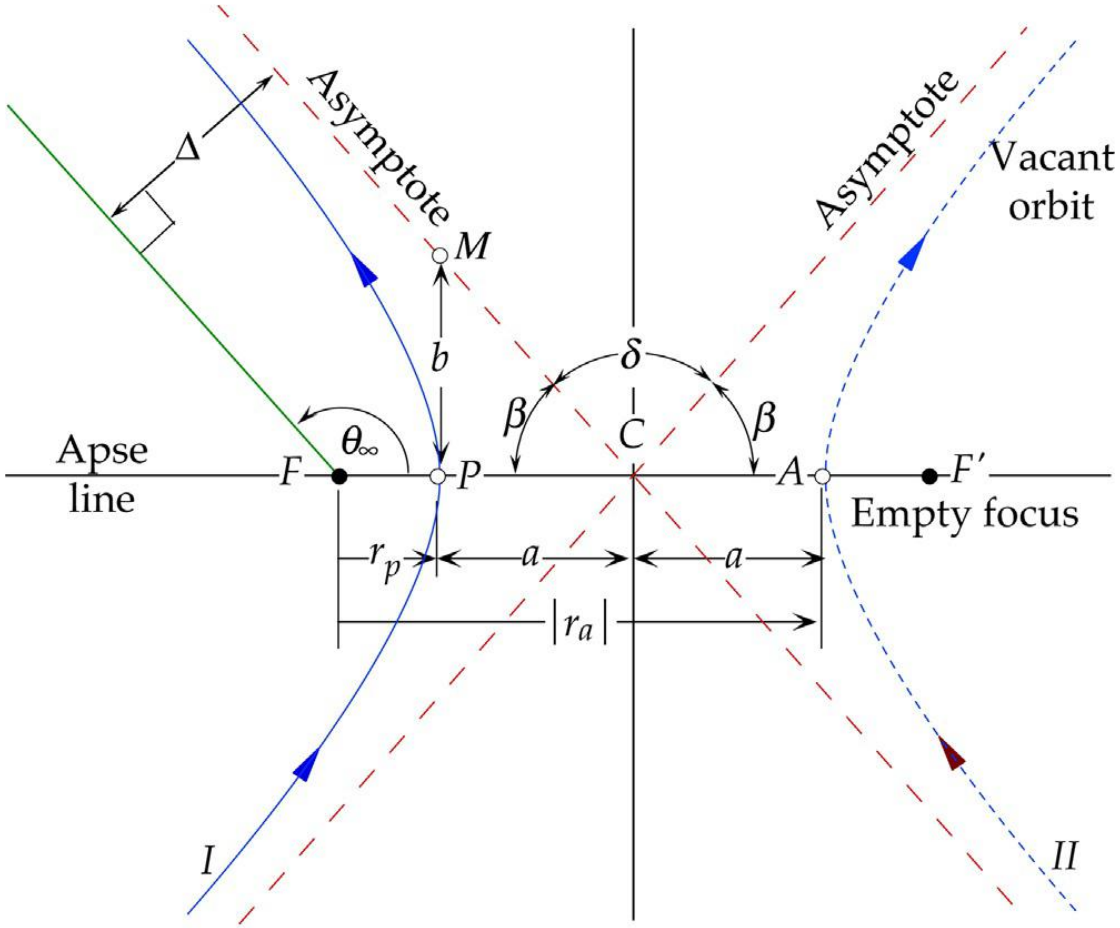
$$2a = -\frac{h^2}{\mu}\left(\frac{1-e+1+e}{(1+e)(1-e)}\right)$$

$$2a = -\frac{h^2}{\mu}\left(\frac{2}{1-e^2}\right)$$

$$2a = -2\frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1-e^2}$$

De esto se deduce que a, el semieje mayor de la hipérbola está dado por una expresión casi idéntica a la de una elipse

$$a = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{e^2-1}$$

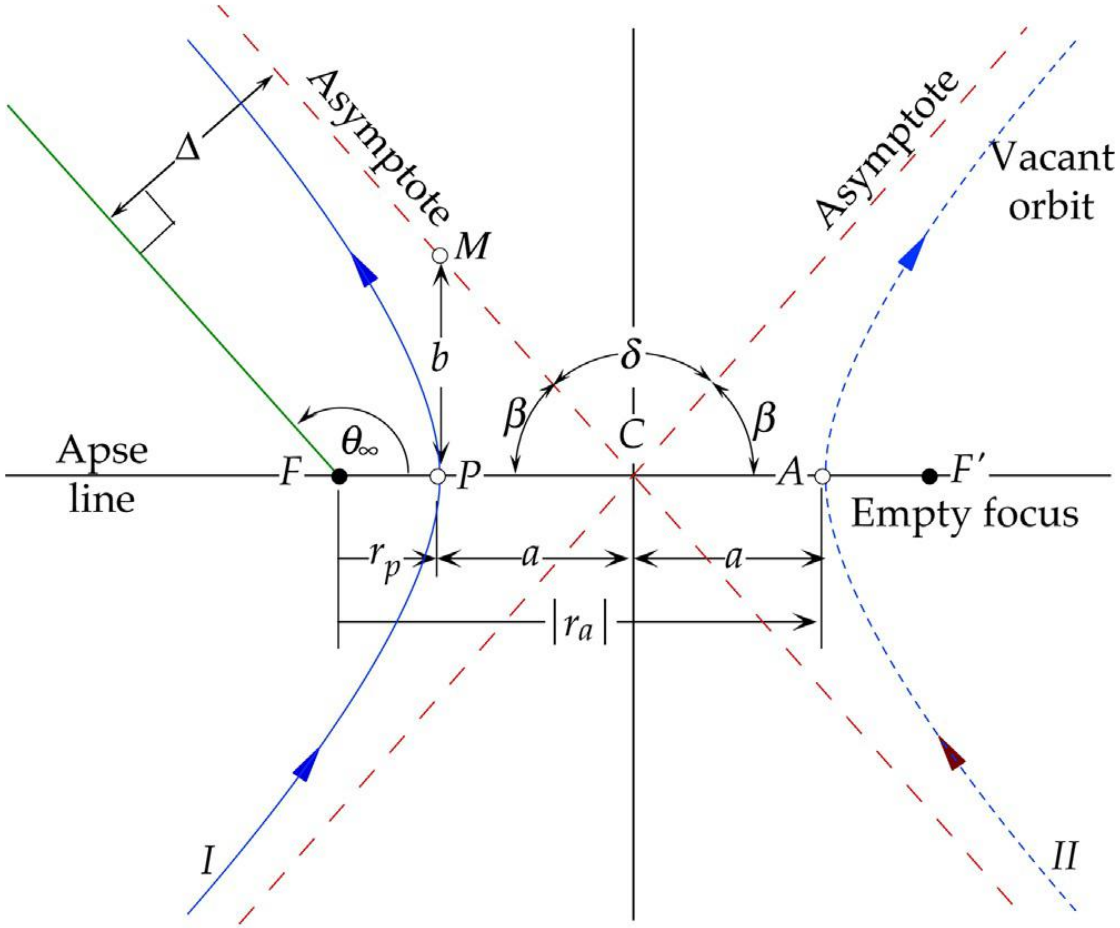


Órbita Hiperbólica

Por lo tanto, la ecuación de orbita puede escribirse para la hipérbola

$$r = a\,\frac{e^2 - 1}{1 + e\cos\theta} \qquad \begin{cases} r_p = a\,(e-1) \\ r_a = -a\,(e+1) \end{cases}$$

Esta fórmula es análoga a la órbita elíptica



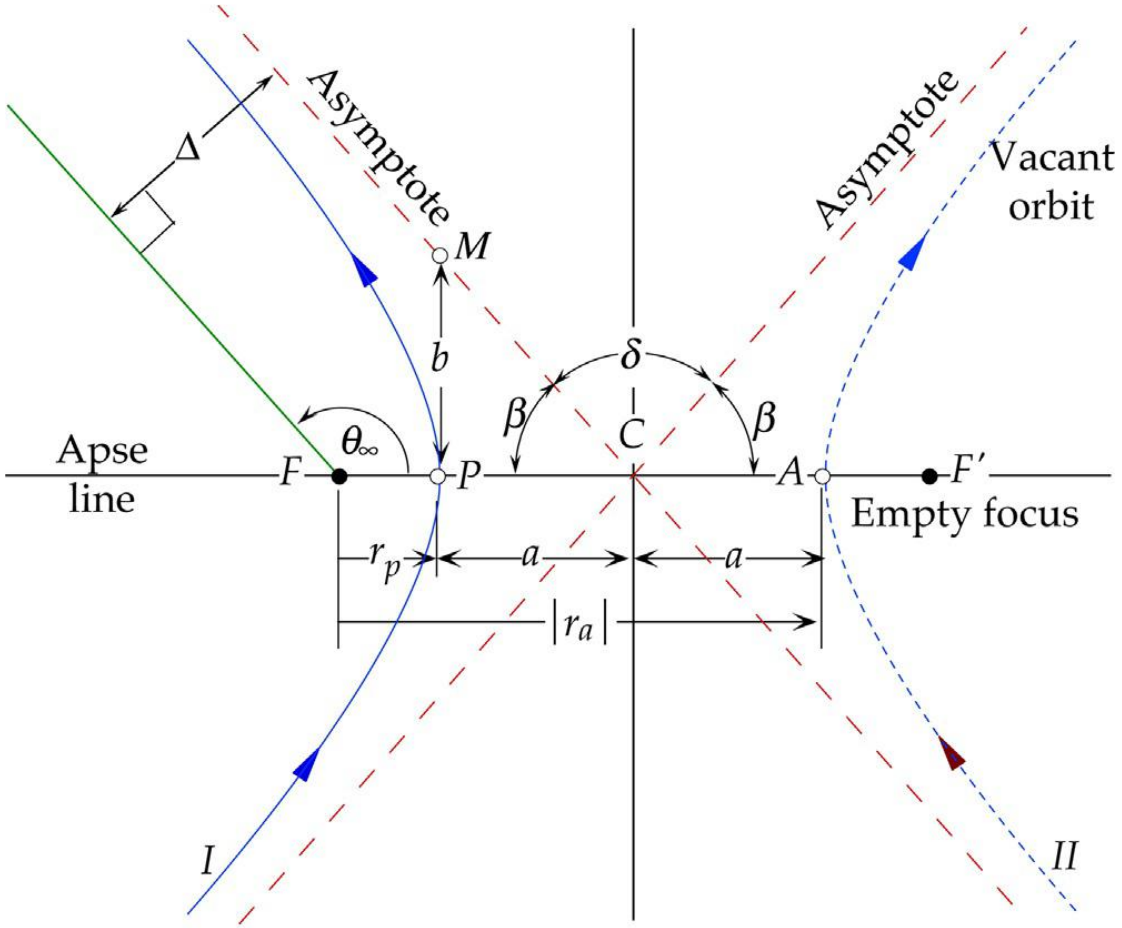
Órbita Hiperbólica

La distancia b desde el periapsis hasta una asíntota, medida perpendicular a la línea del ábside, es el semieje menor de la hipérbola. En la Figura, vemos que la longitud b del semieje menor $\overline{PM}$ es

$$b = a\tan\beta = a\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = a\frac{\sin(180° - \theta_\infty)}{\cos(180° - \theta_\infty)}$$

$$b = a\,\frac{\sin\theta_\infty}{-\cos\theta_\infty} = a\frac{\frac{\sqrt{e^2-1}}{e}}{-\left(-\frac{1}{e}\right)}$$

$$b = a\sqrt{e^2 - 1}$$



Órbita Hiperbólica

La distancia Δ entre la asíntota y una línea paralela que pasa por el foco se llama radio de apuntamiento, que se ilustra en la Figura. De esta figura vemos que

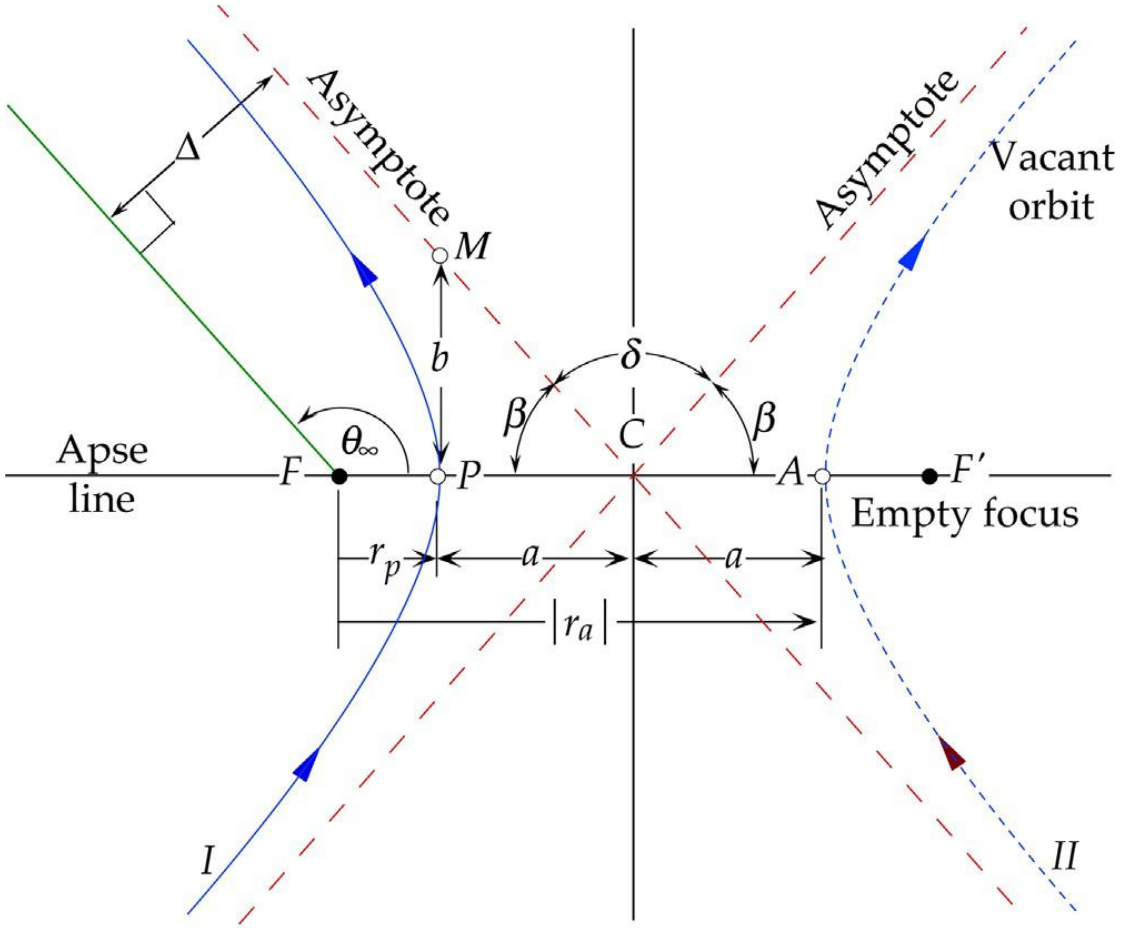
$$\Delta = (r_p + a)\sin\beta$$

$$= a\,e\sin\beta$$

$$= a\,e\frac{\sqrt{e^2-1}}{e}$$

$$= a\,e\sin\theta$$

$$a\,e\ \sin\sqrt{1-\cos^2\theta_\infty}$$



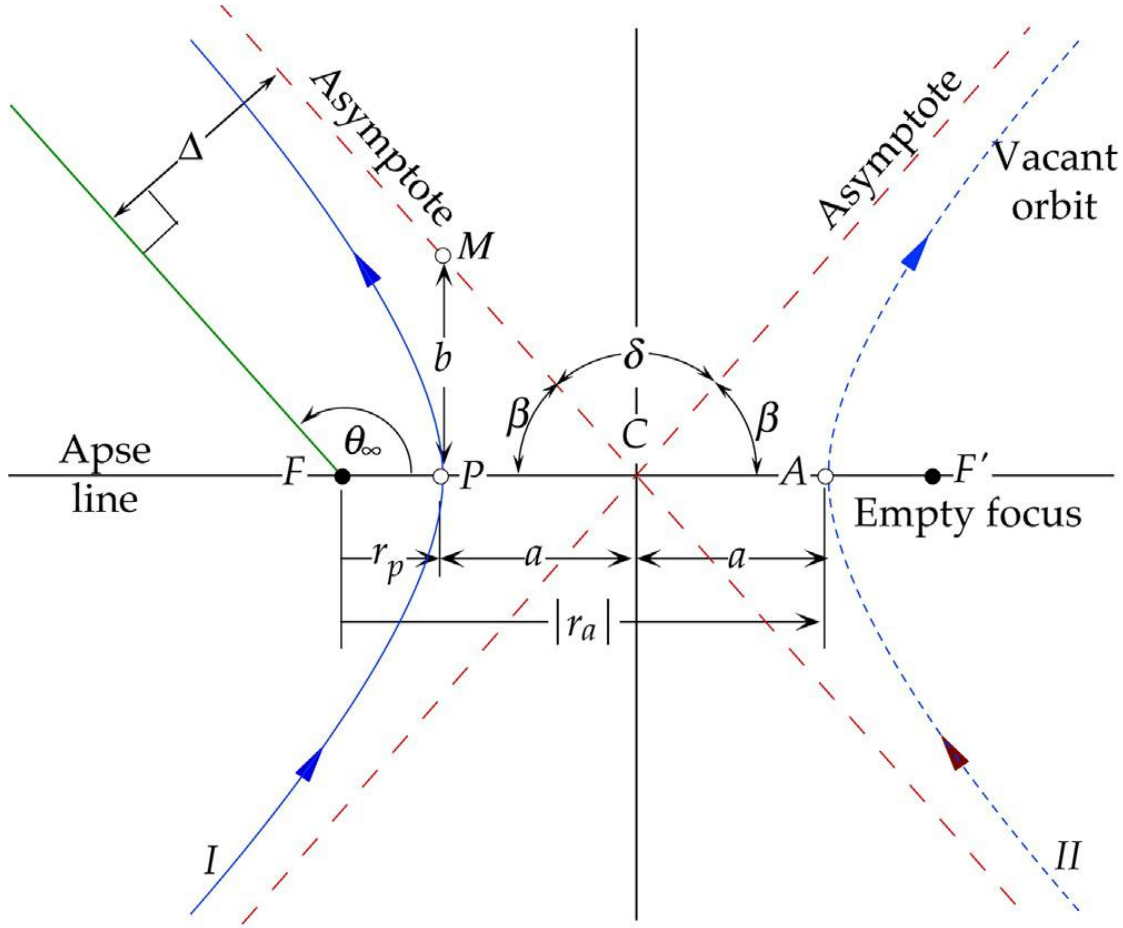
Órbita Hiperbólica

$$= a\, e\, \sin\sqrt{1 - \cos^2\theta_\infty}$$

$$= a\, e \sqrt{1 - \frac{1}{e^2}}$$

$$\Delta = a\sqrt{e^2 - 1}$$

Comparando este resultado con la del semieje menor b, está claro que el radio de apuntamiento es igual a la longitud del semieje menor de la hipérbola.

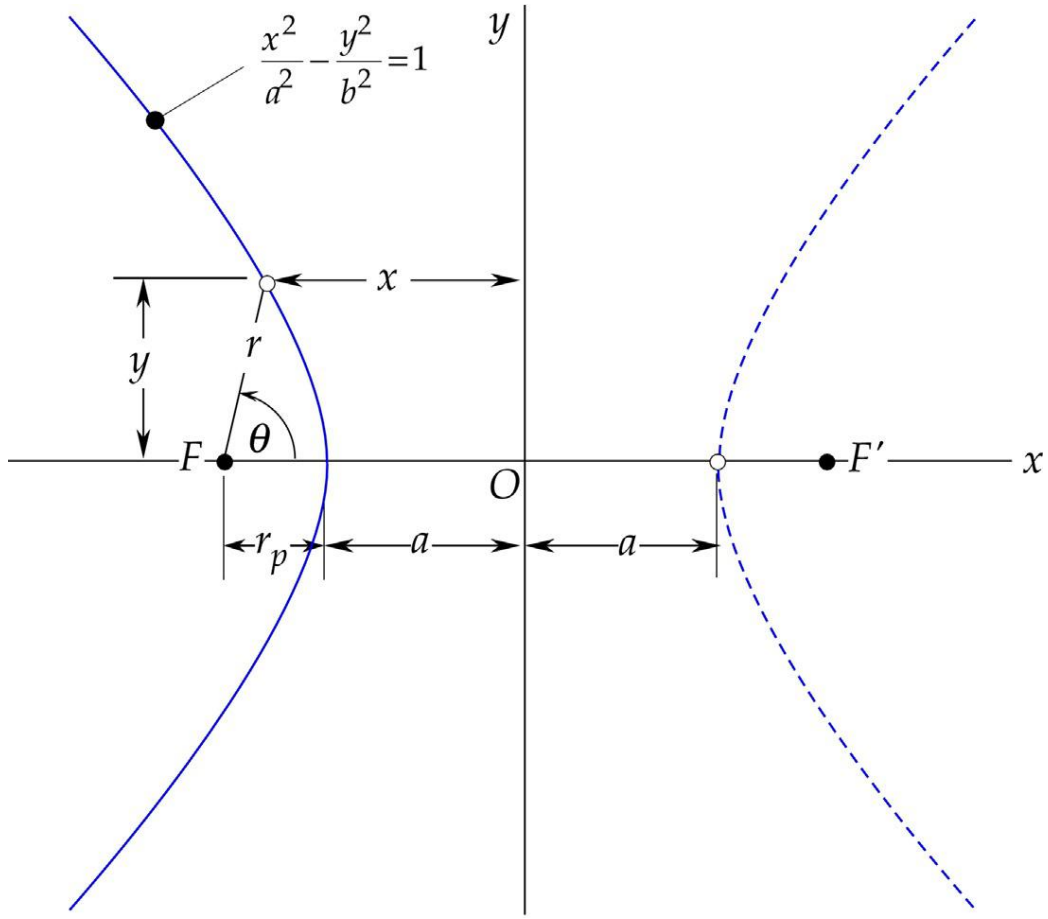


Órbita Hiperbólica

Podemos expresar la forma polar de la ecuación de la hipérbola en un sistema de coordenadas cartesiano cuyo origen está en este caso a medio camino entre los dos focos

$$\begin{cases} x = -a - r_p + r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -a - a(e-1) + a\dfrac{e^2 - a}{1 + e\cos\theta}\cos\theta = -a\,\dfrac{e + \cos\theta}{1 + e\cos\theta} \\ y = \dfrac{b}{\sqrt{e^2-1}}\,\dfrac{e^2 - \dfrac{b}{\sqrt{e^2-1}}}{1 + e\cos\theta}\sin\theta = b\,\dfrac{\sqrt{e^2-1}}{1 + e\cos\theta} \end{cases}$$



Órbita Hiperbólica

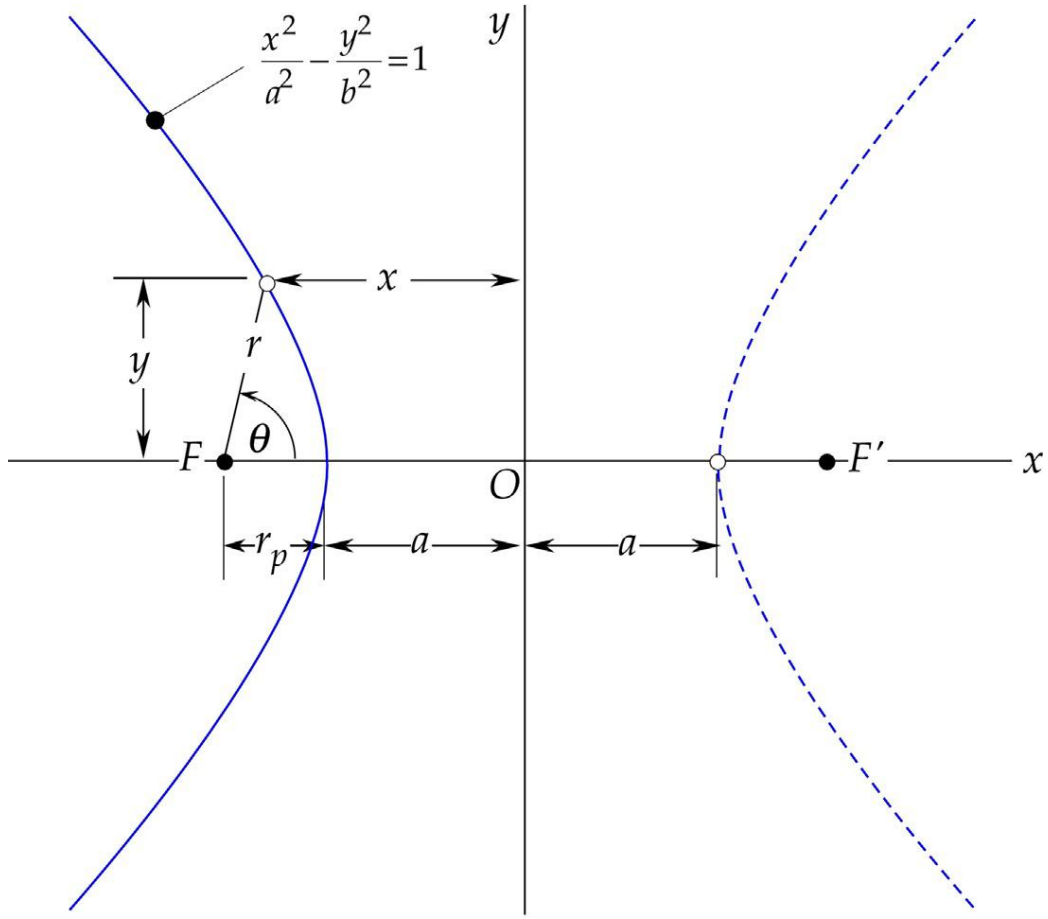
Resulta que

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{e + \cos\theta}{1 + e\cos\theta}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{e^2 - 1}}{1 + e\cos\theta}\right)^2$$

$$= \frac{e^2 + 2\,e\cos\theta + \cos^2\theta - (e^2 - 1)(1 - \cos^2\theta)}{(1 + e\cos\theta)^2}$$

$$= \frac{1 + 2\,e\cos\theta + e^2\cos^2\theta}{(1 + e\cos\theta)^2} = \frac{(1 + e\cos\theta)^2}{(1 + e\cos\theta)^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Órbita Hiperbólica

En cuanto a la ecuación de energía $\varepsilon = -\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{h^2}(1-e^2)$ usando $a = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{e^2-1}$

$$\varepsilon = \frac{\mu}{2\,a}$$

La energía específica de una órbita hiperbólica es claramente positiva e independiente de la excentricidad.

Órbita Hiperbólica

La conservación de la energía para una trayectoria hiperbólica es

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{\mu}{2a}$$

Sea v_∞ la velocidad con la que un cuerpo en una trayectoria hiperbólica llega al infinito.

$$v_\infty = \sqrt{\frac{\mu}{a}}$$

v_∞ se llama exceso de velocidad hiperbólica.

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{{v_\infty}^2}{2}$$

Órbita Hiperbólica

Sustituyendo la expresión para velocidad de escape, $v_{esc} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$, obtenemos para una trayectoria hiperbólica

$$v^2 = v_{esc}^2 + {v_\infty}^2$$

Esta ecuación muestra claramente que el exceso de velocidad hiperbólica v_∞ representa el exceso de energía cinética sobre la que se requiere para simplemente escapar del centro de atracción. El cuadrado de v_∞ se denota C_3 y se conoce como energía característica.

$$C_3 = v_\infty^2$$

Órbita Hiperbólica

C_3 es una medida de la energía requerida para una misión interplanetaria, y C_3 también es una medida de la energía máxima que un vehículo de lanzamiento puede impartir a una nave espacial de una masa determinada. Obviamente, para coincidir con un vehículo de lanzamiento con una misión, $C_{3_{vehiculo\ de\ lanzamiento}} > C_{3_{mision}}$

Órbita Hiperbólica

Tenga en cuenta que el exceso de velocidad hiperbólica también se puede obtener de las ecuaciones

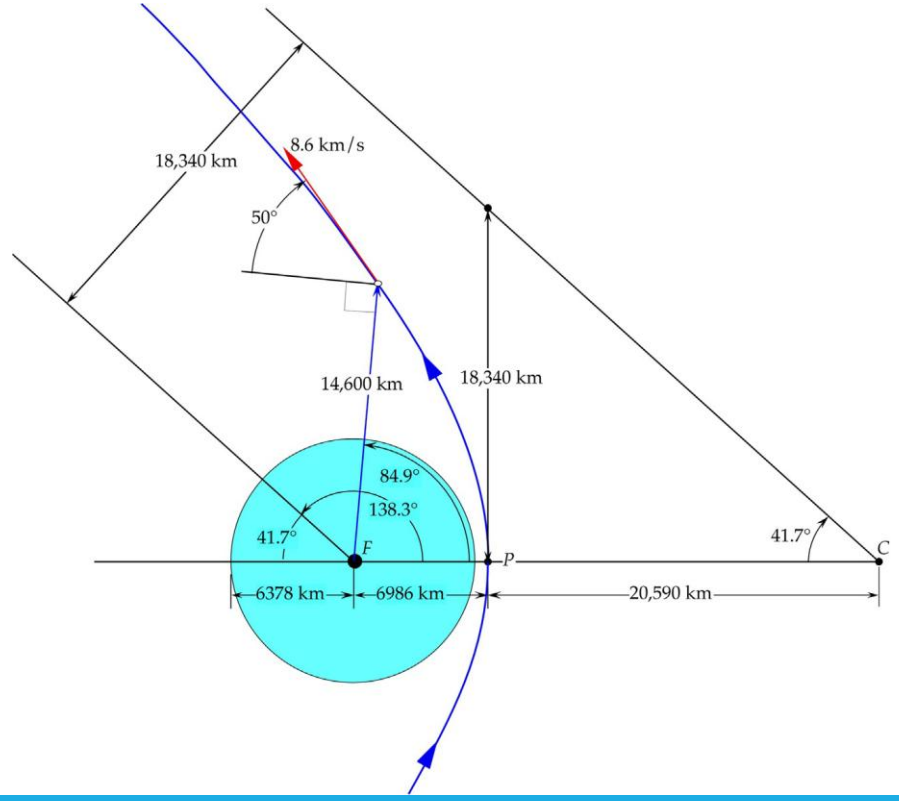
$\sin\theta_\infty = \sqrt{\frac{e^2-1}{e}}$ y la velocidad radial $v_r = \frac{\mu}{h} e \sin\theta$

$$v_\infty = \frac{\mu}{h} e \sin\theta = \frac{\mu}{h}\sqrt{e^2-1}$$

Órbita Hiperbólica: Ejercicio 1

En un punto dado de la trayectoria geocéntrica de una nave espacial, el radio es de 14.600 km, la velocidad es de 8,6 km/s y el ángulo de la trayectoria de vuelo es de 50°. Demuestre que la trayectoria es una hipérbola y calcule lo siguiente:

- Velocidad radial y tangencial
- Momento angular
- Excentricidad
- Verdadera anomalía
- Radio del perigeo
- Semieje mayor
- C_3
- Angulo de giro
- Radio de puntería



Órbita Hiperbólica: Ejercicio 1

Dado que tanto el radio como la velocidad están dados, podemos determinar el tipo de trayectoria comparando la velocidad con la velocidad de escape (de una trayectoria parabólica) en el radio dado:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 398600}{14600}} = 7{,}389\ km/s$$

La velocidad de escape es menor que la velocidad de la nave espacial de $8.6\ km/s$, lo que significa que el camino es una hipérbola

Órbita Hiperbólica: Ejercicio 1

Antes de embarcarse en la búsqueda de los datos orbitales necesarios, recuerde que todo depende de los parámetros orbitales primarios, el momento angular h y la excentricidad e. Estas se encuentran entre la lista de cinco incógnitas para este problema: $h, e, \theta, v_r \; y \; v_\perp$. Tenemos cinco ecuaciones que involucran estas cinco cantidades y los datos dados:

$$r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e \cos\theta} \qquad \tan\gamma = \frac{v_r}{v_\perp}$$

$$v_r = \frac{\mu}{h} e \sin\theta \qquad v_\perp = \frac{h}{\mu} \qquad v = \sqrt{v_r^2 + v_\perp^2}$$

Órbita Hiperbólica: Ejercicio 1

Velocidad radial y tangencial

$$\tan\gamma = \frac{v_r}{v_\perp} \rightarrow v_r = v_\perp \tan 50° \rightarrow v_r = 1{,}1918\, v_\perp$$

Sustituyendo esto y la velocidad dada en la ecuación $v = \sqrt{v_r^2 + v_\perp^2}$ obtenemos

$$v^2 = v_r^2 + v_\perp^2$$

$$8{,}6^2 = (1{,}1918\, v_\perp)^2 + v_\perp^2$$

$$v_\perp = 5{,}5278 \frac{km}{s}$$

$$v_r = 6{,}5880 \frac{km}{s}$$

Órbita Hiperbólica: Ejercicio 1

Momento angular

El momento angular ahora se puede encontrar a partir de la ecuación $v_{\perp} = \frac{h}{\mu}$

$$h = 14.600 \cdot 5{,}528 = 80.708 \frac{km^2}{s}$$

Órbita Hiperbólica: Ejercicio 1

Excentricidad y anomalía verdadera

$$\begin{cases} v_r = \dfrac{\mu}{h} e \sin\theta \\ r = \dfrac{h^2}{\mu} \dfrac{1}{1 + e\cos\theta} \end{cases}$$

Órbita Hiperbólica: Ejercicio 1

Excentricidad y anomalía verdadera

$$v_r = \frac{\mu}{h} e \sin\theta$$

$$6{,}588 = \frac{398.600}{80.708} e \sin\theta$$

$$e \sin\theta = 1{,}3339$$

$$r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e\cos\theta}$$

$$14.600 = \frac{80.708^2}{398.600} \frac{1}{1 + e\cos\theta}$$

$$e \cos\theta = 0{,}1193$$

Órbita Hiperbólica: Ejercicio 1

Excentricidad y anomalía verdadera

Al elevar al cuadrado las expresiones y luego sumándolos, obtenemos la excentricidad,

$$(e \sin\theta)^2 + (e \cos\theta)^2 = 0{,}1193^2 + 1{,}3339^2$$

$$e^2 = 1{,}7936$$

$$e = 1{,}3393$$

Órbita Hiperbólica: Ejercicio 1

Excentricidad y anomalía verdadera

Sustituimos e en la una de las ecuaciones anteriores

$$e \cos\theta = 0{,}1193$$

$$1{,}3393 \cos\theta = 0{,}1193$$

$$\theta = 84{,}889° \; o \; \theta = 275{,}11°$$

Órbita Hiperbólica: Ejercicio 1

Excentricidad y anomalía verdadera

$$\theta = 84{,}889° \; o \; \theta = 275{,}11°$$

Elegimos el menor de los ángulos porque las $e\cos\theta = 0{,}1193$ y $e\sin\theta = 1{,}3339$ implican que tanto $sen\ \theta$ como $cos\ \theta$ son positivos, lo que significa que θ se encuentra en el primer cuadrante ($\theta \leq 90°$). Alternativamente, podemos observar que el ángulo de trayectoria de vuelo dado ($50°$) es positivo, lo que significa que la nave espacial está volando lejos del perigeo, por lo que la anomalía verdadera debe ser inferior a $180°$. En cualquier caso, la anomalía verdadera viene dada por $\theta = 84{,}889°$.

Órbita Hiperbólica: Ejercicio 1

Radio de perigeo

Usando la ecuación a

$$r_p = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1 + e\cos 0} = \frac{80.710^2}{398.600}\frac{1}{1 + 1{,}339} = 6.986\ km$$

Semieje mayor

El semieje mayor de la hipérbola se encuentra como:

$$a = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{e^2 - 1} = \frac{80.710^2}{398.600}\frac{1}{1{,}339^2 - 1} = 20.590\ km$$

Órbita Hiperbólica: Ejercicio 1

C_3

El exceso de velocidad hiperbólica se encuentra usando la $v^2 = v_{esc}^2 + v_\infty^2$

$$v^2 = v_{esc}^2 + v_\infty^2 \rightarrow \ v_\infty^2 = v^2 - v_{esc}^2 = 8{,}6^2 - 7{,}389^2 = 19{,}36\frac{km^2}{s^2}$$

$$C_3 = v_\infty^2 = 19{,}36\frac{km^2}{s^2}$$

Órbita Hiperbólica: Ejercicio 1

Angulo de giro

La fórmula para el ángulo de giro es

$$\delta = 2\,sin^1(1/e) = 2\,sin^1(1/1{,}339) = 96{,}60°$$

Radio de puntería

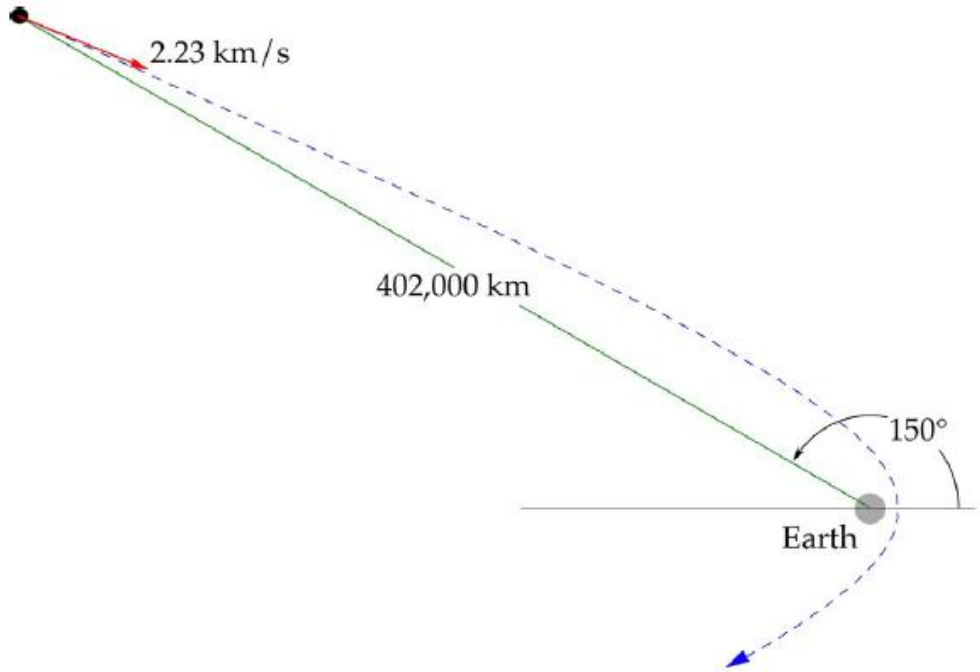
Según la ecuación el radio de puntería es

$$\Delta = a\sqrt{e^2 - 1} = 20.590\sqrt{1{,}339^2 - 1} = 18.340\ km$$

Órbita Hiperbólica: Ejercicio 2

Un meteoro es observado por primera vez aproximándose a la Tierra cuando se encuentra a 402.000 km del centro de la Tierra, con una anomalía verdadera de 150º. Si la velocidad del meteoro en ese instante es de 2,23 km/s, calcular:

1. Demostrar que es una orbita hiperbólica
2. La energía de la orbita
3. Semieje mayor
4. La excentricidad de la trayectoria.
5. La altitud en el punto de máxima aproximación.
6. La velocidad en el punto de máxima aproximación.
7. La velocidad de exceso hiperbólico



Órbita Hiperbólica: Ejercicio 2

Resumen de formulas

Hiperbólicas ($e > 1$)

$$\theta_\infty = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{e}\right)$$

$$\delta = 2\,sin^{-1}\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$\Delta = a\sqrt{e^2 - 1}$$

$$a = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{e^2 - 1}$$

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{\mu}{2a}$$

$$v_\infty = \sqrt{\frac{\mu}{a}}$$

$$\varepsilon_\infty = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{{v_\infty}^2}{2}$$

$$v^2 = v_{esc}^2 + {v_\infty}^2$$

$$C_3 = v_\infty^2$$

Resumen de formulas

Hiperbólicas ($e > 1$)

Notar que estas dos ultimas ecuaciones pueden reescribirse como sigue (donde a es positivo),

$$-a = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1-e^2} \qquad \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2(-a)}$$

Es decir, si suponemos que el semieje mayor de una hipérbola tiene un valor negativo, entonces la fórmula del semieje mayor y la ecuación de energia se vuelven idénticas para elipses e hipérbolas. No hay ninguna ventaja en este punto en exigir que las hipérbolas tengan semiejes mayores negativos. Sin embargo, será necesario hacerlo para la formulación de la variable universal que se presentará en próximas unidades.

Resumen de formulas

Confines de comparación, la Figura muestra una variedad de trayectorias, desde un círculo hasta hipérbolas, todas con un foco y periapsis comunes. La parábola es la demarcación entre las órbitas cerradas de energía negativa (elipses) y las órbitas abiertas de energía positiva (hipérbolas).

