UTN HAEDO

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

FACULTAD REGIONAL HAEDO

# ÓRBITA PARABÓLICA

## TIPOS DE ÓRBITAS

# Formulas generales

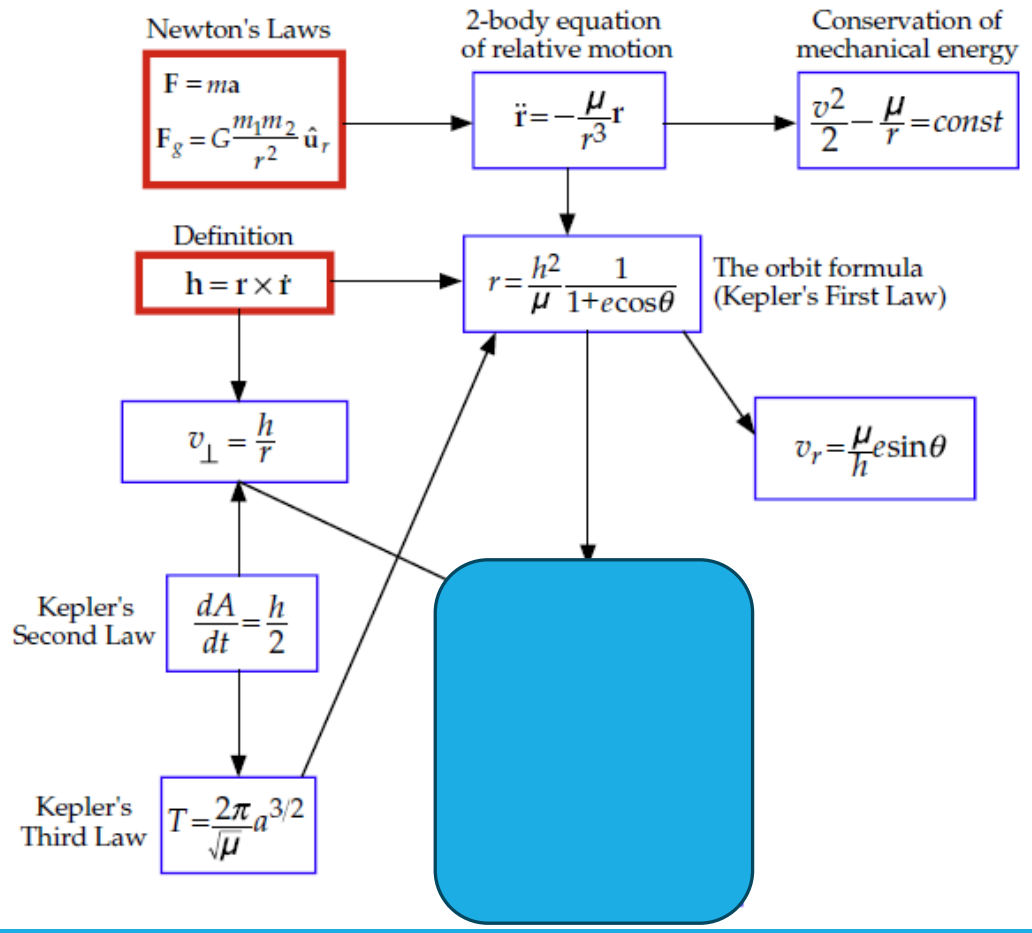
Ecuación de Orbita: $r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e\cos\theta}$

Momento angular especifico: $h = r\, v_\perp$

Velocidad radial: $v_r = \frac{\mu}{h} e \sin\theta$

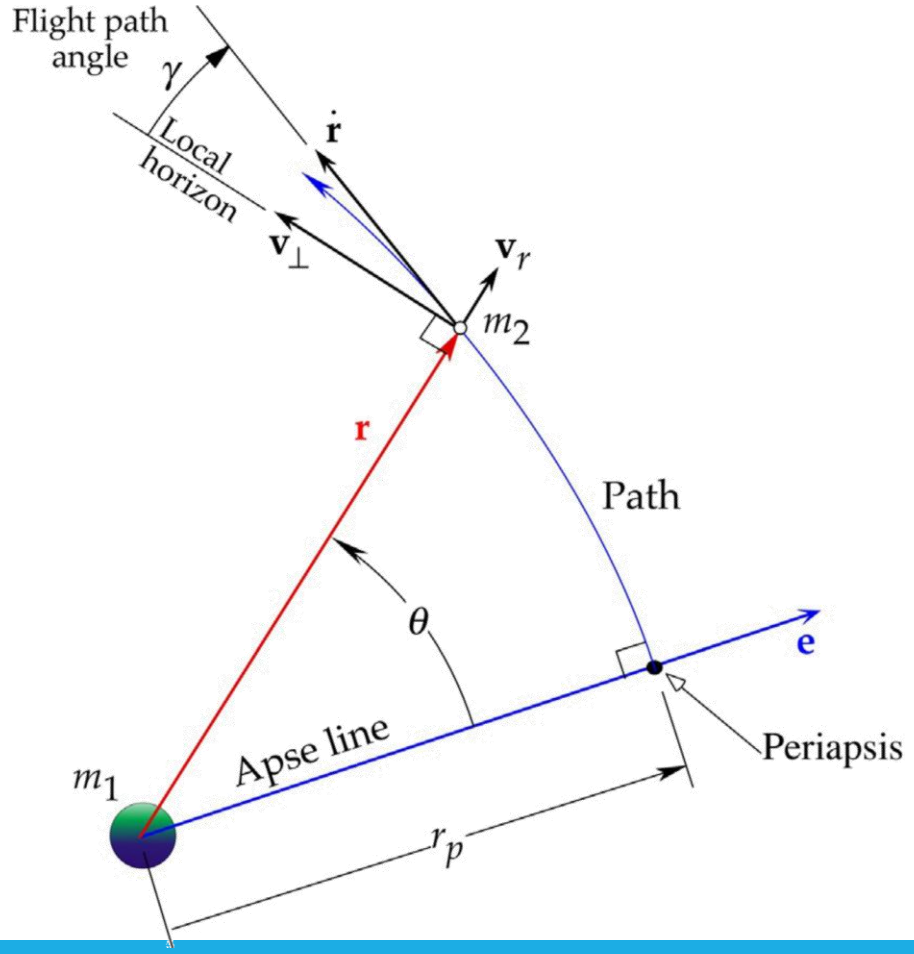
Velocidad total: $v = \sqrt{v_r^2 + v_\perp^2}$

Energía especifica $\varepsilon = -\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{h^2}(1 - e^2)$



# Formulas generales

Angulo de vuelo: $\tan\gamma = \frac{v_r}{v_\perp} = \frac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta}$



# Órbita Parabólica

Si la excentricidad es igual a 1, la formula de orbita queda expresada como

$$r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + cos\,\theta}$$

Cuando la anomalía verdadera $\theta$ se acerca a $180$ grados, el denominador se acerca a cero, de modo que $r$ tiende hacia el infinito. Según la ecuación $\varepsilon = -\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{h^2}\,(1 - e^2)$ la energía de una trayectoria para la cual $e = 1$ es cero, de modo que para una trayectoria parabólica la conservación de la energía $\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \varepsilon$ es:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = 0$$

# Órbita Parabólica

En otras palabras, la velocidad en cualquier lugar de una trayectoria parabólica es

$$v = \sqrt{2\frac{\mu}{r}}$$

Si el cuerpo $m_2$ tiene una trayectoria parabólica, se desplazará hasta el infinito y llegará allí con velocidad cero en relación con $m_1$. No volverá. Por lo tanto, las trayectorias parabólicas se denominan trayectorias de escape. Sea $v_c$ la velocidad de un satélite en una órbita circular de radio $r$

$$v_{esc} = \sqrt{2}\, v_c$$

Es decir, para escapar de una órbita circular se requiere un aumento de velocidad del $41{,}4\%$.

# Órbita Parabólica

Para la parábola, la ecuación $tan\,\gamma = \frac{e\,sin\,\theta}{1+e\,cos\,\theta}$ para el ángulo de la trayectoria de vuelo toma la forma

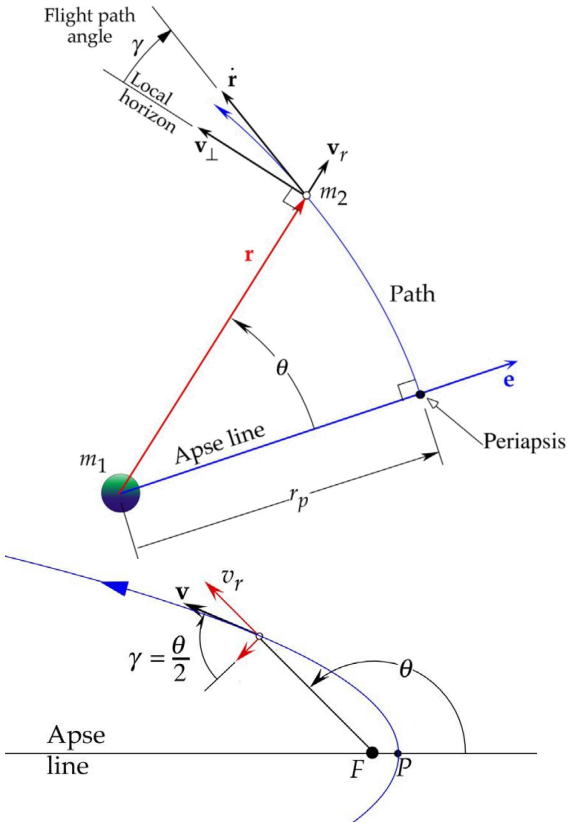
$$\tan\gamma = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

Usando las identidades trigonométricas

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad \cos\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$$

Podemos escribir

$$\tan\gamma = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1+2\cos^2\frac{\theta}{2}-1} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2} \;\rightarrow\; \gamma = \frac{\theta}{2}$$



# Órbita Parabólica

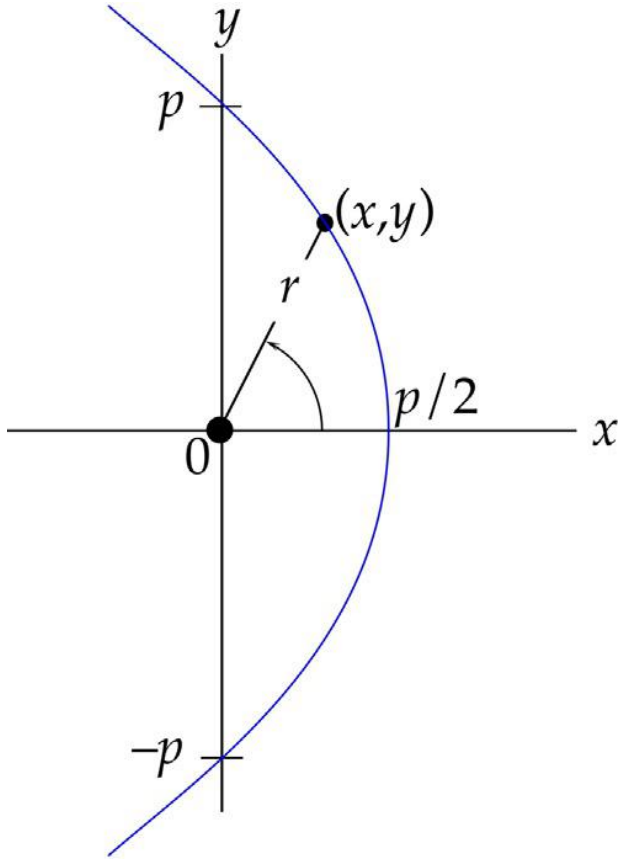
La ecuación $p = \frac{h^2}{\mu}$ da el parámetro $p$ de una órbita, es un parámetro de simetría conocido como *semi-latus rectum*

$$x = r\cos\theta = p\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta} \qquad y = r\sin\theta = p\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\frac{x}{p/2} + \left(\frac{y}{p}\right)^2 = 2\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta} + \frac{\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}$$

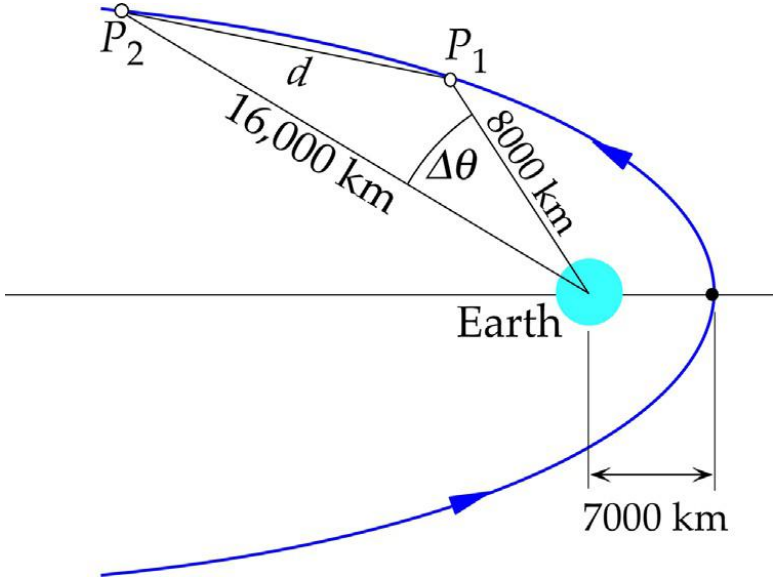
$$x = \frac{p}{2} - \frac{y^2}{2p}$$

Esta es la ecuación de una parábola en un sistema de coordenadas cartesiano cuyo origen sirve como foco.



# Órbita Parabólica: Ejercicio 1

El radio del perigeo de un satélite en una trayectoria geocéntrica parabólica de la Figura es de $7.000\,km$. Encuentre la distancia d entre los puntos $P_1$ y $P_2$ de la órbita, que están a $8.000\,km$ y $16.000\,km$, respectivamente, del centro de la Tierra.



# Órbita Parabólica: Ejercicio 1

Este sería un problema de trigonometría simple si conociéramos el ángulo $\Delta\theta$ entre los radiales de $P_1$ y $P_2$. Podemos encontrar ese ángulo determinando primero las verdaderas anomalías de los dos puntos.

Las verdaderas anomalías se obtienen a partir de la fórmula de la órbita, $r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + cos\,\theta}$

Calculamos el momento angular del satélite evaluando la ecuación de la órbita en el perigeo,

$$r_p = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + \cos 0} = \frac{h^2}{2\,\mu}$$

a partir del cual

$$h = \sqrt{2\,\mu\,r_p} = \sqrt{2 * 398.600 * 7.000} = 74.700 \frac{km^2}{s}$$

# Órbita Parabólica: Ejercicio 1

Sustituyendo los radios y las verdaderas anomalías de los puntos $P_1$ y $P_2$ en la ecuación de orbita parabólica, obtenemos

$$8.000 = \frac{74.700^2}{398.600} \frac{1}{1 + cos\ \theta_1} \longrightarrow cos\ \theta_1 = 0.75 \rightarrow \theta_1 = 41{,}41°$$

$$16.000 = \frac{74.700^2}{398.600} \frac{1}{1 + cos\ \theta_2} \longrightarrow cos\ \theta_2 = -0.125 \rightarrow \theta_2 = 97{,}18°$$

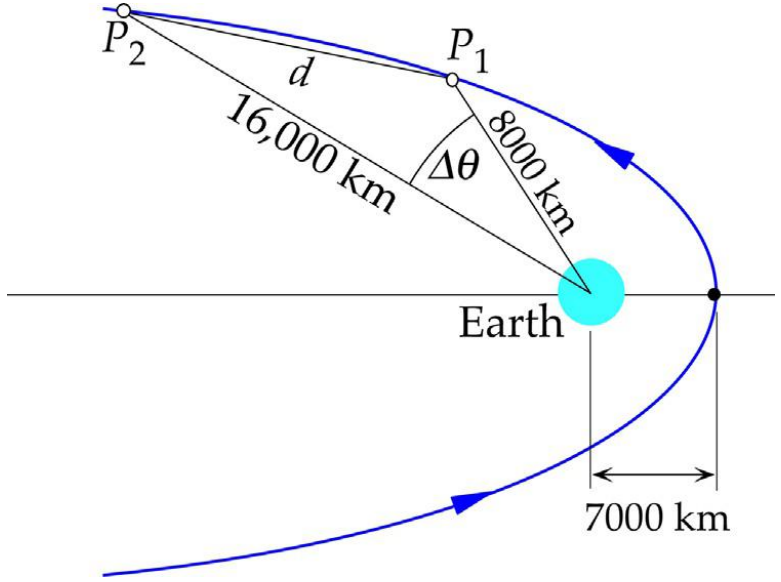
La diferencia entre los dos ángulos $\theta_1$ y $\theta_2$ es $\Delta\theta = 97{,}18 - 41{,}41 = 55{,}78°$.

# Órbita Parabólica: Ejercicio 1

La longitud de la cuerda $\overline{P_1P_2}$ ahora se puede encontrar usando la ley de los cosenos de trigonometría,

$$d^2 = 8.000^2 + 16.000^2 - 2 \cdot 8.000 \cdot 16.000 \cos \Delta\theta$$

$$d = 13.270\ km$$



# Órbita Parabólica: Ejercitación

Una sonda espacial que orbita alrededor de la Tierra describe una órbita circular de 25.000 km. El siguiente paso en su viaje a Júpiter consiste en impulsarla para que pueda entrar en una órbita de escape.

1. Determina la velocidad de la sonda en esta órbita circular.
2. Determina la velocidad mínima necesaria para entrar en una trayectoria parabólica con ese radio.
3. Determinar la diferencia en las energías cinética, potencial y mecánica específicas entre las dos órbitas.

# Órbita Parabólica: Ejercitación

# Resumen de formulas

**Parabólicas** $(e = 1)$

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = 0$$

$$v_{esc} = \sqrt{2\, v_c} = \sqrt{\frac{2\,\mu}{r}}$$

$$r = \frac{h^2}{\mu}\,\frac{1}{1 + cos\,\theta}$$