UTN HAEDO

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL HAEDO

ÓRBITA ELÍPTICA

TIPOS DE ÓRBITAS

Formulas generales

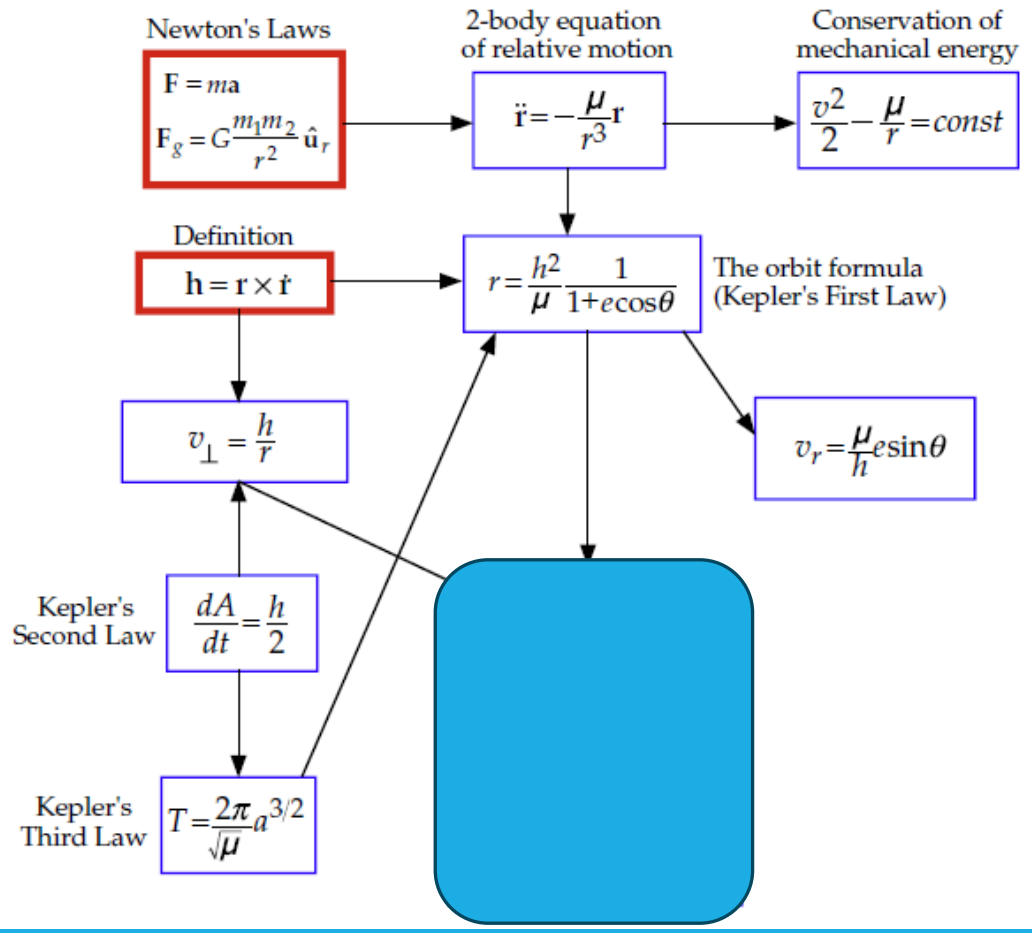
Ecuación de Orbita: $r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e\cos\theta}$

Momento angular especifico: $h = r\, v_\perp$

Velocidad radial: $v_r = \frac{\mu}{h} e \sin\theta$

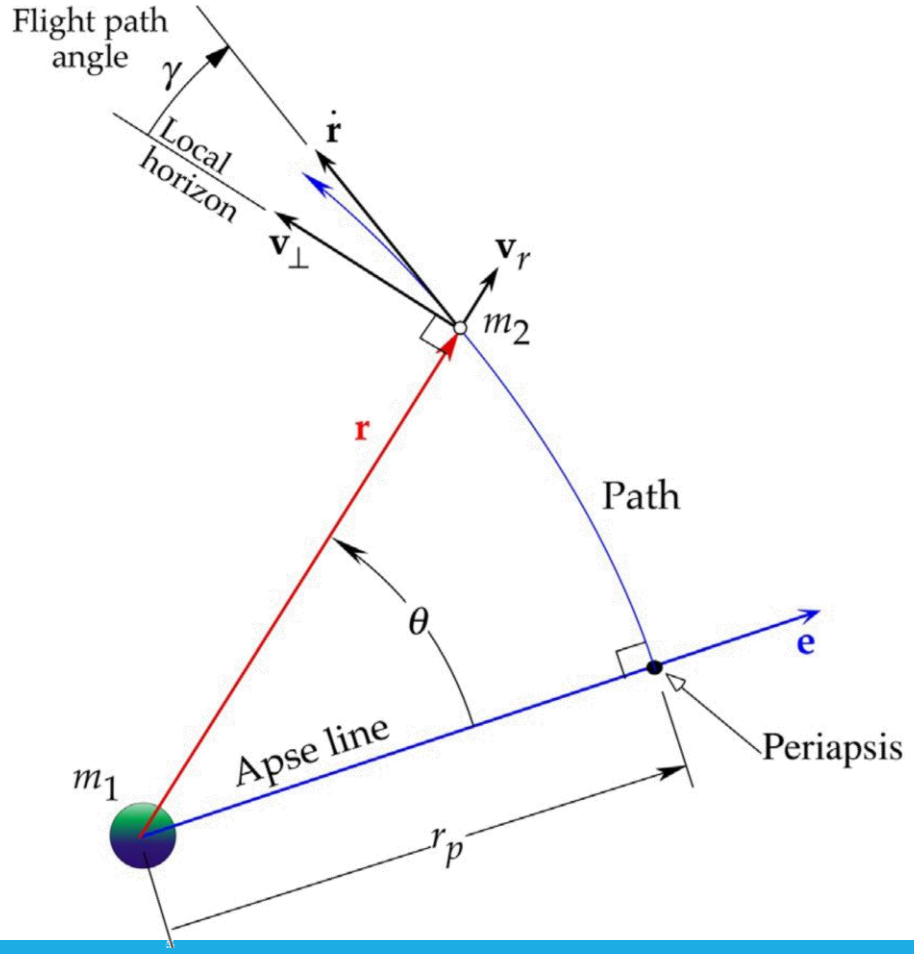
Velocidad total: $v = \sqrt{v_r^2 + v_\perp^2}$

Energía especifica $\varepsilon = -\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{h^2}(1 - e^2)$



Formulas generales

Angulo de vuelo: $\tan\gamma = \frac{v_r}{v_\perp} = \frac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta}$



Órbita Elíptica

Si $\mathbf{0} < \boldsymbol{e} < \mathbf{1}$, entonces el denominador de la ecuación $r = (h^2/\mu)/(1 + e\cos\theta)$ varía con la anomalía verdadera θ, pero sigue siendo positivo y nunca llega a ser cero. Por lo tanto, **el vector de posición relativa** permanece acotado y **tiene su magnitud más pequeña en el periapsis** r_p, dada por la ecuación $r_p = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e}$. **El valor máximo de r se alcanza** cuando el denominador de $r = (h^2/\mu)/(1 + e\cos\theta)$ obtiene su valor mínimo, que ocurre **en $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{180°}$. Ese punto se llama apoapsis** y su coordenada radial, denotada por r_a, es $r_a = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1-e}$.

Órbita Elíptica

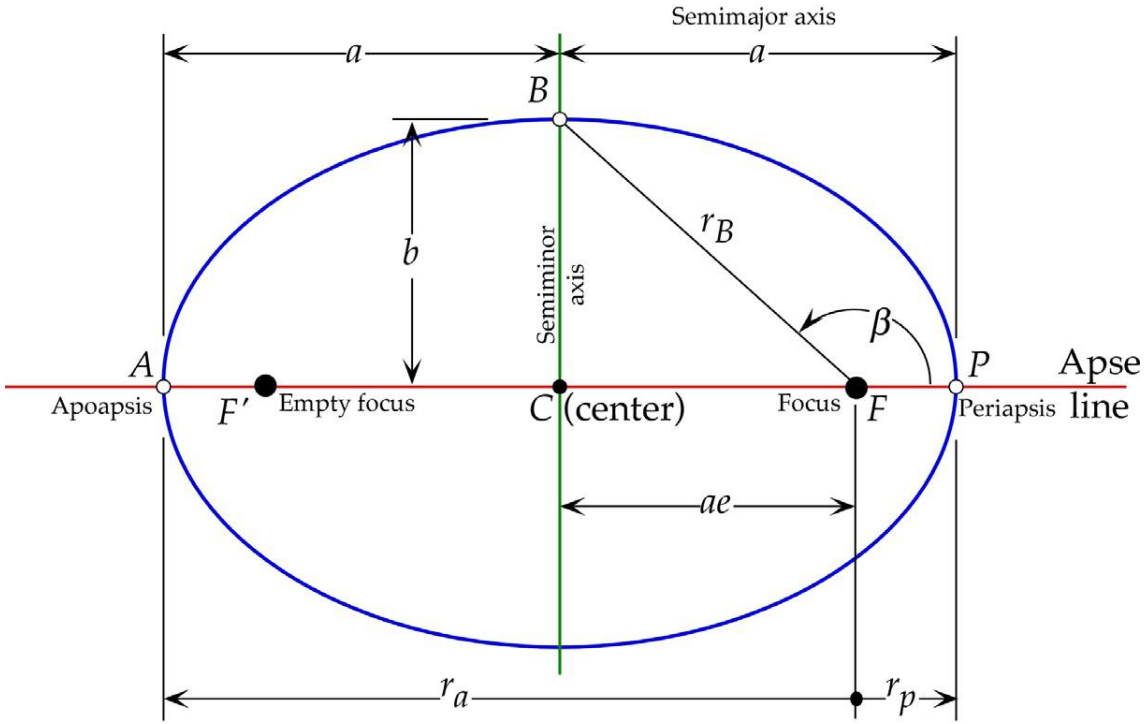
Calculo se semieje mayor a

Sea $2a$ la distancia medida a lo largo de la línea del ábside desde el periapsis P hasta el apoapsis A

$$2a = r_p + r_a$$

$$2a = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e} + \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1-e}$$

$$a = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1-e^2}$$

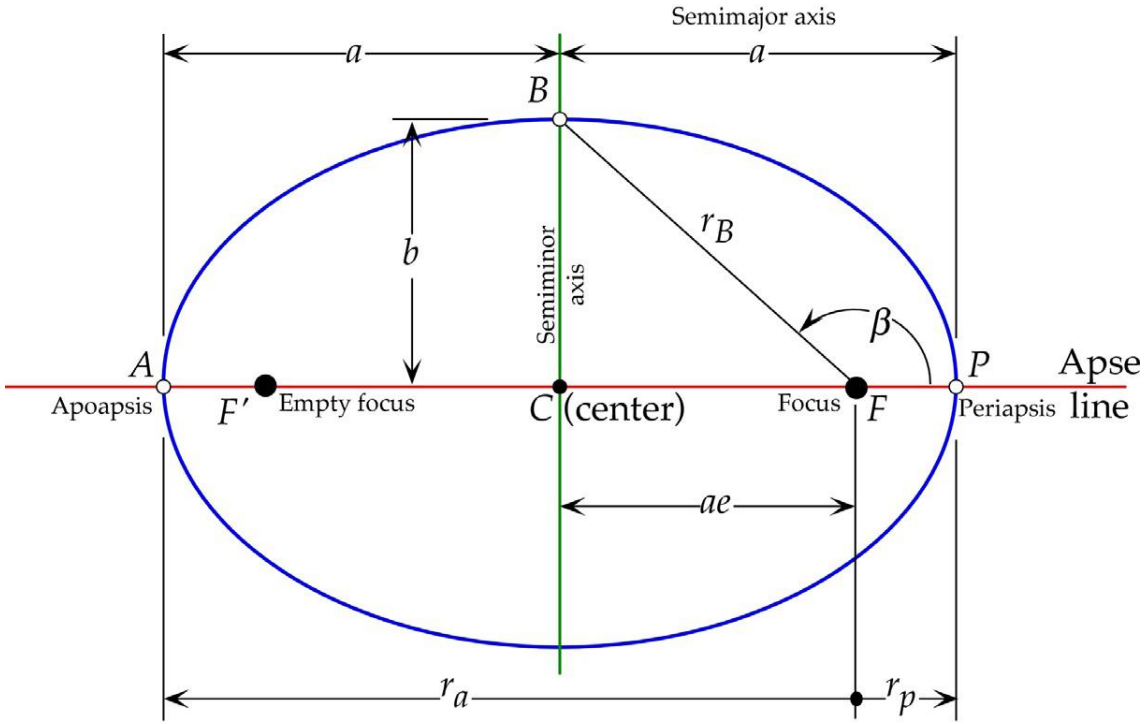


Órbita Elíptica

Esto da lugar a una forma alternativa de la ecuación de orbita, que nos es útil para encontrar algunas relaciones

$$a = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1-e^2} \longrightarrow \frac{h^2}{\mu} = a(1-e^2)$$

$$r = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e\cos\theta} \longrightarrow r = a\frac{1-e^2}{1+e\cos\theta}$$



Órbita Elíptica

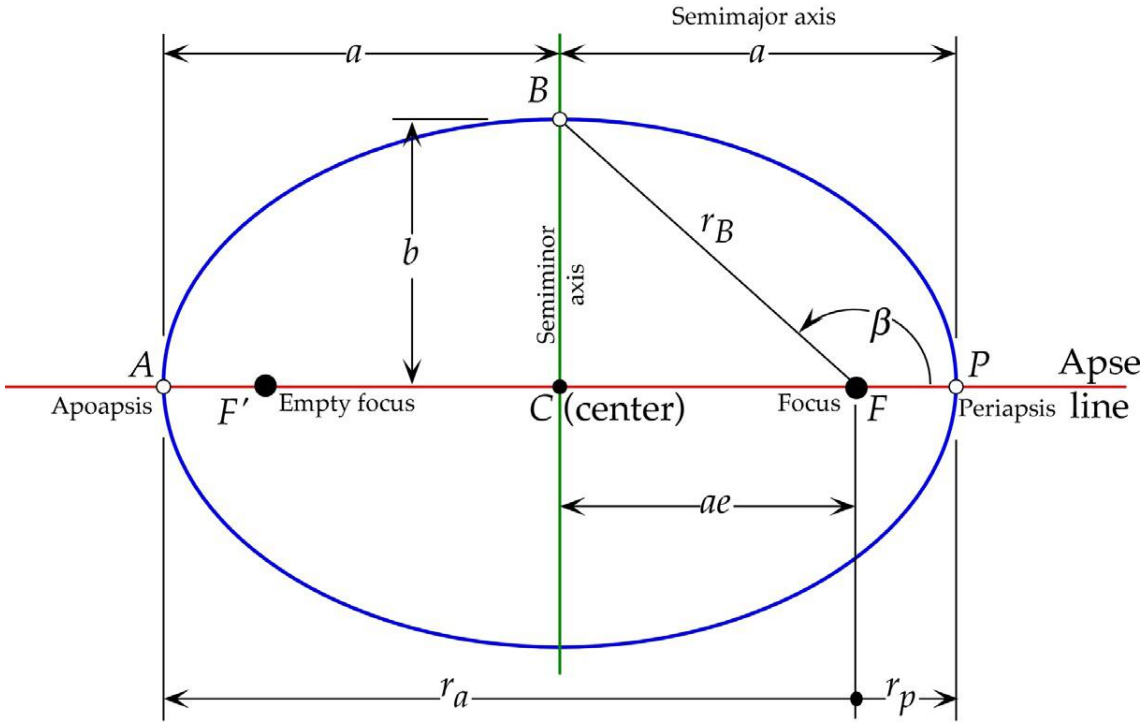
La distancia CF desde el centro C al foco F es

$$CF = a - FP = a - r_p$$

$$CF = a - a\frac{1 - e^2}{1 + e\cos 0}$$

$$CF = a - a(1 - e)$$

$$CF = ae$$



Órbita Elíptica

distancia b de C a B es el semieje menor. Si la anomalía verdadera del punto B es β

$$r_B = a\frac{1-e^2}{1+e\cos\beta}$$

La proyección de r_B en la línea de apsis es ae

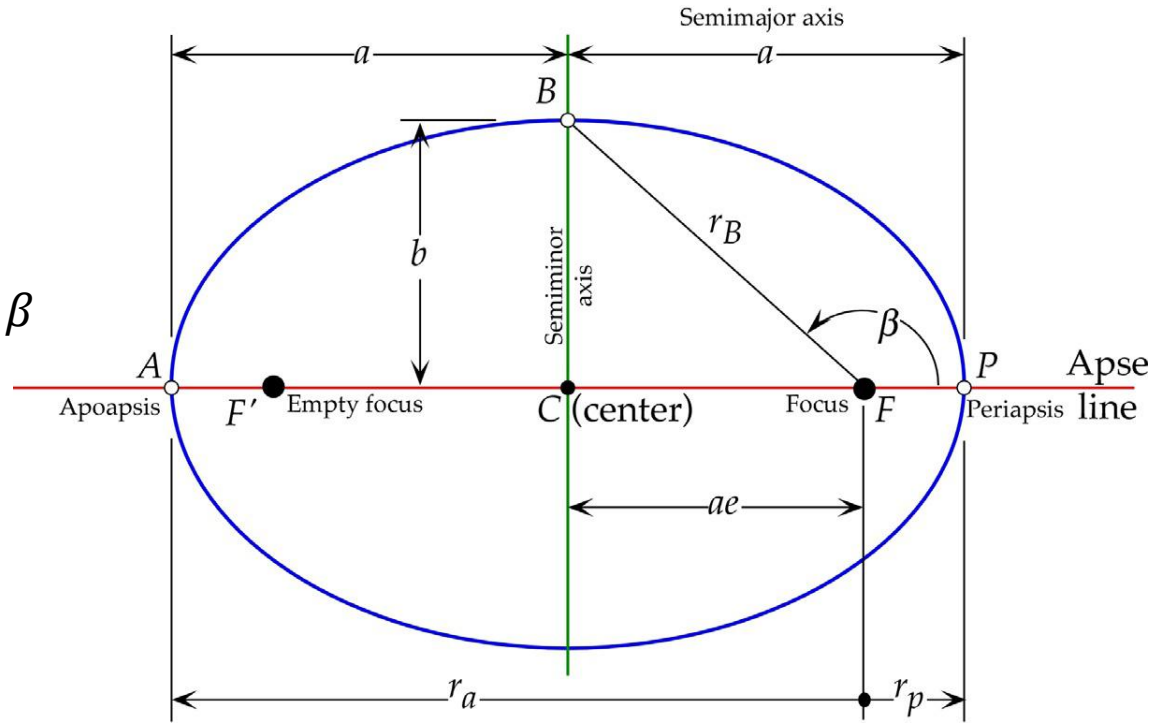
$$ae = r_B\cos(180° - \beta) = -r_B\cos\beta = -\left(a\frac{1-e^2}{1+e\cos\beta}\right)\cos\beta$$

Resolviendo esta expresión para e se obtiene

$$e = -\cos\beta$$

Revela el hecho interesante de que

$$r_B = a$$



Órbita Elíptica

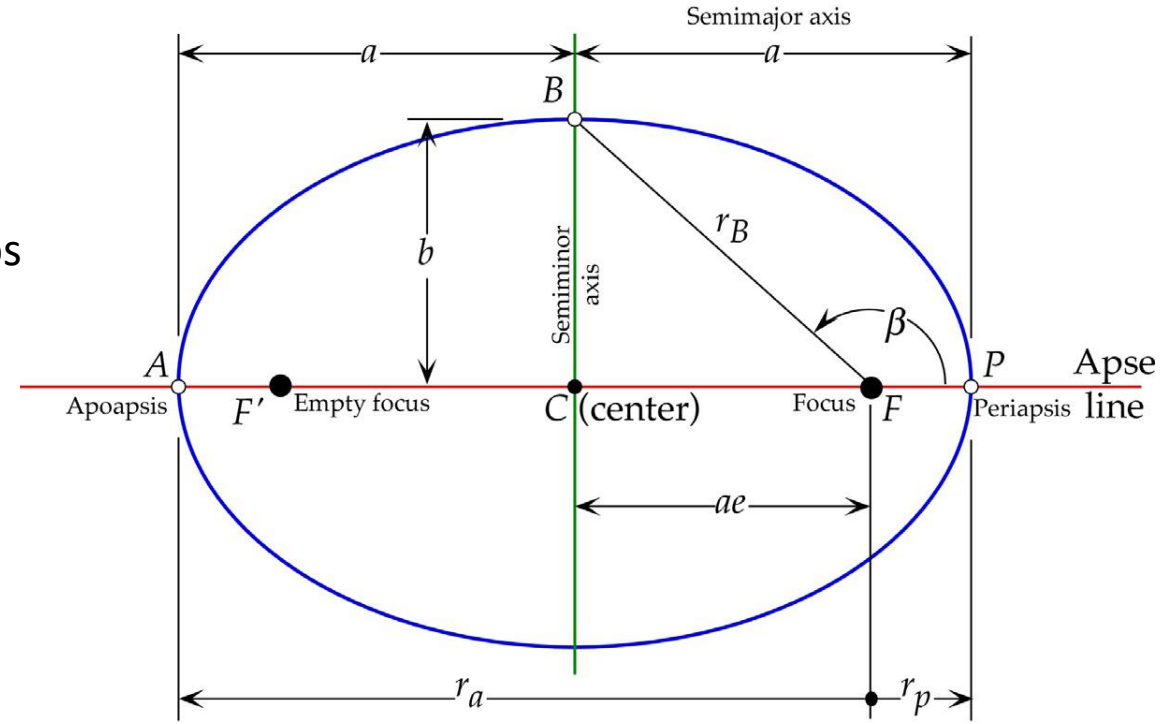
Calculo se semieje menor b

Según el teorema de Pitágoras,

$$b^2 = {r_B}^2 - (ae)^2 = a^2 - a^2e^2$$

lo que significa que el semieje menor se encuentra en términos del semieje mayor y la excentricidad de la elipse como

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$



Órbita Elíptica

Calculo de excentricidad e

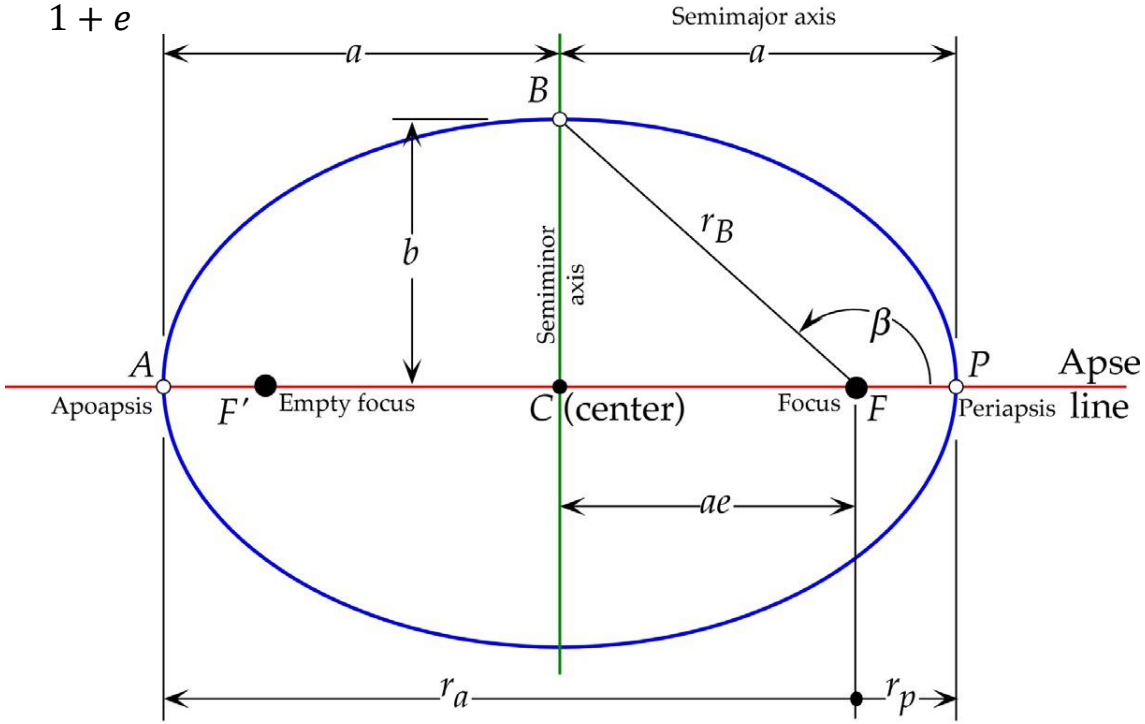
Observe que dividir la $r_p = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e}$ por $r_a = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1-e}$ se obtiene $\frac{r_p}{r_a} = \frac{1-e}{1+e}$

Resolver esto para e da como resultado una fórmula útil para calcular la excentricidad de una órbita elíptica.

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$

De la Figura se desprende que $r_a - r_p = \overline{F'F}$ es la distancia entre los focos, y $r_a + r_p = 2a$.

$$excentricidad = \frac{distancia\ entre\ focos}{longuitud\ de\ eje\ mayor}$$



Órbita Elíptica

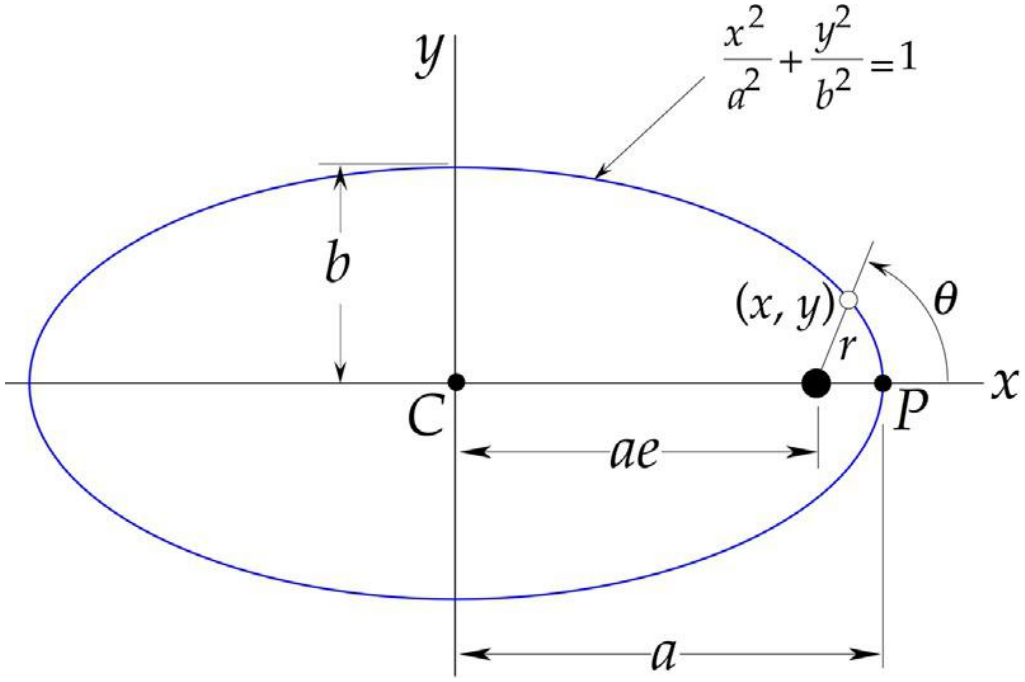
Sea un sistema de coordenadas cartesiano xy centrado en C, en términos de r y θ, vemos en la figura que la coordenada x e y de un punto en la órbita son:

$$x = ae + r\cos\theta = ae + \left(a\frac{1-e^2}{1+e\cos\theta}\right)\cos\theta = a\frac{e+\cos\theta}{1+e\cos\theta}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{e+\cos\theta}{1+e\cos\theta}$$

$$y = r\sin\theta = \left(a\ \frac{1-e^2}{1+e\cos\theta}\right)\sin\theta = b\ \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos\theta}\sin\theta$$

$$\frac{y}{b} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos\theta}\sin\theta$$



Órbita Elíptica

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{(1+e\cos\theta)^2}\left[(e+\cos\theta)^2+(1-e^2)\sin^2\theta\right]$$

$$=\frac{1}{(1+e\cos\theta)^2}\left[e^2+2e\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta-e^2\sin^2\theta\right]$$

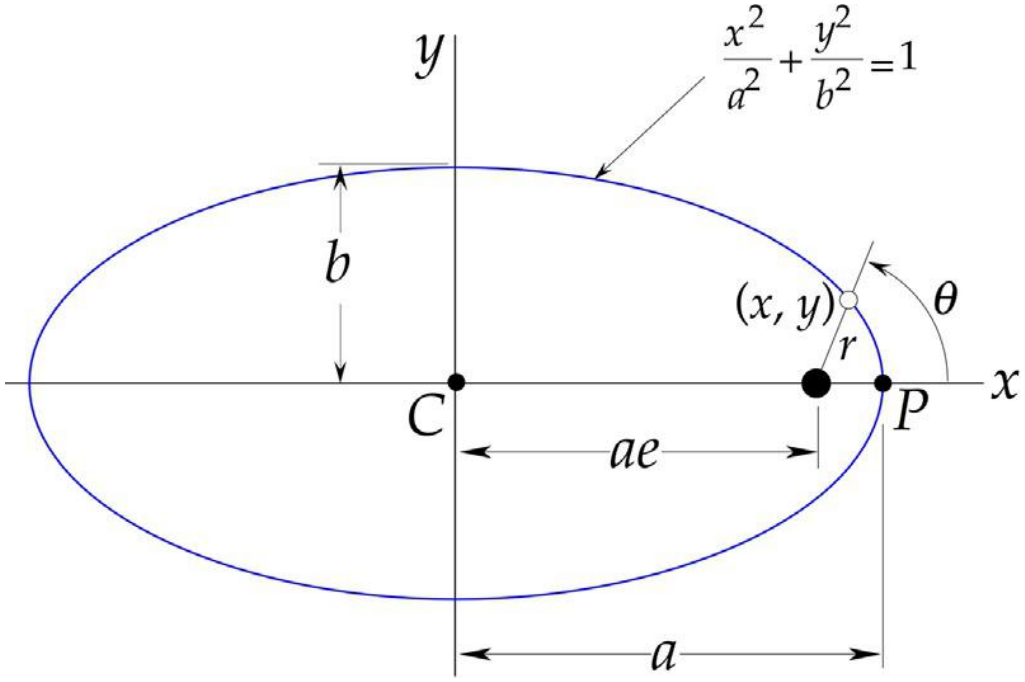
$$=\frac{1}{(1+e\cos\theta)^2}\left[e^2+2e\cos\theta+1-e^2\sin^2\theta\right]$$

$$=\frac{1}{(1+e\cos\theta)^2}\left[e^2(1-\sin^2\theta)+2e\cos\theta+1\right]$$

$$=\frac{1}{(1+e\cos\theta)^2}\left[e^2\cos^2\theta+2e\cos\theta+1\right]$$

$$=\frac{1}{(1+e\cos\theta)^2}(1+e\cos\theta)^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



Órbita Elíptica

La energía específica de una órbita elíptica es negativa y se encuentra sustituyendo el momento angular y la excentricidad en la ecuación $\varepsilon = -\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{h^2}(1-e^2)$

Despejamos el momento angular h , $a = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1-e^2} \rightarrow h^2 = \mu\, a\,(1-e^2)$

De modo que: $\boxed{\varepsilon = -\frac{\mu}{2a}}$

Esto muestra que la energía específica es independiente de la excentricidad y depende sólo del semieje mayor de la elipse. Por lo tanto, para una órbita elíptica, la conservación de la energía $\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \varepsilon$ puede escribirse de la siguiente forma: $\boxed{\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}}$

Órbita Elíptica

El área de una elipse se encuentra en términos de sus ejes semimayor y semimenor mediante la fórmula $A = \pi ab$ (que se reduce a la fórmula para el área de un círculo si $a = b$). Para encontrar el período T de la órbita elíptica, empleamos la segunda ley de Kepler, $\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2}$, para obtener

$$\Delta A = \frac{h}{2}\Delta t$$

Para una revolución completa, $\Delta A = \pi ab$ y $\Delta t = T$. Por lo tanto, $\pi ab = (h/2)T$, o

$$T = \frac{2\,\pi\,a\,b}{h}$$

Órbita Elíptica

Sustituyendo por los valores de a y b, obtenemos

$$T = \frac{2\,\pi\,a\,b}{h} = \frac{2\,\pi\,\frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1-e^2}\,\frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1-e^2}\sqrt{1-e^2}}{h} = \frac{2\,\pi}{h}\left(\frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1-e^2}\right)^2\sqrt{1-e^2}$$

de modo que la fórmula para el período de una órbita elíptica, en términos de los parámetros orbitales h y e, se convierte en

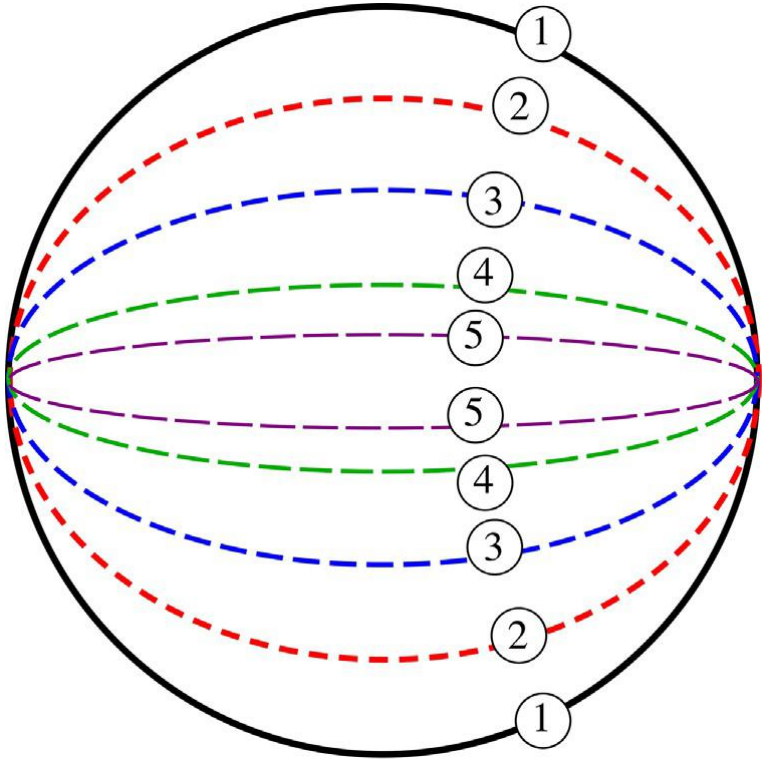
$$T = \frac{2\,\pi}{\mu^2}\left(\frac{h}{\sqrt{1-e}}\right)^3$$

Órbita Elíptica

$$a = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1-e^2} \longrightarrow h = \sqrt{\mu\, a\, (1-e^2)}$$

$$T = \frac{2\,\pi}{\sqrt{\mu}}\, a^{3/2}$$

Esto materializa la tercera ley de Kepler: el período de un planeta es proporcional a las tres mitades de su semieje mayor. Esta expresión, que es idéntica a la de una órbita circular de radio a, revela que, al igual que la energía, el período de una órbita elíptica es independiente de la excentricidad



Órbita Elíptica

Para calcular la distancia promedio de m_2 a m_1 en el transcurso de una órbita completa dividimos el rango de la anomalía verdadera (2π) en n segmentos iguales $\Delta\theta$, de modo que

$$n = \frac{2\pi}{\Delta\theta}$$

Luego usamos $r = (h^2/\mu)/(1 + e\,cos\,\theta)$ para evaluar $r(\theta)$ en los n valores equidistantes de la verdadera anomalía, comenzando en el periapsis:

$$\theta_1 = 0, \theta_2 = \Delta\theta, \theta_3 = 2\,\Delta\theta, \ldots \theta_n = (n-1)\Delta\theta$$

El promedio de este conjunto de n valores de r está dado por

$$\bar{r}_\theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r(\theta_i) = \frac{\Delta\theta}{2\pi}\sum_{i=1}^{n} r(\theta_i) = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n} r(\theta_i)\,\Delta\theta$$

Órbita Elíptica

Ahora, hagamos que n sea muy grande, de modo que $\Delta\theta$ se vuelva muy pequeño. En el límite como $n \longrightarrow \infty$,

$$\bar{r}_\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r(\theta)\mathrm{d}\theta$$

Sustituyendo $r = a\frac{1-e^2}{1+e\cos\theta}$ en el integrando se obtiene

$$\bar{r}_\theta = \frac{1}{2\pi}a(1-e^2)\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+e\cos\theta}$$

La integral en esta expresión se puede encontrar en tablas de integrales de las cuales obtenemos

$$\bar{r}_\theta = \frac{1}{2\pi}a(1-e^2)\left(\frac{2\pi}{\sqrt{1-e^2}}\right) = a\sqrt{1-e^2}$$

Órbita Elíptica

Comparando este resultado con la $b = a\sqrt{1 - e^2}$ vemos que el radio orbital promediado por la anomalía verdadera es igual a la longitud del semieje menor b de la elipse. Por tanto, el semieje mayor, que es el promedio de las distancias máxima y mínima desde el foco, no es la distancia media. Dado que, $r_p = a(1 - e)$ y $r_a = a(1 + e)$, la ecuación también implica que

$$\overline{r}_\theta = \sqrt{r_p r_a}$$

La distancia media es la mitad de la potencia del producto de las distancias máxima y mínima desde el foco y no la mitad de su suma.

Órbita Elíptica: Ejercitación

La altitud de un satélite en el perigeo es de $500\ km$ y su excentricidad orbital es de $0{,}1$. Hallar:

a) El semieje mayor a

b) La altitud del satélite en el apogeo z_a

c) La magnitud del momento angular específico de la órbita h

d) La energía mecánica específica de la órbita ε

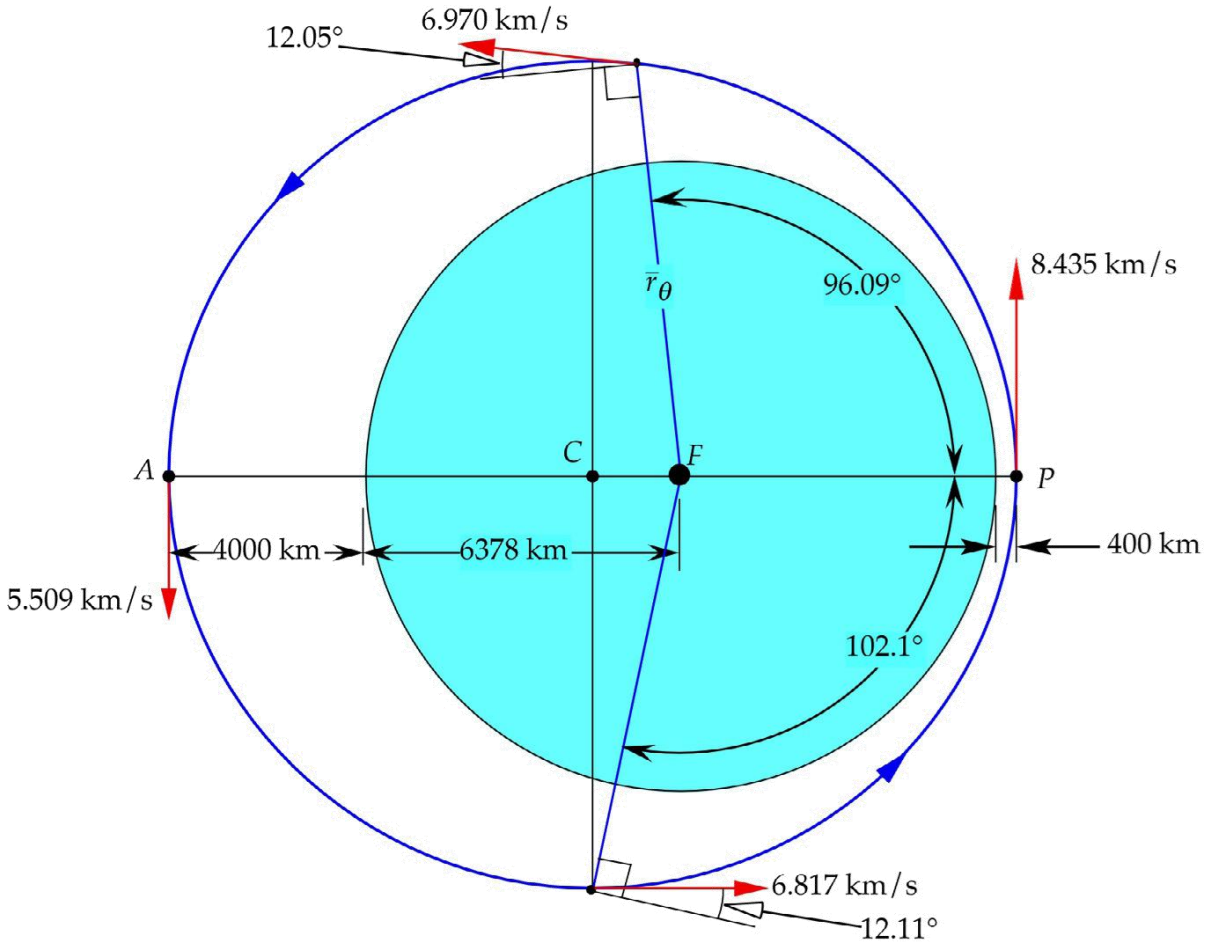
Órbita Elíptica: Ejercitación

Órbita Elíptica: Ejercicio 1

Un satélite terrestre está en una órbita con una altitud de perigeo $z_p = 400\,km$ y una altitud de apogeo $z_a = 4000\,km$, como se muestra en la figura. Encuentre cada una de las siguientes cantidades:

a) excentricidad, e
b) momento angular, h
c) velocidad de apogeo, v_a
d) semieje mayor, a
e) período de la órbita, T
f) radio promedio de verdadera anomalía $\overline{r_\theta}$
g) anomalía verdadera cuando $r = \overline{r_\theta}$
h) velocidad del satélite cuando $r = \overline{r_\theta}$
i) ángulo de la trayectoria de vuelo γ cuando $r = \overline{r_\theta}$
j) ángulo máximo de la trayectoria de vuelo γ_{max} y la verdadera anomalía en la que ocurre.

Órbita Elíptica: Ejercicio 1



Órbita Elíptica: Ejercicio 1

Excentricidad e

La fórmula que involucra la excentricidad desconocida e así como los datos de perigeo y apogeo dados es

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$

Convirtiendo las altitudes dadas a “radios”:

$$r_p = R_E + z_p = 6\,378 + 400 = 6\,778\ km$$

$$r_a = R_E + z_a = 6\,378 + 4000 = 10\,378\ km$$

Órbita Elíptica: Ejercicio 1

Excentricidad e

La fórmula que involucra la excentricidad desconocida e así como los datos de perigeo y apogeo dados es

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$

$$e = \frac{10.378 - 6.778}{10.378 + 6.778}$$

$$\boxed{e = 0.2098}$$

Órbita Elíptica: Ejercicio 1

Momento angular h

Ahora que tenemos la excentricidad, necesitamos una expresión que la contenga y el momento angular desconocido h y cualquier otro dato dado. Esta seria la formula de orbita

$$r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e\cos\theta}$$

Evaluada en el perigeo, es decir cuando la anomalía verdadera $\theta = 0$

$$r_p = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e}$$

Órbita Elíptica: Ejercicio 1

Momento angular h

$$r_p = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e}$$

$$6778 = \frac{h^2}{398600}\frac{1}{1+0.2098}$$

$$h = 57.172\,\frac{km^2}{s}$$

Órbita Elíptica: Ejercicio 1

Velocidad en el perigeo v_p

El momento angular h y el radio del perigeo r_p se pueden sustituir en la fórmula del momento angular para encontrar la velocidad del perigeo v_p,

$$h = r\, v_\perp = r_p v_p \longrightarrow v_p = \frac{h}{r_p}$$

$$v_p = \frac{57.172}{6.778}$$

$$\boxed{v_p = 8.435 \frac{km}{s}}$$

Órbita Elíptica: Ejercicio 1

Velocidad en el apogeo v_a

Dado que h es una constante, la fórmula del momento angular también se puede emplear para obtener la velocidad del apogeo v_a

$$h = r\, v_\perp = r_a v_a \longrightarrow v_a = \frac{h}{r_a}$$

$$v_a = \frac{57.172}{10.378}$$

$$\boxed{v_a = 5.509 \frac{km}{s}}$$

Órbita Elíptica: Ejercicio 1

Semieje mayor a

El semieje mayor es el promedio de los radios del perigeo y del apogeo.

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{10.378 + 6.778}{2}$$

$$\boxed{a = 8.578\ km}$$

Órbita Elíptica: Ejercicio 1

Periodo orbital T

Como se ha encontrado el semieje mayor a, podemos usar la ecuación

$$T = \frac{2\,\pi}{\sqrt{\mu}}\,a^{3/2}$$

$$T = \frac{2\,\pi}{\sqrt{398.600}}\,8.578^{3/2}$$

$$T = 7.907\ s$$

$$\boxed{T = 2.196\ h}$$

Órbita Elíptica: Ejercicio 1

Anomalía verdadera θ

Para encontrar la anomalía verdadera cuando $r = \bar{r_\theta}$, usamos la fórmula de la órbita

$$r = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1 + e\cos\theta}$$

$$\bar{r_\theta} = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1 + e\cos\theta}$$

$$8.387 = \frac{51.172^2}{398.600}\frac{1}{1 + 0.2098\cos\theta}$$

$$\cos\theta = -0.1061$$

Órbita Elíptica: Ejercicio 1

Anomalía verdadera θ

$$\cos\theta = -0.1061$$

Esto significa que el radio promedio de la verdadera anomalía ocurre en $\theta = 96.09°$, donde el satélite pasa por $\overline{r_\theta}$ en su camino desde el perigeo, y en $\theta = 263.9°$, donde el satélite pasa por $\overline{r_\theta}$ en su camino hacia el perigeo.

Órbita Elíptica: Ejercicio 1

Velocidad del satélite cuando $r = \overline{r_\theta}$

Para encontrar la velocidad del satélite cuando $r = \overline{r_\theta}$, lo más sencillo es utilizar la ecuación de energía para la elipse

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{398.600}{8.387} = -\frac{398.600}{2 * 8.578}$$

$$\boxed{v = 6.970 \frac{km}{s}}$$

Órbita Elíptica: Ejercicio 1

Angulo de la trayectoria de vuelo y cuando $r = \overline{r_\theta}$

$$\tan\gamma = \frac{e\sin\theta}{1 + e\cos\theta}$$

$$\tan\gamma = \frac{0.2098\sin 95.06}{1 + 0.2098\cos 96.09}$$

$$\tan\gamma = 0.2134$$

Esto significa que $\boxed{\gamma = 12.05°}$ cuando el satélite pasa por $\overline{r_\theta}$ en su camino desde el perigeo.

Órbita Elíptica: Ejercicio 1

Angulo máximo de la trayectoria de vuelo γ_{max} y la verdadera anomalía en la que ocurre.

Para encontrar dónde γ es un máximo, debemos tomar la derivada de

$$\gamma = \tan^{-1} \frac{e \sin\theta}{1 + e\cos\theta}$$

con respecto a θ y establecer el resultado igual a cero. Usando las tablas de derivadas

$$f(x) = arctan(x)$$
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = \frac{1}{1 + \left(\frac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right)^2} \frac{d}{d\theta}\left(\frac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right) = \frac{e\,(e+\cos\theta)}{(1+e\cos\theta)^2 + e^2\sin^2\theta}$$

Órbita Elíptica: Ejercicio 1

Angulo máximo de la trayectoria de vuelo γ_{max} y la verdadera anomalía en la que ocurre.

Para $e < 1$, el denominador es positivo para todos los valores de θ. Por lo tanto, $\frac{d\gamma}{d\theta} = 0$ sólo si el numerador desaparece (es decir, si $\cos\theta = -e$). Recuerde de la Ec. 14 que esta anomalía verdadera ubica el punto final del eje menor de la elipse. Por lo tanto, el ángulo positivo máximo de la trayectoria de vuelo se produce en la verdadera anomalía,

$$\theta = \cos^{-1}(-0.2098)$$

$$\boxed{\theta = 102.1°}$$

Órbita Elíptica: Ejercicio 1

Angulo máximo de la trayectoria de vuelo γ_{max} y la verdadera anomalía en la que ocurre.

Sustituyendo esto en $\gamma = \tan^{-1}\frac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta}$, encontramos que el valor del ángulo de la trayectoria de vuelo es

$$\gamma = \tan^{-1}\frac{0.2098\sin 102.1°}{1+0.2098\cos 102.1°}$$

$$\boxed{\gamma = 12.11°}$$

Después de alcanzar esta magnitud máxima, el ángulo de la trayectoria de vuelo comienza a disminuir constantemente hacia su valor cero en el apogeo.

Órbita Elíptica: Ejercicio 2

En dos puntos de una órbita geocéntrica, la altitud y la anomalía verdadera son $z_1 = 1.545\ km$, $\theta_1 = 126°$ y $z_2 = 852\ km$, $\theta_2 = 58°$, respectivamente. Encuentrar

a) la excentricidad y momento angular
b) la altitud del perigeo
c) el semieje mayor
d) el período.

Órbita Elíptica: Ejercicio 2

Excentricidad e

Antes de continuar, debemos recordar sumar el radio de la Tierra a las altitudes dadas para que estemos tratando con radios orbitales. Los radios de los dos puntos son

$$r_1 = R_E + z_1 = 6.378 + 1.545 = 7.923\ km$$

$$r_2 = R_E + z_2 = 6.378 + 852 = 7.230\ km$$

Órbita Elíptica: Ejercicio 2

Excentricidad e

La única fórmula que tenemos que relaciona la posición orbital con los parámetros orbitales e y h es la fórmula de la órbita. Por lo que podemos plantear un sistema de ecuaciones, escribiendo la ecuación de orbita para cada uno de los dos puntos dados y de esta forma producir dos ecuaciones para e y h.

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{h^2}{\mu}\dfrac{1}{1 + e\cos\theta_1} \\ r_2 = \dfrac{h^2}{\mu}\dfrac{1}{1 + e\cos\theta_2} \end{cases}$$

Órbita Elíptica: Ejercicio 2

Excentricidad e

$$\begin{cases} 7.923 = \dfrac{h^2}{398.600}\dfrac{1}{1 + e\cos 126} \\ 7.230 = \dfrac{h^2}{398.600}\dfrac{1}{1 + e\cos 58} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$\boxed{e = 0.08164}$$

$$\boxed{h = 54.830\,\frac{km^2}{s}}$$

Órbita Elíptica: Ejercicio 2

Altitud de perigeo z_p

Con la excentricidad y el momento angular disponibles, podemos usar la ecuación de la órbita para obtener el radio del perigeo.

$$r_p = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e}$$

$$r_p = \frac{54.830^2}{398.600}\frac{1}{1+0.08164}$$

$$r_p = 6.974\ km$$

Órbita Elíptica: Ejercicio 2

Altitud de perigeo z_p

A partir de esto encontramos la altitud del perigeo,

$$z_p = r_p - R_E = 6.974 - 6.378$$

$$z_p = 595.5\ km$$

Órbita Elíptica: Ejercicio 2

Semieje mayor a

El semieje mayor es el promedio de los radios de perigeo y apogeo. Acabamos de encontrar el radio del perigeo arriba en la ecuación. Por lo tanto, sólo necesitamos calcular el radio del apogeo usando la fórmula de la órbita evaluada en el apogeo.

$$r_a = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1-e}$$

Órbita Elíptica: Ejercicio 2

Semieje mayor a

$$r_a = \frac{54.830^2}{398.600}\frac{1}{1-0.08164}$$

$$r_a = 8.213\ km$$

Luego

$$a = \frac{r_p + r_a}{2}$$

$$a = \frac{8.213 + 6.974}{2}$$

$$\boxed{a = 7.593\ km}$$

Órbita Elíptica: Ejercicio 2

Semieje mayor a

$$r_a = \frac{54.830^2}{398.600}\frac{1}{1-0.08164}$$

$$r_a = 8.213\ km$$

Luego

$$a = \frac{r_p + r_a}{2}$$

$$a = \frac{8.213 + 6.974}{2}$$

$$\boxed{a = 7.593\ km}$$

Órbita Elíptica: Ejercicio 2

Periodo orbita T

$$T = \frac{2\,\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2}$$

$$T = \frac{2\,\pi}{\sqrt{398.600}} 7593^{3/2}$$

$$T = 6585\ s$$

$$\boxed{T = 1.829\ h}$$

Órbita Elíptica: Resumen de formulas

Elipticas Orbitas elipticas ($0 < e < 1$)

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1 - e^2}$$

$$h = \sqrt{\mu\, a\, (1 - e^2)}$$

$$r = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1 + e\cos\theta} = a\frac{1 - e^2}{1 + e\cos\theta}$$

$$\epsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$$

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}a^{3/2}$$

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$