UTN HAEDO

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL HAEDO

ÓRBITA CIRCULAR

TIPOS DE ÓRBITAS

Formulas generales

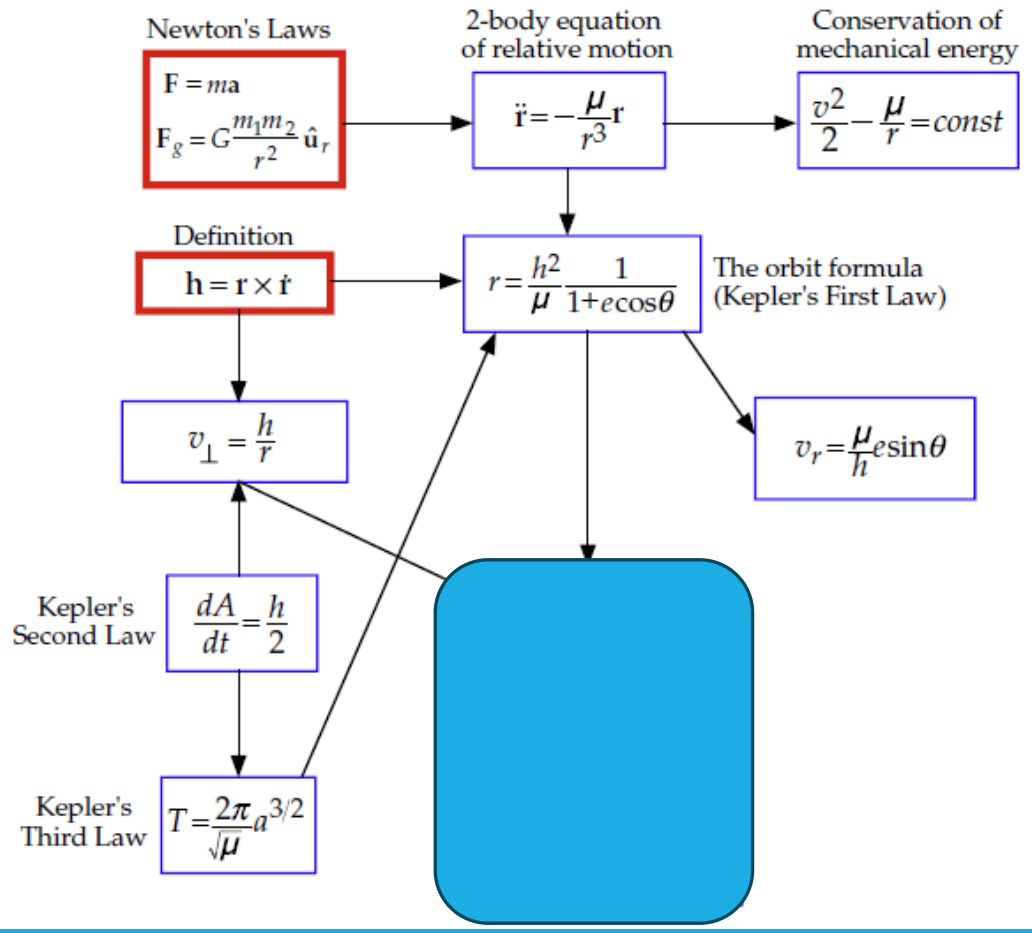
Ecuación de Orbita: $r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e\cos\theta}$

Momento angular especifico: $h = r\, v_\perp$

Velocidad radial: $v_r = \frac{\mu}{h} e \sin\theta$

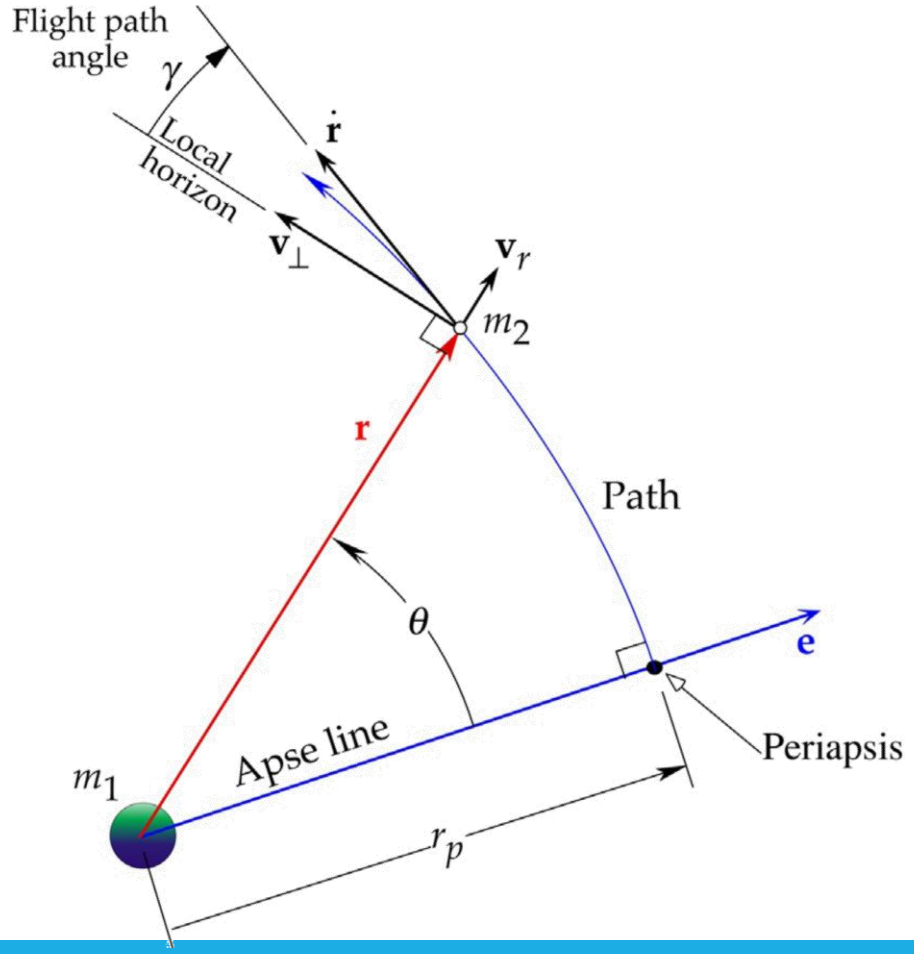
Velocidad total: $v = \sqrt{v_r^2 + v_\perp^2}$

Energía especifica $\varepsilon = -\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{h^2}(1 - e^2)$



Formulas generales

Angulo de vuelo: $\tan\gamma = \frac{v_r}{v_\perp} = \frac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta}$

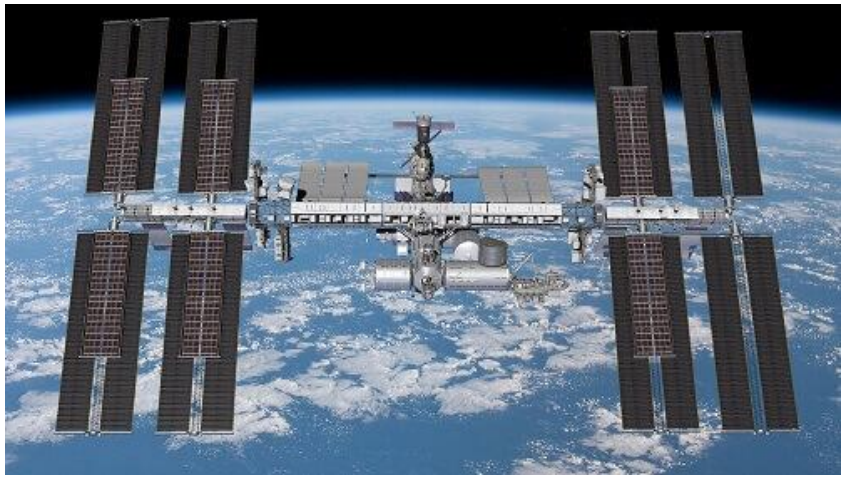


Órbita Circular: Ejercicio 1

Trace la velocidad v, el período T y la energía especifica ε de un satélite en una órbita LEO circular en función de la altitud z.

Órbita Circular: Ejercicio 1

Las naves espaciales orbitales tripuladas y una gran cantidad de satélites no tripulados de teledetección, imágenes y navegación ocupan orbitas LEO nominalmente circulares. Una órbita LEO es aquella cuya altitud se encuentra entre aproximadamente **150 km** y **2000 km**. Una órbita LEO está muy **por encima de los límites** exteriores nominales **de la atmósfera productora de resistencia** (aproximadamente 80 km) y muy por debajo de los peligrosos cinturones de radiación de Van Allen, el más interno de los cuales comienza a aproximadamente 2400 km.



Órbita Circular: Ejercicio 1

Ecuación de Orbita: $r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e\cos\theta} \xrightarrow{e = 0} r = \frac{h^2}{\mu}$

Momento angular: $h = r\, v_\perp \xrightarrow{r = cte} v_{circular} = \frac{h}{r} = \frac{\sqrt{r/\mu}}{r} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$

El tiempo T requerido para una órbita se conoce como período. Como la velocidad es constante, el período de una órbita circular es fácil de calcular.

$$T = \frac{circunsferencia}{velocidad} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\mu/r}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} r^{\frac{3}{2}}$$

Órbita Circular: Ejercicio 1

Velocidad de orbita circular en función de la altura:

$$v_{circular} = \frac{h}{r} = \frac{\sqrt{r/\mu}}{r} = \sqrt{\frac{\mu}{r}} = \sqrt{\frac{\mu}{R_E + z}}$$

$$v_{circular} = \sqrt{\frac{398\,600}{6\,378 + z}}$$

Periodo de orbita circular en función de la altura:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} r^{\frac{3}{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} (R_E + z)^{\frac{3}{2}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{398\,600}} (6\,378 + z)^{\frac{3}{2}}$$

Órbita Circular: Ejercicio 1

Para trayectorias curvilíneas podemos evaluar la energía especifica en la periapsis $(\theta = 0)$

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \longrightarrow \varepsilon_p = \frac{v_p^2}{2} - \frac{\mu}{r_p} \xrightarrow{v_r = 0 \ \rightarrow v_p = v_\perp = h/r_p} \varepsilon_p = \frac{1}{2}\frac{h^2}{r_p^2} - \frac{\mu}{r_p}$$

Como: $r_p = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e}$, entonces:

$$\varepsilon = -\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{h^2}(1 - e^2)$$

Órbita Circular: Ejercicio 1

La energía específica de una órbita circular se encuentra estableciendo $e = 0$ en la ecuación de energía especifica

$$\varepsilon = -\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{h^2}(1-e^2) \xrightarrow{e=0} \varepsilon = -\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{h^2} \xrightarrow{h=\sqrt{r/\mu}} \varepsilon_{circular} = -\frac{\mu}{2r}$$

$$\varepsilon_{circular} = -\frac{\mu}{2(R_E+z)} = -\frac{398\,600}{2(6\,378+z)}$$

Evidentemente, la energía de una órbita circular es negativa. A medida que aumenta el radio, la energía se vuelve menos negativa (es decir, aumenta). En otras palabras, cuanto mayor es la órbita, mayor es su energía.

Órbita Circular: Ejercicio 1

```
%% Tipos de Orbitas - Circulares
% Ejemplo 1


%% Limpieza
close all % Cierra todas las ventanas abiertas
clear all % Borra todas las variables guardadas en el Workspace
clc % Limpia el Command Window

%% Desarrollo
mu = 398600; %GMe km^3/s^2
Re = 6378; %Radio de la Tierra km

z = 150:1:2000; %Altitud de 150 km a 2000 km con pasos de 1 km
v = sqrt(mu./(Re+z)); %Velocidad km/s
T = 2*pi/sqrt(mu)*(Re+z).^(3/2); %Periodo s
E = -mu./(Re+z); %Energia especifica km^2/seg^2
```

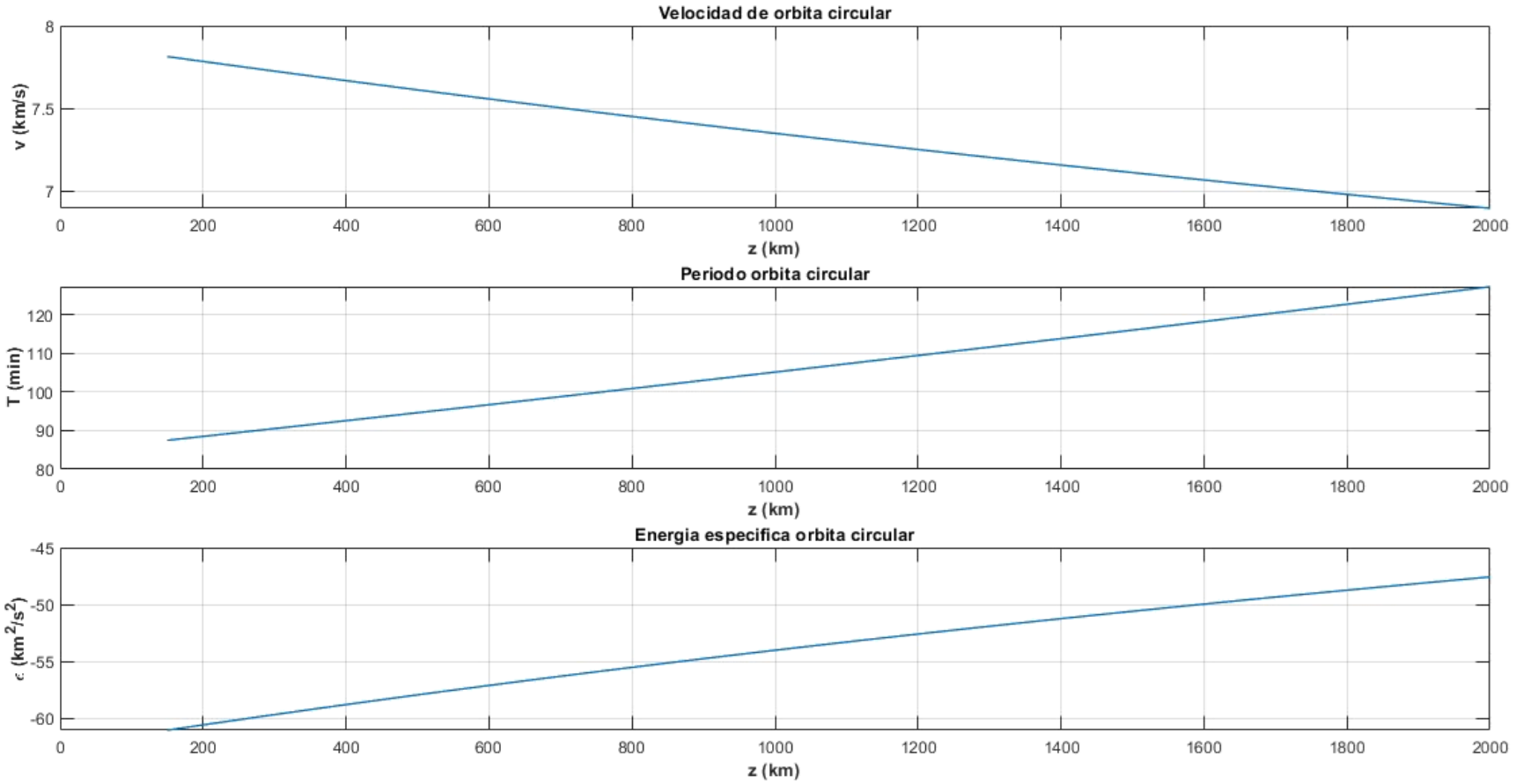
```
%% Graficas
% Figura 1
figure('Name','Orbitas Circulares LEO')

subplot(3,1,1)
plot(z,v,'LineWidth',1)
title('Velocidad de orbita circular')
xlabel('\bfz (km)')
ylabel('\bfv (km/s)')
grid

subplot(3,1,2)
plot(z,T/60,'LineWidth',1)
title('Periodo orbita circular')
xlabel('\bfz (km)')
ylabel('\bfT (min)')
grid

subplot(3,1,3)
plot(z,E,'LineWidth',1)
title('Energia especifica orbita circular')
xlabel('\bfz (km)')
ylabel('\bf\epsilon (km^{2}/s^{2})')
grid
```

Órbita Circular: Ejercicio 1



Órbita Circular: Ejercicio 2

Calcule la altitud z_{GEO} y la velocidad v_{GEO} de un satélite terrestre geoestacionario

Órbita Circular: Ejercicio 2

Si un satélite **permanece siempre sobre el mismo punto del ecuador terrestre**, entonces se encuentra en una órbita ecuatorial geoestacionaria (GEO) circular. Para GEO, el radial desde el centro de la Tierra hasta el satélite debe tener la **misma velocidad angular que la Tierra** misma (es decir, 2π radianes por día sidéreo). Un día sidéreo es el tiempo que tarda la Tierra en completar una rotación con respecto al espacio inercial (las estrellas fijas). El día ordinario de 24 horas, o día sinódico, es el tiempo que le toma al Sol aparentemente dar una vuelta alrededor de la Tierra, desde el mediodía de un día hasta el mediodía del siguiente. Los días sinódicos y siderales serían idénticos si la Tierra estuviera quieta en el espacio. Sin embargo, mientras la Tierra realiza una rotación absoluta alrededor de su eje, avanza $2\pi/365{,}26$ radianes a lo largo de su órbita solar.

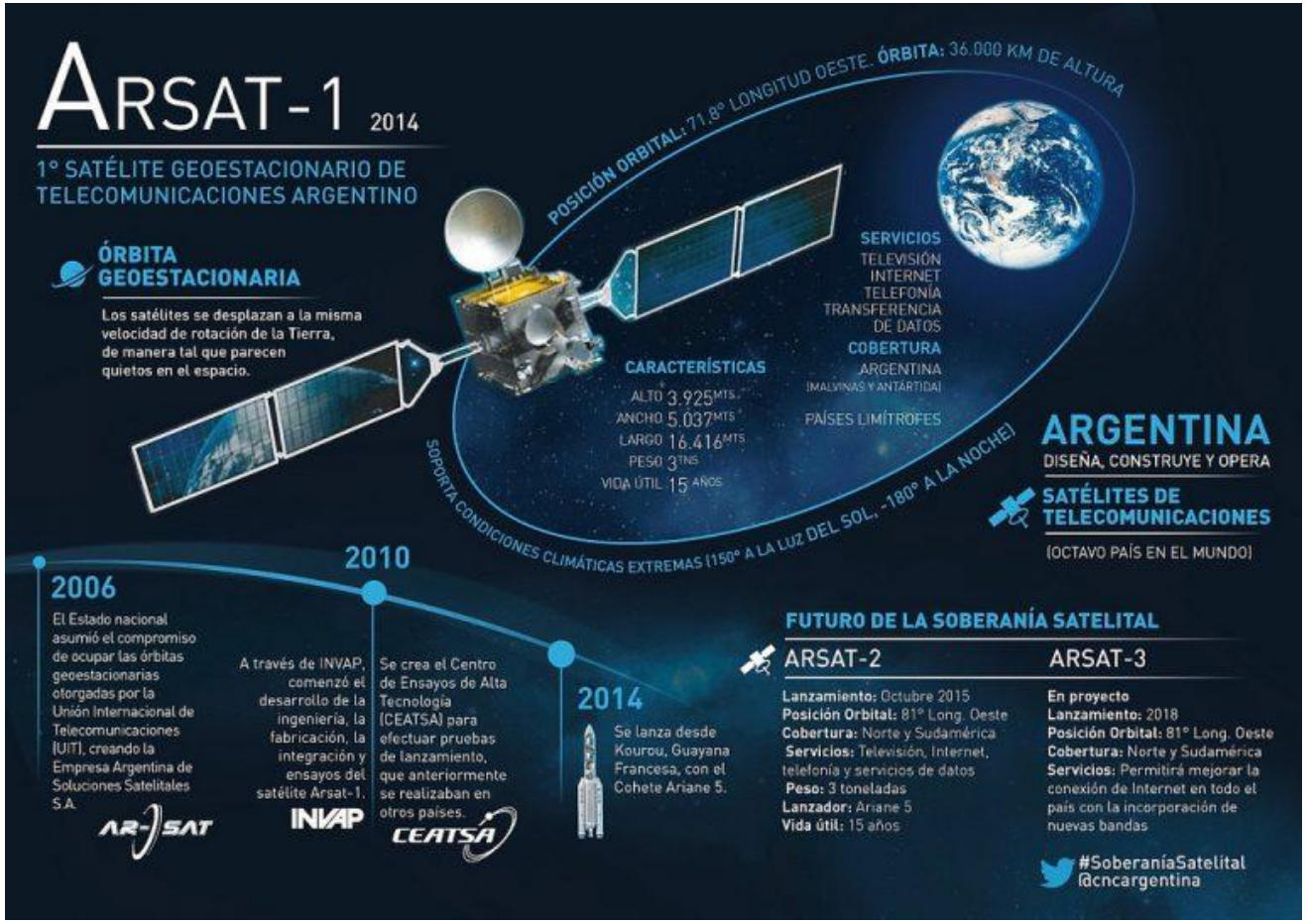
Órbita Circular: Ejercicio 2

Por tanto, su velocidad angular inercial ω_E es [$(2\pi + 2\pi/365{,}26)$ radianes]/$(24$ h).

$$\omega_E = 72.9218 \cdot 10^{-6}\, rad/s$$

Los satélites de comunicaciones y los satélites meteorológicos globales se colocan en órbita geoestacionaria debido a la gran porción de la superficie terrestre visible desde esa altitud y al hecho de que las estaciones terrestres no tienen que rastrear el satélite, que parece inmóvil en el cielo.

Órbita Circular: Ejercicio 2



Órbita Circular: Ejercicio 2

La velocidad de un satélite en una órbita circular GEO de radio r_{GEO} es

$$v_{GEO} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{GEO}}}$$

Por otro lado, la velocidad v_{GEO} a lo largo de su trayectoria circular está relacionada con la velocidad angular absoluta ω_E de la Tierra mediante la fórmula cinemática

$$v_{GEO} = \omega_E r_{GEO}$$

Al equiparar estas dos expresiones y despejar r_{GEO} se obtiene

$$\omega_E r_{GEO} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{GEO}}} \longrightarrow r_{GEO} = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\omega_E^2}}$$

Órbita Circular: Ejercicio 2

$$r_{GEO} = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\omega_E^2}} \longrightarrow r_{GEO} = \sqrt[3]{\frac{398.600\ k\,m^3/s^2}{\left(72{,}9218 \cdot 10^{-6}\,\frac{rad}{s}\right)^2}} = 42.164\ km$$

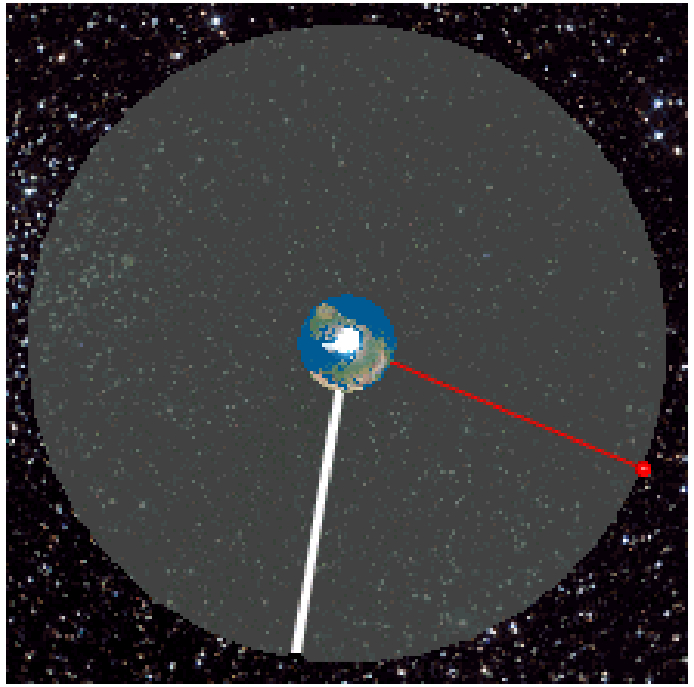
Por lo tanto, la distancia del satélite sobre la superficie terrestre es

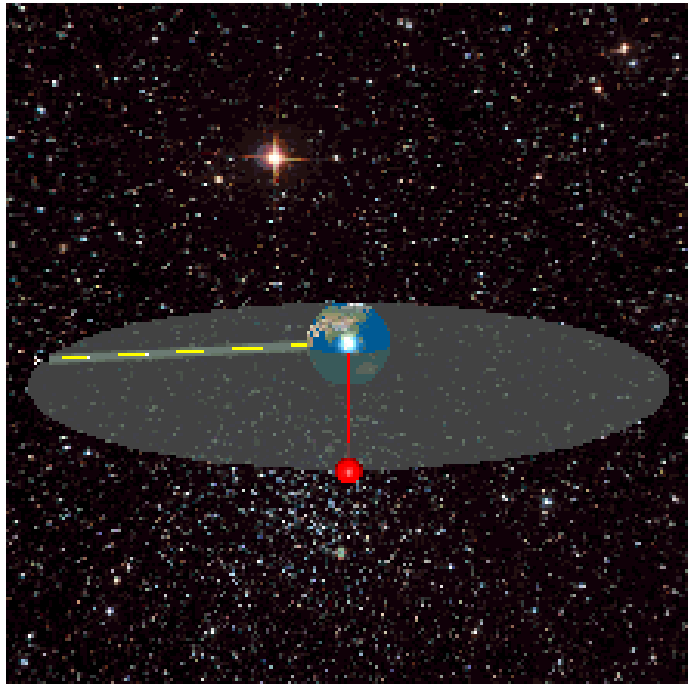
$$z_{GEO} = r_{GEO} - R_E = 42\,164 - 6\,378 \longrightarrow z_{GEO} = 35\,786\ km$$

En cuanto a la velocidad

$$v_{GEO} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{GEO}}} = \sqrt{\frac{398.600}{42.164}} \longrightarrow v_{GEO} = 3.075\,\frac{km}{s}$$

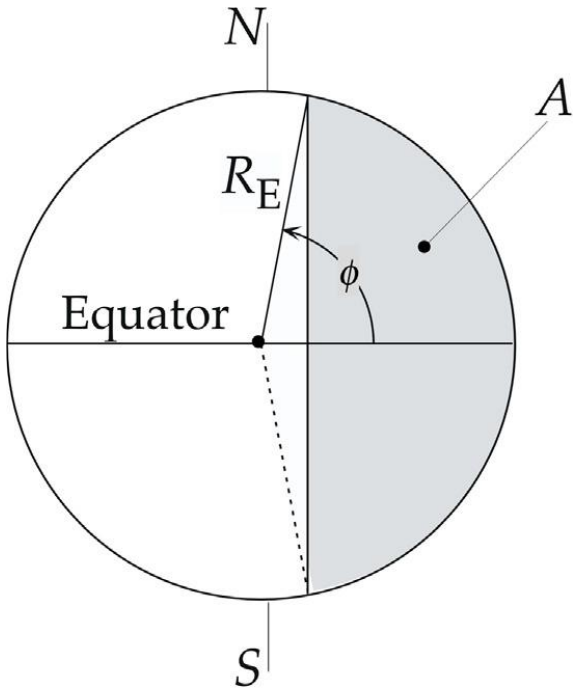
Órbita Circular: Ejercicio 2

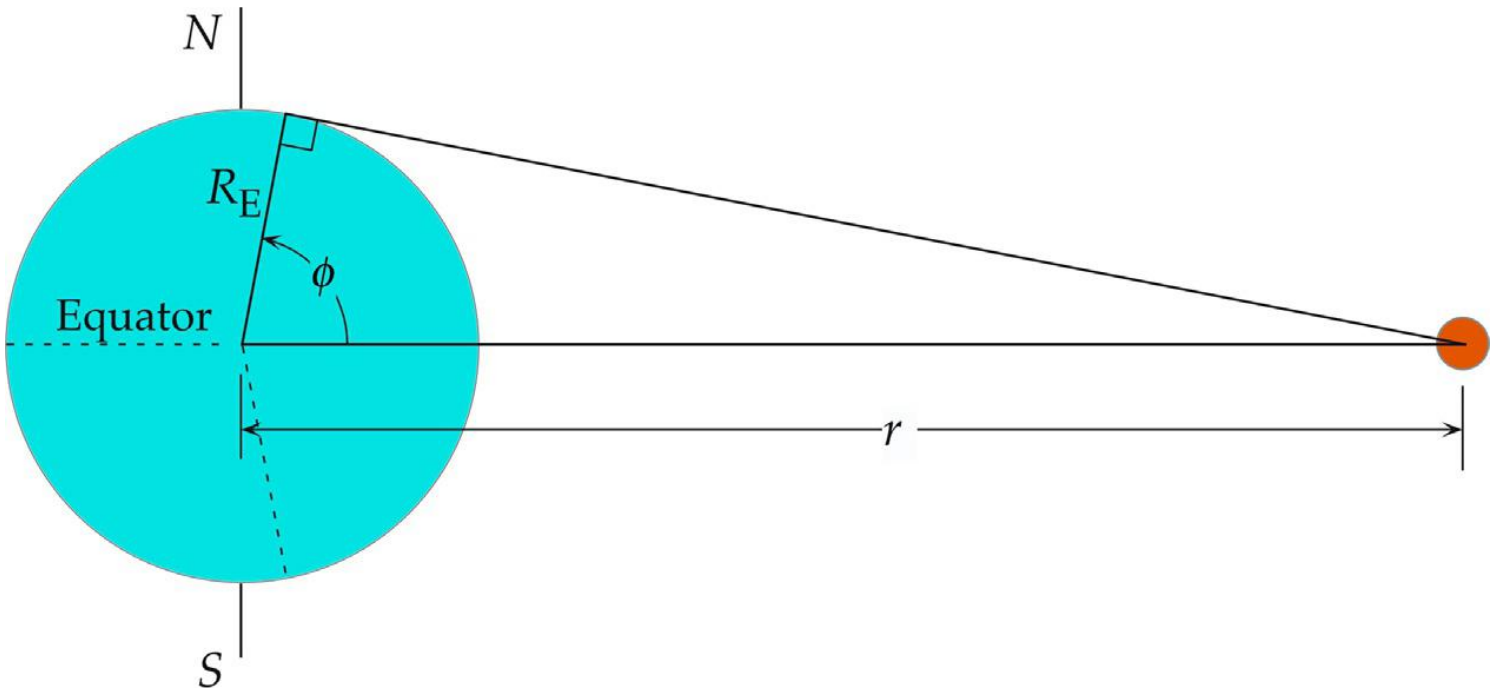




Órbita Circular: Ejercicio 3

Calcula la latitud máxima y el porcentaje de la superficie terrestre visible desde GEO.



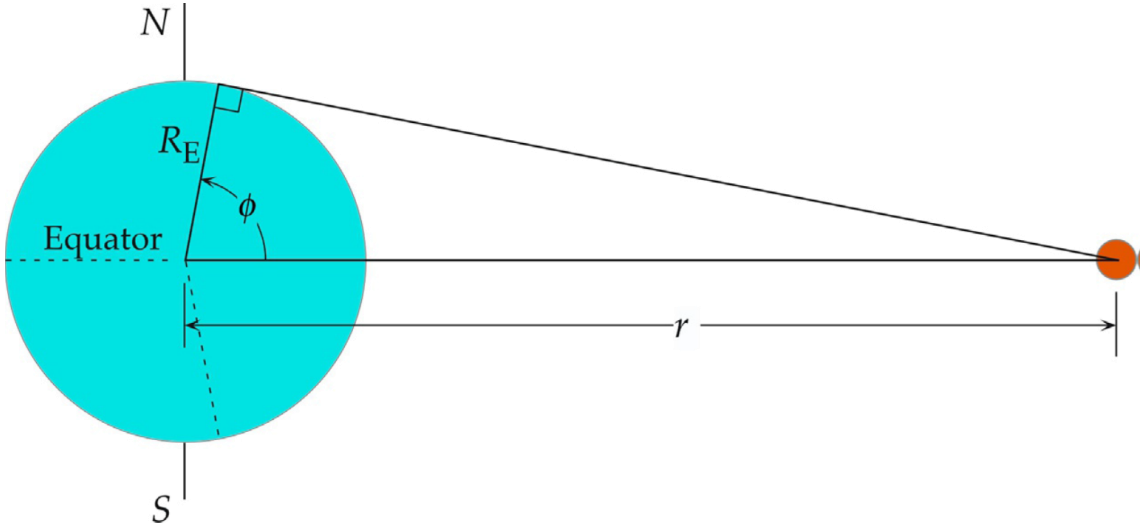


Órbita Circular: Ejercicio 3

El área de superficie A visible desde el GEO es la región sombreada que se ilustra en

$$\phi = \cos^{-1}\frac{R_E}{r}$$

$$\phi = \cos^{-1}\frac{6\,378}{42\,164}$$

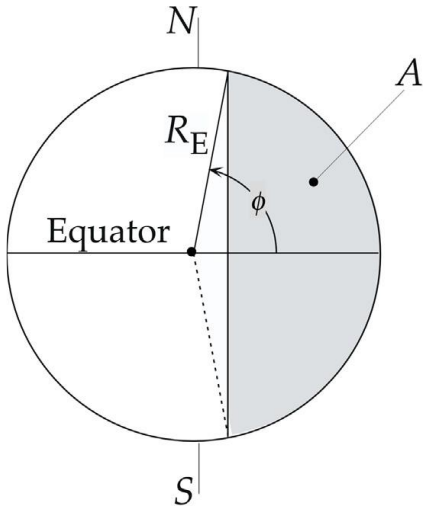


$$\boldsymbol{\phi = 81,30°}$$

Latitud máxima visible norte o sur

Órbita Circular: Ejercicio 3

Para encontrar la latitud máxima visible ϕ, de la figura, se desprende que



$$A = 2\,\pi\,R_E^2 - 2\,\pi\,R_E^2\cos\phi$$

$$A = 2\,\pi\,R_E^2(1-\cos\phi)$$

donde $2\,\pi\,R_E^2$ es el área del hemisferio. Por lo tanto, el porcentaje del hemisferio visible desde el GEO es

$$\frac{A}{2\,\pi\,R_E^2}\times 100 = (1-\cos 81{,}30°)\times 100 = 84{,}9\%$$

lo que por supuesto significa que el $\mathbf{42,4\%}$ de la superficie total de la Tierra se puede ver desde GEO.

Órbita Circular: Resumen de formulas

$$r = \frac{h^2}{\mu}$$

$$v_{circular} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} r^{\frac{3}{2}}$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{h^2}$$

→

$$z_{GEO} = 35\,786\ km$$

$$v_{GEO} = 3.075\ \frac{km}{s}$$

$$\phi_{GEO} = 81{,}30°$$