UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL HAEDO

PRACTICA N°2

LEY DE GRAVEDAD

MECANICA ORBITAL

INGENIERÍA AERONÁUTICA/AEROESPACIAL

Ing. Anibal Cesar Vettorel

Ing. Carlos Mario Carbonel

INDICE

Masa, fuerza, y Ley de Netwon de la gravitacion 3
Ejercicio 1 5
Resolución 5
Ejercicio 2 8
Ejercicio 3 9
Ejercicio 4 9
Ejercicio 5 10
Ejercicio 6 10
ANEXO: acerca de las funciones en matlab 11

MASA, FUERZA, Y LEY DE NETWON DE LA GRAVITACION

De manera más práctica, la masa es una medida de la inercia de un cuerpo. La inercia es la resistencia de un objeto a cambiar su estado de movimiento. Cuanto mayor sea su inercia (mayor su masa), más difícil será poner un cuerpo en movimiento o detenerlo.

La fuerza es la acción de un cuerpo físico sobre otro, ya sea por contacto directo o a distancia. La gravedad es un ejemplo de fuerza que actúa a distancia, al igual que el magnetismo y la fuerza entre partículas cargadas.

La conocida ley de gravedad de newton expresa que la fuerza gravitacional entre dos cuerpos, considerados como masas puntuales (partículas, o esferas de volumen despreciable), m_1 y m_2, de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{F_g} = m_1\boldsymbol{g} = -G\,\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\,\check{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{12}} \qquad \textit{Ec. 1}$$

Por lo tanto, la aceleración debida a la gravedad, g, relativa al centro de masa m_2 tambien obedece la regla del cuadrado inverso.

La constante de gravedad universal, $G = 6.67259\ (\pm 0.0003) * 10^{-11}\frac{m^3}{kg*s^2}$, ha sido objeto de extensas mediciones durante los últimos dos siglos e indica la debilidad de las fuerzas gravitacionales en comparación con otras fuerzas de “acción en distancia” (como las electromagnéticas). Sin embargo, el producto $G\,(m_1 + m_2)$ se obtiene de manera mucho mas simple (y precisa) para un par de cuerpos planetarios mediante las leyes de Kepler. Por ejemplo, la masa de la Tierra, M_e y una masa de prueba esférica despreciable, tenemos que $G * M_e = 398600.4418 \pm 0.0008\frac{km^3}{s^2}$. Por lo tanto, un vehículo de vuelo cerca de un planeta de masa M, experimentaría una aceleración gravitacional

$$\boldsymbol{g} = -\frac{GM}{r^2}\,\check{\boldsymbol{r}} \qquad \textit{Ec. 2}$$

Donde $\boldsymbol{r}$ representa la posición del vehículo relativa al centro del planeta. Las dimensiones y masa del vehículo son generalmente despreciables en comparación con la masa planetaria, M, y el radio, R, respectivamente.

Para la tierra, al nivel del mar, considerando un $R_e = 6378\,km$, la aceleración de la gravedad (modulo) suele llamarse g_0

$$g_0 = \frac{GM}{{R_e}^2} \cong 9.8\, m/s^2 \qquad \textit{Ec. 3}$$

Sustituyendo en la Ec. 2, y considerando que un cuerpo se encuentra a una altura z sobre la superficie de la Tierra, es decir $r = R_e + z$

$$g = g_0 \frac{{R_e}^2}{(R_e + z)^2} = \frac{g_0}{(1 + z/R_e)^2} \qquad \textit{Ec. 4}$$

Los aviones comerciales vuelan a altitudes del orden de 10 km (6 millas). A esa altura, la Ec. (4) revela que g (y por tanto el peso) es sólo tres décimas por ciento menor que su valor al nivel del mar. Por tanto, en condiciones normales, ignoramos la variación de g con la altitud. La variación de g en ese rango es significativa. Aun así, a la altura de la estación espacial (400 km), el peso es sólo aproximadamente un 10% menor que en la superficie terrestre. Los astronautas experimentan ingravidez, pero claramente no lo son.

En este modelo, se asume que toda la masa del planeta está concentrada en su centro, y la gravedad se comporta como si toda la masa estuviera ubicada en un punto llamado centro de masas. Esto se debe a que la fuerza gravitatoria depende de la masa del objeto y la distancia desde su centro. El modelo visto hasta ahora es conocido como modelo de gravedad de planeta esférico.

En el mundo real de masas no esféricas, el modelo de gravedad newtoniano es preciso solo cuando la distancia que separa ambos cuerpos es mucho mayor que las dimensiones individuales de los mismos, es decir, cuando los cuerpos se aproximan razonablemente a masas puntuales. Sin embargo, la ley de gravedad de Newton es bastante útil para derivar un modelo de gravedad más preciso.

El modelo de gravedad de planeta plano es una simplificación del modelo esférico, en el cual se considera que la aceleración de la gravedad (g) es constante y no varía con la altura. Es una aproximación válida solo cerca de la superficie del planeta y para alturas pequeñas en comparación con el radio del planeta, es decir, este modelo es válido cuando para el movimiento se puede asumir que la superficie del planeta es plana. Si la trayectoria que sigue el vehículo espacial es relativamente corta, la curvatura de la superficie del planeta es despreciable y puede asumirse que el planeta es plano. Adicionalmente, este modelo es muy utilizado a nivel educativo, ya que ayuda a los estudiantes a comprender conceptos básicos de gravedad y mecánica orbital.

Es importante tener en cuenta que, en la mayoría de las aplicaciones prácticas y profesionales, la Tierra (u otros planetas) se considera esférica o, más precisamente, se emplean modelos de gravedad más complejos que toman en cuenta la forma y distribución real de la masa del planeta. Estos modelos más precisos son fundamentales para misiones espaciales y aplicaciones donde se requiere una alta precisión en la predicción de órbitas y trayectorias. El modelo de planeta plano es solo una aproximación válida en circunstancias específicas y debe usarse con cautela para evitar errores significativos en los resultados de la simulación.

Ejercicio 1

a) Generar en MATLAB una función que resuelva los dos modelos gravitatorios vistos

b) Grafique ambos modelos de gravedad desde el nivel del mar hasta los 2000km de altitud

c) Defina una función que restrinja los valores de entrada a alturas positivas, selección de solamente 2 modelos.

d) Si asumimos que una diferencia de 5% entre los valores de la gravedad de ambos modelos se considera aceptable, ¿Hasta que altitud se puede asumir que la gravedad de la Tierra es constante?

Resolución

Script *VarGravedad.m*

```
%% ---------------------------------------------------------------------
% UTN - FRH
% Ley de Gravedad
% ---------------------------------------------------------------------
%% Notas aclaratorias
% Este script analiza la variación de la aceleración de la gravedad con la
% altura, comparando dos modelos:
%
% - Modelo plano: gravedad constante
% - Modelo esférico: gravedad variable con la distancia al centro de la
% Tierra
%
% Se calcula además el porcentaje relativo entre ambos modelos.
% Se determina la altura máxima para la cual la diferencia entre el modelo
% plano y esférico es menor o igual al 5%
%
% Variables utilizadas:
% alt_f - Altura máxima [m]
% alt   - Vector de alturas [m]
% gp    - Gravedad modelo plano [m/s^2]
```

```
% ge    - Gravedad modelo esférico [m/s^2]
% por   - Relación porcentual entre modelos [%]
%
% Funciones utilizadas:
% gravedad - Función que calcula la aceleración de la gravedad

%% Limpieza del entorno de trabajo
close all   % Cierra todas las figuras abiertas
clear       % Elimina todas las variables del Workspace
clc         % Limpia la ventana de comandos

%% Datos de entrada
% Constantes
Re = 6378.135e3;

% Datos de entrada
alt_f = 2e6;   % Altura máxima [m]

%% Inicialización de variables
alt = 1:alt_f; % Vector de alturas [m]

gp  = zeros(size(alt));
ge  = zeros(size(alt));
por = zeros(size(alt));

%% Cálculo del modelo
for i = 1:length(alt)

    h = alt(i);

    gp(i)  = gravedad(h,1); % Modelo plano
    ge(i)  = gravedad(h,2); % Modelo esférico

    por(i) = 100 * ge(i) / gp(i); % Porcentaje relativo

end

%% Determinación del 95%
% Método numérico
idx_95 = find(por <= 95, 1); % Primer valor donde cae al 95%
alt_lim = alt(idx_95);

% Método analítico
alt_analitica = (sqrt(1/0.95) - 1) * Re;

%%  Resultados del análisis
fprintf('-----------------------------------------\n')
fprintf('ANÁLISIS DE VALIDEZ DEL MODELO PLANO\n')
fprintf('-----------------------------------------\n')
fprintf('Altura límite (método numérico):  %.2f km\n', alt_lim/1000)
fprintf('Altura límite (método analítico): %.2f km\n', alt_analitica/1000)

%% Gráficos

figure('Name','Comparación de modelos de gravedad')

% --------------------- Porcentaje ---------------------
subplot(2,1,1)
plot(alt, por, 'g', 'LineWidth', 1)
```

```
title('Variación porcentual')
xlabel('Altura [m]')
ylabel('g_{esférica} / g_{plana} [%]')
ylim([50 100])
grid on
box on
hold on

% Línea de referencia 95%
plot([alt_analitica alt_analitica],[50 95],'--k','LineWidth',1)
plot([0 alt_analitica],[95 95],'--k','LineWidth',1)

% Punto destacado del 95%
y_95 = 95;
plot(alt_analitica, y_95, 'ko', 'MarkerFaceColor','k')

text(alt_analitica, y_95, ...
    sprintf('  95%% (%.0f m)', alt_analitica), ...
    'VerticalAlignment','bottom', ...
    'HorizontalAlignment','left')

hold off

% --------------------- Gravedad --------------------
subplot(2,1,2)
plot(alt, gp, 'r--', alt, ge, 'b:', 'LineWidth', 1.2)
title('Variación de la gravedad con la altura')
legend('Modelo plano','Modelo esférico','Location','best')
xlabel('Altura [m]')
ylabel('g [m/s^2]')
grid on
box on

sgtitle('Comparación entre modelo plano y esférico de la gravedad')
```

Función *gravedad.m*

```
%% ---------------------------------------------------------------------
% FUNCIÓN DE GRAVEDAD
% ---------------------------------------------------------------------

function g = gravedad(alt, modelo)

%% Notas aclaratorias
% Esta función calcula la aceleración de la gravedad en función de la altura
% sobre la superficie terrestre, utilizando dos modelos:
%
% - Modelo plano: gravedad constante
% - Modelo esférico: gravedad variable con la distancia al centro
%
% Entradas:
% alt    - Altura sobre la superficie [m]
% modelo - Tipo de modelo (1: plano, 2: esférico)
%
% Salida:
% g - Aceleración de la gravedad [m/s^2]
%
% Funciones utilizadas: Ninguna
```

```
%% Constantes físicas (Tierra)
mu = 3.986004418e14; % [m^3/s^2]
Re = 6378.135e3;     % [m]

%% Modelos gravitatorios

if modelo == 1
    % Modelo plano
    g = mu / Re^2;

elseif modelo == 2
    % Modelo esférico
    g = mu / (Re + alt)^2;

else
    error('Modelo no válido. Usar 1 (plano) o 2 (esférico)')
end

end
```

Ejercicio 2

Genere una función para poder calcular la gravedad en los siguientes cuerpos celestes.

Object	Radius (km)	Mass (kg)	Sidereal rotation period	Inclination of equator to orbit plane	Semimajor axis of orbit (km)	Orbit eccentricity	Inclination of orbit to the ecliptic plane	Orbit sidereal period
Sun	696,000	1.989×10^{30}	25.38d	7.25°	–	–	–	–
Mercury	2440	330.2×10^{21}	58.65d	0.01°	57.91×10^{6}	0.2056	7.00°	87.97d
Venus	6052	4.869×10^{24}	243d[a]	177.4°	108.2×10^{6}	0.0067	3.39°	224.7d
Earth	6378	5.974×10^{24}	23.9345h	23.45°	149.6×10^{6}	0.0167	0.00°	365.256d
(Moon)	1737	73.48×10^{21}	27.32d	6.68°	384.4×10^{3}	0.0549	5.145°	27.322d
Mars	3396	641.9×10^{21}	24.62h	25.19°	227.9×10^{6}	0.0935	1.850°	1.881y
Jupiter	71,490	1.899×10^{27}	9.925h	3.13°	778.6×10^{6}	0.0489	1.304°	11.86y
Saturn	60,270	568.5×10^{24}	10.66h	26.73°	1.433×10^{9}	0.0565	2.485°	29.46y
Uranus	25,560	86.83×10^{24}	17.24h[a]	97.77°	2.872×10^{9}	0.0457	0.772°	84.01y
Neptune	24,764	102.4×10^{24}	16.11h	28.32°	4.495×10^{9}	0.0113	1.769	164.8y
(Pluto)	1187	13.03×10^{21}	6.387d[a]	122.5°	5.906×10^{9}	0.2488	17.16°	247.9y

[a] *Retrograde.*

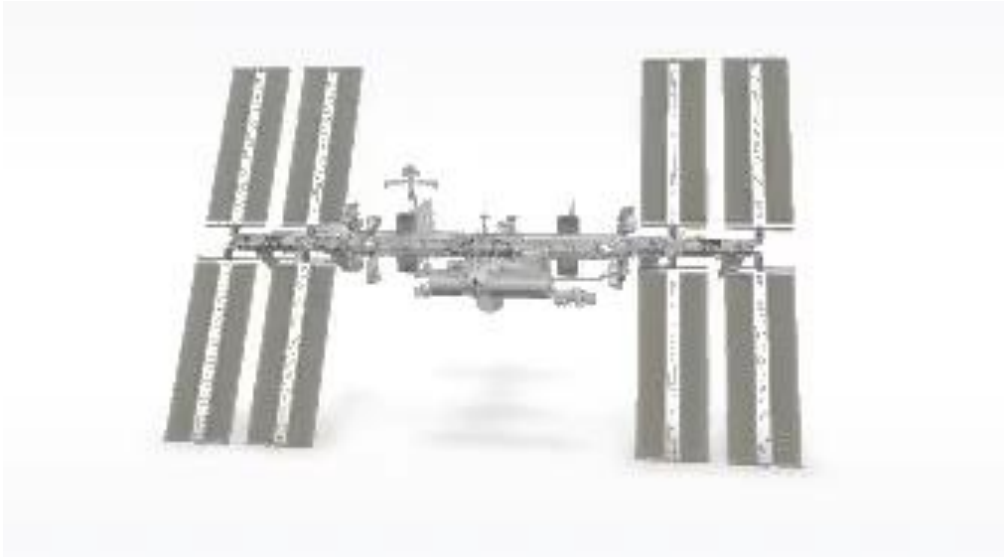
Ejercicio 3

Con los modelos de gravedad de planeta plano, complete la siguiente tabla. El factor de conversión representa por cuanto debería multiplicarse el valor de gravedad de la Tierra, para obtener el valor del otro cuerpo celeste.

Cuerpo celeste	**Gravedad**	**Factor de conversión**
Mercurio		0.38
Venus		
Tierra	9.7992	1
Marte	3.7139	
Júpiter		
Saturno		
Urano		0.91
Neptuno	11.1417	
Plutón		

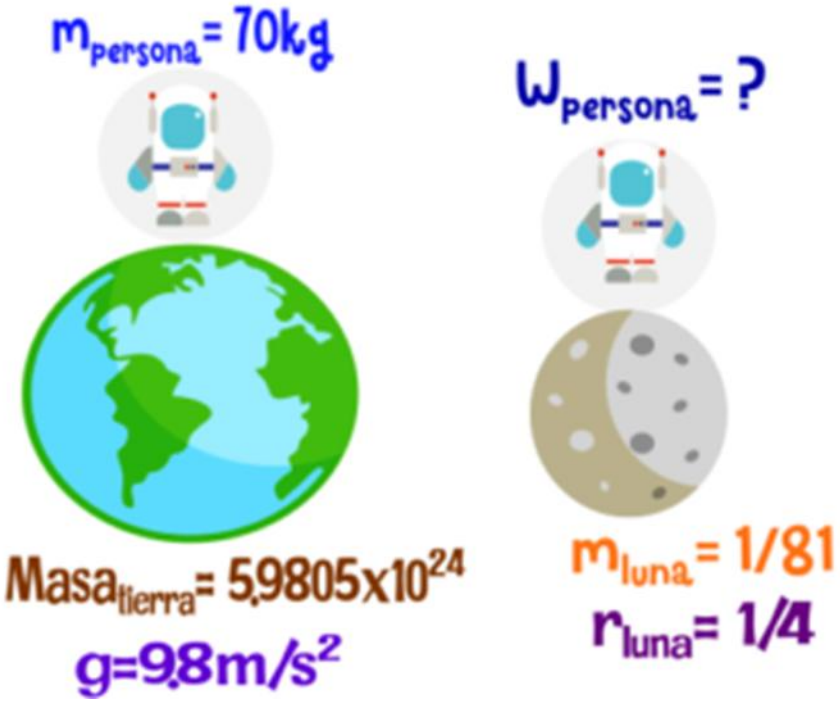
Ejercicio 4

Considerando que la estación espacial internacional (ISS) se encuentra en una órbita de 400km sobre la superficie terrestre, ¿Qué tan menor es el peso de un astronauta en relación con su peso en la Tierra?



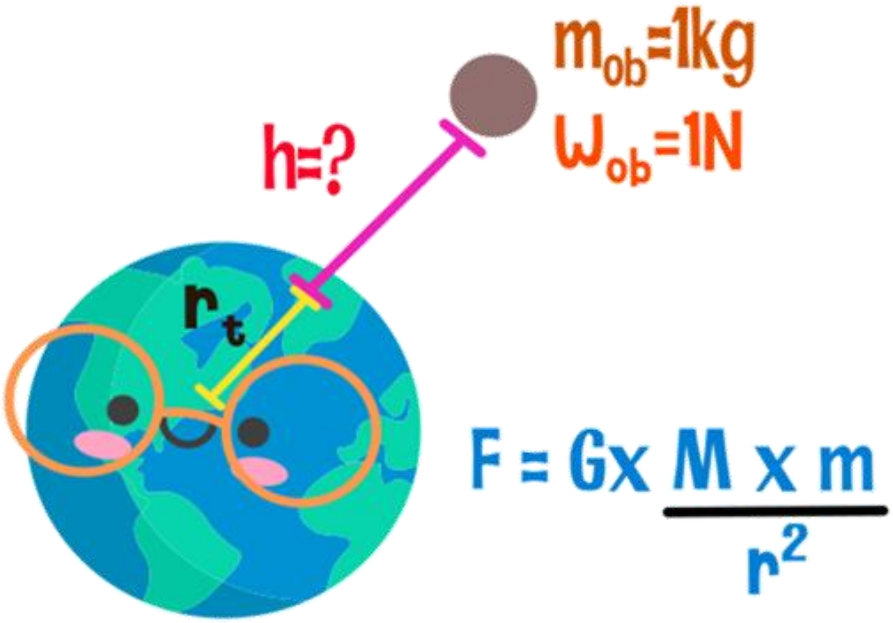
Ejercicio 5

La masa de la Luna es 1/81 de la masa de la Tierra y su radio es 1/4 del radio de la Tierra. Calcule el peso que experimenta una persona de 70kg en la superficie de la Luna



Ejercicio 6

Expresar en función del radio de la Tierra, a que distancia de la misma un objeto que tiene una masa de 1kg pesa 1N.



ANEXO: ACERCA DE LAS FUNCIONES EN MATLAB

Enlaces útiles:

- https://la.mathworks.com/help/matlab/ref/function.html?searchHighlight=function&s_tid=srchtitle_support_results_1_function
- https://la.mathworks.com/help/matlab/ref/arguments.html?searchHighlight=argument&s_tid=srchtitle_support_results_1_argument
- https://la.mathworks.com/help/matlab/ref/figure.html?searchHighlight=figure&s_tid=srchtitle_support_results_1_figure
- https://la.mathworks.com/help/matlab/ref/plot.html?searchHighlight=plot&s_tid=srchtitle_support_results_1_plot