UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL HAEDO

PRACTICA

TIPOS DE ÓRBITAS

MECANICA ORBITAL

INGENIERÍA AERONÁUTICA/AEROESPACIAL

Ing. Anibal Cesar Vettorel

Ing. Carlos Mario Carbonel

INDICE

INDICE 2

Orbitas ciruculares ($e = 0$) 4

Ejemplo 1 6

Solución 6

Ejemplo 2 8

Solución 8

Ejemplo 3 9

Solución 9

Órbitas elipticas ($0 < e < 1$) 11

Ejercicio propuesto de clase 18

Solución 18

Ejemplo 2 20

Excentricidad e 21

Momento angular h 21

Velocidad en el perigeo vp 22

Velocidad en el apogeo va 22

Semieje mayor a 22

Periodo orbital T 22

Radio promedio de anomalía verdadera θ 23

Anomalía verdadera θ 23

Velocidad del satélite cuando $r = r\theta$ 23

Angulo de la trayectoria de vuelo γ cuando $r = r\theta$ 24

Angulo máximo de la trayectoria de vuelo γmax y la verdadera anomalía en la que ocurre. 24

Ejemplo 3 25

Excentricidad e 25

Altitud de perigeo zp 26

Semieje mayor a 26

Periodo órbita T 27

Órbitas parabolicas ($e = 1$) 27

Ejemplo 1 30

Solución 30

Ejercicio propuesto en clase 31
Solución 32
Órbitas hiperbolicas ($e > 1$) 33
Ejemplo 1 39
Momento angular 40
Excentricidad 41
Anomalia verdadera 42
Radio de perigeo 42
Semieje mayor 42
$C3$ 42
Angulo de giro 43
Radio de puntería 43
Resumen de formula mas usadas 45
Mapa conceptual 45
Todas las órbitas 45
Órbita Circular ($e = 0$) 46
Órbitas Elíptica ($0 < e < 1$) 46
Órbita Parabólica ($e = 1$) 47
Órbita Hiperbólica ($e > 1$) 47

ORBITAS CIRUCULARES ($e = 0$)

Al establecer $e = 0$ en la ecuación orbital $r = (h^2/\mu)/(1 + e\cos\theta)$ se obtiene

$$r = \frac{h^2}{\mu} \qquad \text{Ec. 1}$$

Es decir, $r = constante$, lo que significa que la órbita de m_2 alrededor de m_1 es un círculo. Como la velocidad radial $\dot{r}$ es cero, se deduce que $v = v_\perp$ de modo que la fórmula del momento angular $h = r\,v_\perp$ se convierte simplemente en $h = r\,v$ para una órbita circular. Sustituyendo esta expresión por h en la Ec. 1 y al resolver v se obtiene la velocidad de una órbita circular,

$$v_{circular} = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \qquad \text{Ec. 2}$$

El tiempo T requerido para una órbita se conoce como período. Como la velocidad es constante, el período de una órbita circular es fácil de calcular.

$$T = \frac{circunsferencia}{velocidad} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\mu/r}} \qquad \text{Ec. 3}$$

de modo que

$$T_{circular} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} r^{3/2} \qquad \text{Ec. 4}$$

La energía específica de una órbita circular se encuentra estableciendo $e = 0$ en la ecuación de energía especifica $\varepsilon = -\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{h^2}(1 - e^2)$

$$\varepsilon = -\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{h^2} \qquad \text{Ec. 5}$$

Empleando Ec. 1 se obtiene

$$\varepsilon_{circular} = -\frac{\mu}{2r} \qquad \text{Ec. 6}$$

Evidentemente, la energía de una órbita circular es negativa. A medida que aumenta el radio, la energía se vuelve menos negativa (es decir, aumenta). En otras palabras, cuanto mayor es la órbita, mayor es su energía.

Para lanzar un satélite desde la superficie de la Tierra a una órbita circular es necesario aumentar su energía específica ε. Esta energía proviene de los motores del cohete del vehículo de lanzamiento. Dado que la energía de un satélite de masa m es $E = m\varepsilon$, un sistema de propulsión que puede colocar una masa grande en una órbita terrestre baja (LEO) puede colocar una masa más pequeña en una órbita terrestre más alta.

Las naves espaciales orbitales tripuladas y una gran cantidad de satélites no tripulados de teledetección, imágenes y navegación ocupan orbitas LEO nominalmente circulares. Una órbita LEO es aquella cuya altitud se encuentra entre aproximadamente 150 km y aproximadamente 2000 km. Un LEO está muy por encima de los límites exteriores nominales de la atmósfera productora de resistencia (aproximadamente 80 km) y muy por debajo de los peligrosos cinturones de radiación de Van Allen, el más interno de los cuales comienza a aproximadamente 2400 km.

Casi todas nuestras aplicaciones de las ecuaciones orbitales serán para el análisis de naves espaciales construidas por el hombre, todas las cuales tienen una masa insignificante en comparación con el Sol y los planetas. Por ejemplo, dado que la Tierra es casi 20 órdenes de magnitud más masiva que el satélite artificial más grande imaginable, el centro de masa del sistema de dos cuerpos se encuentra en el centro de la Tierra, y la constante μ en la ecuación $\mu = G(m_1 + m_2)$ se convierte en

$$\mu = G(m_{Tierra} + m_{satelite}) = Gm_{Tierra} = 398600\ km^3/s^2 \qquad \textit{Ec. 7}$$

Si un satélite permanece siempre sobre el mismo punto del ecuador terrestre, entonces se encuentra en una órbita ecuatorial geoestacionaria (GEO) circular. Para GEO, el radial desde el centro de la Tierra hasta el satélite debe tener la misma velocidad angular que la Tierra misma (es decir, 2π radianes por día sidéreo). Un día sidéreo es el tiempo que tarda la Tierra en completar una rotación con respecto al espacio inercial (las estrellas fijas). El día ordinario de 24 horas, o día sinódico, es el tiempo que le toma al Sol aparentemente dar una vuelta alrededor de la Tierra, desde el mediodía de un día hasta el mediodía del siguiente. Los días sinódicos y siderales serían idénticos si la Tierra estuviera quieta en el espacio. Sin embargo, mientras la Tierra realiza una rotación absoluta alrededor de su eje, avanza $2\pi/365{,}26$ radianes a lo largo de su órbita solar. Por tanto, su velocidad angular inercial ω_E es [$(2\pi + 2\pi/365{,}26)$ radianes]/(24 h). Eso es,

$$\omega_E = 72.9218 \cdot 10^{-6}\ rad/s \qquad \textit{Ec. 8}$$

Los satélites de comunicaciones y los satélites meteorológicos globales se colocan en órbita geoestacionaria debido a la gran porción de la superficie terrestre visible desde esa altitud y al hecho de que las estaciones terrestres no tienen que rastrear el satélite, que parece inmóvil en el cielo.

Ejemplo 1

Trace la velocidad v y el período T de un satélite en un LEO circular en función de la altitud z.

Solución

Las Ec. 2 y Ec. 4 dan la velocidad y el período, respectivamente, del satélite:

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{r}} = \sqrt{\frac{\mu}{R_E + z}} = \sqrt{\frac{398.600}{6.378 + z}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} r^{3/2} = \frac{2\pi}{\sqrt{398.600}} (6.378 + z)^{3/2}$$

Utilizando Matlab:

```
%% ----------------------------------------------------------------------
% UTN - FRH
% TIPOS DE ÓRBITAS CIRCULARES - LEO
% ----------------------------------------------------------------------

%% Notas aclaratorias
% Este script analiza las características de órbitas circulares terrestres
% de baja altura (LEO), evaluando la variación de:
%
% - Velocidad orbital
% - Período orbital
% - Energía mecánica específica
%
% en función de la altitud.
%
% Se utilizan expresiones analíticas derivadas de la mecánica orbital.
%
% Variables utilizadas:
% mu  - Parámetro gravitacional terrestre [km^3/s^2]
% R_e - Radio medio de la Tierra [km]
% z   - Altitud sobre la superficie [km]
% r   - Radio orbital [km]
% v   - Velocidad orbital [km/s]
% T   - Período orbital [s]
% E   - Energía específica [km^2/s^2]
%
% Funciones utilizadas: Ninguna

%% Limpieza del entorno de trabajo
```

```
close all   % Cierra todas las figuras abiertas
clear       % Elimina variables del Workspace
clc         % Limpia la ventana de comandos

%% Datos de entrada
% Constantes físicas
mu  = 398600; % Parámetro gravitacional terrestre [km^3/s^2]
R_e = 6378;   % Radio medio de la Tierra [km]

% Vector de altitudes
z = 150:1:2000; % Altitud [km]

%% Cálculo de parámetros orbitales
% Radio orbital
r = R_e + z;

% Velocidad orbital (órbita circular)
v = sqrt(mu ./ r);

% Período orbital
T = 2*pi .* sqrt(r.^3 ./ mu);

% Energía mecánica específica
E = -mu ./ r;

%% Resultados gráficos
% Se analizan las magnitudes en función de la altitud

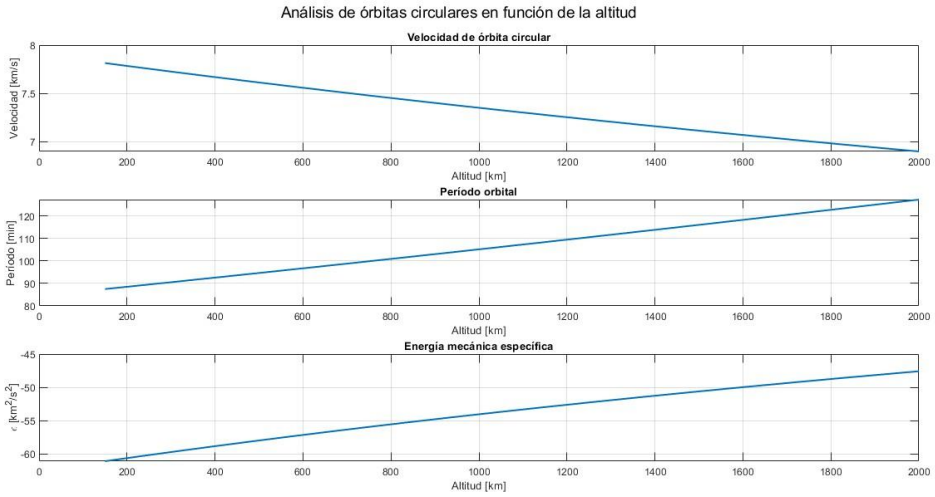
figure('Name','Órbitas Circulares LEO','NumberTitle','off');

% ---------------------- Velocidad ----------------------
subplot(3,1,1)
plot(z, v, 'LineWidth', 1.5)
title('Velocidad de órbita circular')
xlabel('Altitud [km]')
ylabel('Velocidad [km/s]')
grid on
box on

% ---------------------- Período ----------------------
subplot(3,1,2)
plot(z, T/60, 'LineWidth', 1.5)
title('Período orbital')
xlabel('Altitud [km]')
ylabel('Período [min]')
grid on
box on

% ---------------------- Energía específica ----------------------
subplot(3,1,3)
plot(z, E, 'LineWidth', 1.5)
title('Energía mecánica específica')
xlabel('Altitud [km]')
ylabel('\epsilon [km^2/s^2]')
grid on
box on

sgtitle('Análisis de órbitas circulares en función de la altitud')
```



Ejemplo 2

Calcule la altitud z_{GEO} y la velocidad v_{GEO} de un satélite terrestre geoestacionario.

Solución

De la Ec. 1la velocidad de un satélite en una órbita circular GEO de radio r_{GEO} es

$$v_{GEO} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{GEO}}}$$

Por otro lado, la velocidad v_{GEO} a lo largo de su trayectoria circular está relacionada con la velocidad angular absoluta ω_E de la Tierra mediante la fórmula cinemática

$$v_{GEO} = \omega_E r_{GEO}$$

Al equiparar estas dos expresiones y despejar r_{GEO} se obtiene

$$\omega_E r_{GEO} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{GEO}}} \longrightarrow r_{GEO} = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\omega_E^2}}$$

Sustituyendo Ec. 7 y Ec. 8

$$r_{GEO} = \sqrt[3]{\frac{398.600\ km^3/s^2}{\left(72{,}9218 \cdot 10^{-6}\frac{rad}{s}\right)^2}} = 42.164\ km$$

Por lo tanto, la distancia del satélite sobre la superficie terrestre es

$$z_{GEO} = r_{GEO} - R_E = 42.164 - 6378$$

$$\boxed{z_{GEO} = 35.786\ km}$$

En cuanto a la velocidad

$$v_{GEO} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{GEO}}} = \sqrt{\frac{398.600}{42.164}}$$

$$\boxed{v_{GEO} = 3.075 \frac{km}{s}}$$

Ejemplo 3

Calcula la latitud máxima y el porcentaje de la superficie terrestre visible desde GEO.

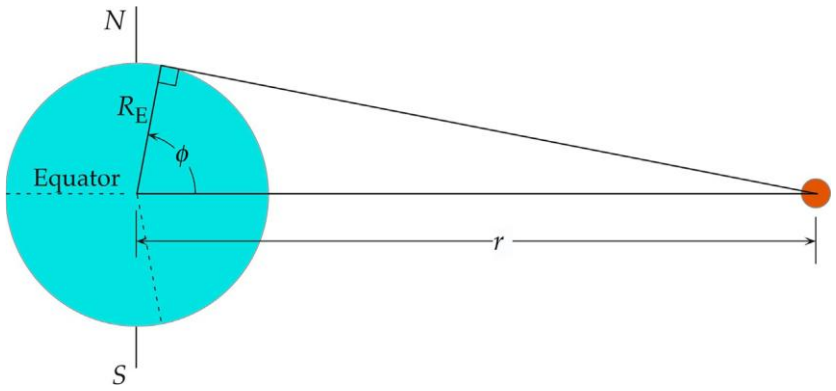


Figura 1. Satélite en órbita GEO.

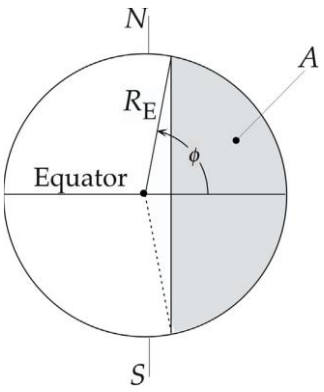


Figura 2. Área de superficie A visible desde GEO.

Solución

Para encontrar la latitud máxima visible ϕ, utilice la Figura 1, de la cual se desprende que:

$$\phi = \cos^{-1}\frac{R_E}{r}$$

donde $R_E = 6.378\ km$ y de acuerdo con el Ejemplo 2, $r_{GEO} = 42.164\ km$, por lo tanto:

$$\phi = \cos^{-1}\frac{6.378}{42.164}$$

$\boxed{\phi = 81{,}30°}$ Latitud máxima visible norte o sur

El área de superficie A visible desde el GEO es la región sombreada que se ilustra en la Figura 2. Se puede demostrar que el área A está dada por

$$A = 2\,\pi\,R_E^2(1 - \cos\phi)$$

donde $2\,\pi\,R_E^2$ es el área del hemisferio. Por lo tanto, el porcentaje del hemisferio visible desde el GEO es

$$\frac{A}{2\,\pi\,R_E^2} \times 100 = (1 - \cos 81{,}30°) \times 100 = 84{,}9\%$$

lo que por supuesto significa que el $42{,}4\%$ de la superficie total de la Tierra se puede ver desde GEO.

ÓRBITAS ELIPTICAS ($0 < e < 1$)

Si $0 < e < 1$, entonces el denominador de la ecuación $r = (h^2/\mu)/(1 + e\cos\theta)$ varía con la verdadera anomalía θ, pero sigue siendo positivO y nunca llega a ser cero. Por lo tanto, el vector de posición relativa permanece acotado y tiene su magnitud más pequeña en el periapsis r_p, dada por la ecuación $r_p = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e}$. El valor máximo de r se alcanza cuando el denominador de $r = (h^2/\mu)/(1 + e\cos\theta)$ obtiene su valor mínimo, que ocurre en $\theta = 180°$.Ese punto se llama apoapsis y su coordenada radial, denotada por r_a, es $r_a = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1-e}$.

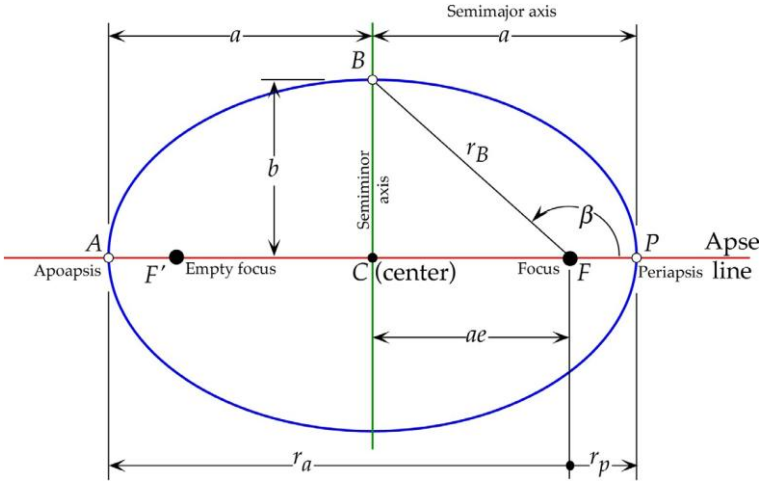


Figura 3. Órbita elíptica definida por la ecuación

Sea $2a$ la distancia medida a lo largo de la línea del ábside desde el periapsis P hasta el apoapsis A, como se ilustra en la Figura 3. Entonces,

$$2a = r_p + r_a$$

$$2a = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e} + \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1-e}$$

$$\boxed{a = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1-e^2}} \qquad \text{Ec. 9}$$

Donde a es el semieje mayor de la elipse. Resolviendo la Ec. 9 para h^2/μ y poner el resultado en la ecuación $r = (h^2/\mu)/(1 + e\cos\theta)$ produce una forma alternativa de la ecuación de órbita,

$$r = a\frac{1-e^2}{1+e\cos\theta} \qquad \textit{Ec. 10}$$

En la Figura 3,F es la ubicación del cuerpo m_1, que es el origen del sistema de coordenadas polares r, θ. El centro C de la elipse es el punto medio entre la apoapsis y la periapsis. La distancia CF desde el centro C al foco F es

$$CF = a - FP = a - r_p$$

Y como la Ec. 9 evaluada en $\theta = 0$ es la distancia al periapsis

$$r_p = a\frac{1-e^2}{1+e\cos 0}$$

$$r_p = a(1-e) \qquad \textit{Ec. 11}$$

La distancia CF

$$CF = a - a(1-e) = ae \qquad \textit{Ec. 12}$$

Sea B el punto de la órbita que se encuentra directamente encima de C, en la bisectriz perpendicular del eje mayor AP. La distancia b de C a B es el semieje menor. Si la verdadera anomalía del punto B es β, entonces, según la Ec. 10 , la coordenada radial de B es

$$r_B = a\frac{1-e^2}{1+e\cos\beta} \qquad \textit{Ec. 13}$$

La proyección de r_B en la línea de apsis es ae. Esto es:

$$ae = r_B\cos(180° - \beta) = -r_B\cos\beta = -\left(a\frac{1-e^2}{1+e\cos\beta}\right)\cos\beta$$

Resolviendo esta expresión para e se obtiene

$$e = -\cos\beta \qquad \textit{Ec. 14}$$

Sustituyendo este resultado en la Ec. 13 revela el hecho interesante de que

$$r_B = a$$

Según el teorema de Pitágoras,

$$b^2 = {r_B}^2 - (ae)^2 = a^2 - a^2e^2$$

lo que significa que el semieje menor se encuentra en términos del semieje mayor y la excentricidad de la elipse como

$$\boxed{b = a\sqrt{1-e^2}} \qquad \textit{Ec. 15}$$

Sea un sistema de coordenadas cartesiano xy centrado en C, como se muestra en la Figura 4. En términos de r y θ, vemos en la figura que la coordenada x de un punto en la órbita es

$$x = ae + r\cos\theta = ae + \left(a\frac{1-e^2}{1+e\cos\theta}\right)\cos\theta = a\frac{e+\cos\theta}{1+e\cos\theta}$$

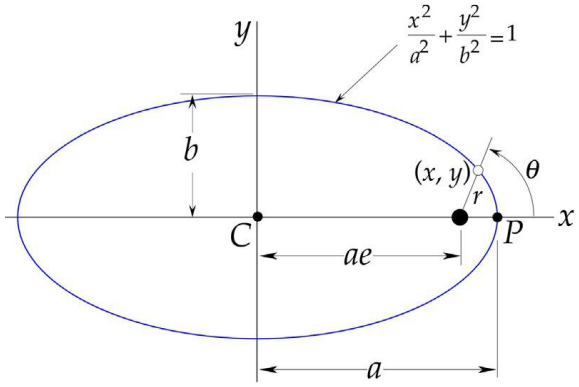


Figura 4. Descripción en coordenadas cartesianas de la órbita.

De esto tenemos

$$\frac{x}{a} = \frac{e+\cos\theta}{1+e\cos\theta} \qquad \textit{Ec. 16}$$

Para la coordenada y, utilizamos la Ec. 15 para obtener

$$y = r\sin\theta = \left(a\,\frac{1-e^2}{1+e\cos\theta}\right)\sin\theta = b\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos\theta}\sin\theta$$

Por lo tanto,

$$\frac{y}{b} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos\theta}\sin\theta \qquad \textit{Ec. 17}$$

Usando las Ec. 16 y Ec. 17 encontramos que

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}&=\frac{1}{(1+e\cos\theta)^2}\left[(e+\cos\theta)^2+(1-e^2)\sin^2\theta\right]\\&=\frac{1}{(1+e\cos\theta)^2}\left[e^2+2e\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta-e^2\sin^2\theta\right]\\&=\frac{1}{(1+e\cos\theta)^2}\left[e^2+2e\cos\theta+1-e^2\sin^2\theta\right]\\&=\frac{1}{(1+e\cos\theta)^2}\left[e^2(1-\sin^2\theta)+2e\cos\theta+1\right]\\&=\frac{1}{(1+e\cos\theta)^2}\left[e^2\cos^2\theta+2e\cos\theta+1\right]\\&=\frac{1}{(1+e\cos\theta)^2}(1+e\cos\theta)^2\end{aligned}$$

Esto es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \textit{Ec. 18}$$

Esta es la conocida fórmula de coordenadas cartesianas para una elipse centrada en el origen, interceptando a x en $\pm a$ e interceptando a y en $\pm b$. Si $a = b$, la Ec. 18 describe un círculo, que en realidad es una elipse cuya excentricidad es cero.

La energía específica de una órbita elíptica es negativa y se encuentra sustituyendo el momento angular y la excentricidad en la ecuación $\varepsilon = -\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{h^2}(1-e^2)$

De la Ec. 9 despejamos el momento angular h

$$a=\frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1-e^2} \rightarrow h^2=\mu\, a\,(1-e^2)$$

De modo que

$$\boxed{\varepsilon=-\frac{\mu}{2a}} \qquad \textit{Ec. 19}$$

Esto muestra que la energía específica es independiente de la excentricidad y depende sólo del semieje mayor de la elipse. Por lo tanto, para una órbita elíptica, la conservación de la energía $\frac{v^2}{2}-\frac{\mu}{r}=\varepsilon$ puede escribirse de la siguiente forma

$$\frac{v^2}{2}-\frac{\mu}{r}=-\frac{\mu}{2a} \qquad \textit{Ec. 20}$$

El área de una elipse se encuentra en términos de sus semiejes mayor y menor mediante la fórmula $A=\pi ab$ (que se reduce a la fórmula para el área de un círculo si

$a = b$). Para encontrar el período T de la órbita elíptica, empleamos la segunda ley de Kepler, $\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2}$, para obtener

$$\Delta A = \frac{h}{2}\Delta t$$

Para una revolución completa, $\Delta A = \pi ab$ y $\Delta t = T$. Por lo tanto, $\pi ab = (h/2)T$, o

$$T = \frac{2\,\pi\,a\,b}{h}$$

Sustituyendo por los valores de a y b, obtenemos

$$T = \frac{2\,\pi\,a\,b}{h} = \frac{2\,\pi\,\frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1-e^2}\,\frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1-e^2}\sqrt{1-e^2}}{h} = \frac{2\,\pi}{h}\left(\frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1-e^2}\right)^2\sqrt{1-e^2}$$

de modo que la fórmula para el período de una órbita elíptica, en términos de los parámetros orbitales h y e, se convierte en

$$T = \frac{2\,\pi}{\mu^2}\left(\frac{h}{\sqrt{1-e}}\right)^3 \qquad \textit{Ec. 21}$$

Una vez más podemos apelar a la Ec. 9 para sustituir $h = \sqrt{\mu\,a\,(1-e^2)}$ en esta ecuación, obteniendo así una expresión alternativa para el período

$$\boxed{T = \frac{2\,\pi}{\sqrt{\mu}}a^{3/2}} \qquad \textit{Ec. 22}$$

Ec. 18 materializa la tercera ley de Kepler: el período de un planeta es proporcional a las tres mitades de su semieje mayor. Esta expresión, que es idéntica a la de una órbita circular de radio a (Ec. 4), revela que, al igual que la energía, el período de una órbita elíptica es independiente de la excentricidad (Figura 5).

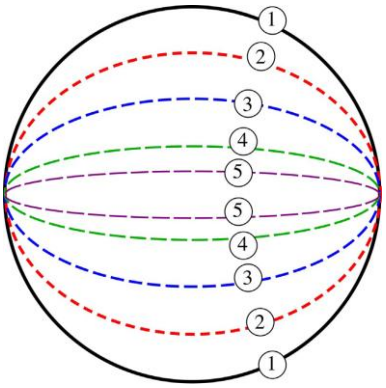


Figura 5. Dado que las cinco elipses tienen el mismo eje mayor, sus períodos y energías son idénticos.

Finalmente, observe que dividir la $r_p = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e}$ por $r_a = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1-e}$ se obtiene

$$\frac{r_p}{r_a} = \frac{1-e}{1+e}$$

Resolver esto para e da como resultado una fórmula útil para calcular la excentricidad de una órbita elíptica.

$$\boxed{e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}} \qquad \text{Ec. 23}$$

De la Figura 3 se desprende que $r_a - r_p = \overline{F'F}$ es la distancia entre los focos. Como se señaló anteriormente, $r_a + r_p = 2a$. Así, la Ec. 23 tiene la interpretación geométrica,

$$excentricidad = \frac{distancia\ entre\ focos}{longuitud\ de\ eje\ mayor}$$

Una elipse rectilínea se caracteriza por tener un momento angular cero y una excentricidad de 1. Es decir, la distancia entre los focos es igual a la longitud finita del eje mayor, a lo largo del cual se produce el movimiento relativo. Dado que sólo la longitud del semieje mayor determina la energía específica del orbital, la Ec. 19 también se aplica a elipses rectilíneas.

Para calcular la distancia promedio de m_2 a m_1 en el transcurso de una órbita completa dividimos el rango de la verdadera anomalía (2π) en n segmentos iguales $\Delta\theta$, de modo que

$$n = \frac{2\pi}{\Delta\theta}$$

Luego usamos $r = (h^2/\mu)/(1 + e\,cos\,\theta)$ para evaluar $r(\theta)$ en los n valores equidistantes de la verdadera anomalía,

$$\theta_1 = 0, \theta_2 = \Delta\theta, \theta_3 = 2\,\Delta\theta, \ldots \theta_n = (n-1)\Delta\theta$$

comenzando en el periapsis. El promedio de este conjunto de n valores de r está dado por

$$\bar{r}_\theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r(\theta_i) = \frac{\Delta\theta}{2\pi}\sum_{i=1}^{n} r(\theta_i) = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n} r(\theta_i)\,\Delta\theta \qquad \textit{Ec. 24}$$

Ahora, hagamos que n sea muy grande, de modo que $\Delta\theta$ se vuelva muy pequeño. En el límite como $n \longrightarrow \infty$, E. 24 se convierte en

$$\bar{r}_\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r(\theta)\mathrm{d}\theta \qquad \textit{Ec. 25}$$

Sustituyendo la Ec. 10 en el integrando se obtiene

$$\bar{r}_\theta = \frac{1}{2\pi}a\left(1-e^2\right)\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+e\cos\theta}$$

La integral en esta expresión se puede encontrar en tablas de integrales de las cuales obtenemos

$$\bar{r}_\theta = \frac{1}{2\pi}a\left(1-e^2\right)\left(\frac{2\pi}{\sqrt{1-e^2}}\right) = a\sqrt{1-e^2} \qquad \textit{Ec. 26}$$

Comparando este resultado con la Ec. 15 vemos que el radio orbital promediado por la anomalía verdadera es igual a la longitud del semieje menor b de la elipse. Por tanto, el semieje mayor, que es el promedio de las distancias máxima y mínima desde el foco, no es la distancia media. Dado que, a partir de la Ec. 10, $r_p = a(1-e)$ y $r_a = a(1+e)$, Ec. 26 también implica que

$$\bar{r}_\theta = \sqrt{r_p r_a}$$

La distancia media es la raíz cuadrada del producto de las distancias máxima y mínima desde el foco y no la mitad de su suma.

Ejercicio propuesto de clase

La altitud de un satélite en el perigeo es de $500\ km$ y su excentricidad orbital es de $0{,}1$. Hallar:

a) El semieje mayor a
b) La altitud del satélite en el apogeo z_a
c) La magnitud del momento angular específico de la órbita h
d) La energía mecánica específica de la órbita ε

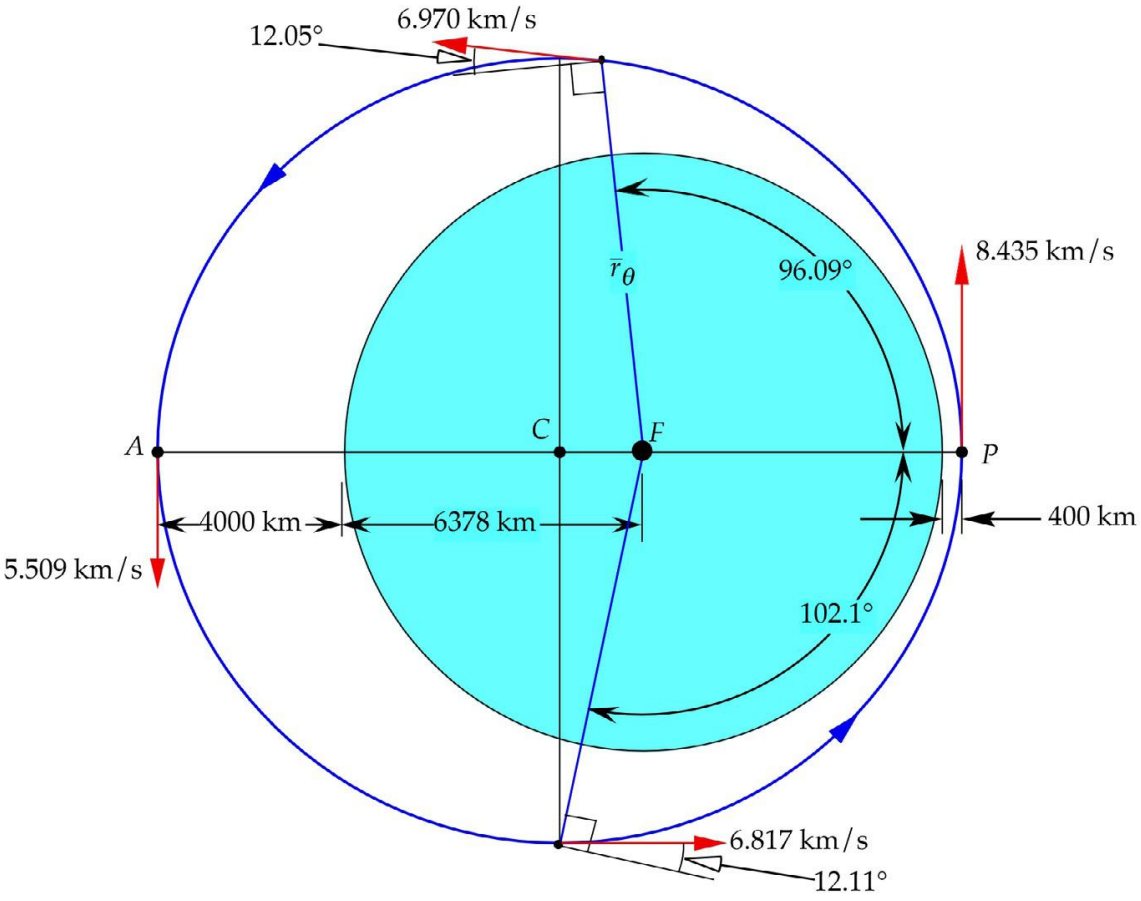
Solución

Ejemplo 2

Un satélite terrestre está en una órbita con una altitud de perigeo $z_p = 400\ km$ y una altitud de apogeo $z_a = 4000\ km$, como se muestra en la figura. Encuentre cada una de las siguientes cantidades:

a) excentricidad, e
b) momento angular, h
c) velocidad de apogeo, v_a
d) semieje mayor, a
e) período de la órbita, T
f) radio promedio de anomalía verdadera $\bar{r}_\theta$
g) verdadera anomalía cuando $r = \bar{r}_\theta$
h) velocidad del satélite cuando $r = \bar{r}_\theta$
i) ángulo de la trayectoria de vuelo γ cuando $r = \bar{r}_\theta$
j) ángulo máximo de la trayectoria de vuelo γ_{max} y la verdadera anomalía en la que ocurre.

Datos: $\mu = 398.600\ km^3/s^2$ y también que R_E, el radio de la Tierra, es $6.378\ km$.



La estrategia es siempre buscar primero los parámetros orbitales primarios (excentricidad e y momento angular h). Todo los demás los parámetros orbitales se obtienen a partir de estos dos.

Excentricidad e

La fórmula que involucra la excentricidad desconocida e así como los datos de perigeo y apogeo dados es

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$

No debemos olvidar convertir las altitudes dadas a radios:

$$r_p = R_E + z_p = 6378 + 400 = 6.778\ km$$

$$r_a = R_E + z_a = 6378 + 4000 = 10.378\ km$$

Luego

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$

$$e = \frac{10.378 - 6.778}{10.378 + 6.778}$$

$$\boxed{e = 0.2098}$$

Momento angular h

Ahora que tenemos la excentricidad, necesitamos una expresión que la contenga y el momento angular desconocido h y cualquier otro dato dado. Esta sería la fórmula de órbita

$$r = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1 + e\cos\theta}$$

Evaluada en el perigeo, es decir cuando la anomalía verdadera $\theta = 0$

$$r_p = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1 + e}$$

$$6778 = \frac{h^2}{398600}\frac{1}{1 + 0.2098}$$

$$\boxed{h = 57.172 \frac{km^2}{s}}$$

Velocidad en el perigeo v_p

El momento angular h y el radio del perigeo r_p se pueden sustituir en la fórmula del momento angular para encontrar la velocidad del perigeo v_p,

$$h = r\, v_\perp = r_p v_p \longrightarrow v_p = \frac{h}{r_p}$$

$$v_p = \frac{57.172}{6.778}$$

$$\boxed{v_p = 8.435 \frac{km}{s}}$$

Velocidad en el apogeo v_a

Dado que h es una constante, la fórmula del momento angular también se puede emplear para obtener la velocidad del apogeo v_a,

$$h = r\, v_\perp = r_a v_a \longrightarrow v_a = \frac{h}{r_a}$$

$$v_a = \frac{57.172}{10.378}$$

$$\boxed{v_a = 5.509 \frac{km}{s}}$$

Semieje mayor a

El semieje mayor es el promedio de los radios del perigeo y del apogeo.

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{10.378 + 6.778}{2}$$

$$\boxed{a = 8.578\ km}$$

Periodo orbital T

Como se ha encontrado el semieje mayor a, podemos usar la ecuación

$$T = \frac{2\,\pi}{\sqrt{\mu}}\,a^{3/2}$$

$$T = \frac{2\,\pi}{\sqrt{398.600}}8.578^{3/2}$$

$$T = 7.907\ s$$

$$\boxed{T = 2.196\ h}$$

Radio promedio de anomalía verdadera θ

$$\overline{r_\theta} = \sqrt{r_p\ r_a}$$

$$\overline{r_\theta} = \sqrt{6.778 * 10.378}$$

$$\boxed{\overline{r_\theta} = 8.387\ km}$$

Anomalía verdadera θ

Para encontrar la verdadera anomalía cuando $r = \overline{r_\theta}$, usamos la fórmula de la órbita

$$r = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1 + e\cos\theta}$$

$$\overline{r_\theta} = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1 + e\cos\theta}$$

$$8.387\ = \frac{51.172^2}{398.600}\frac{1}{1 + 0.2098\cos\theta}$$

$$\cos\theta = -0.1061$$

Esto significa que el radio promedio de la verdadera anomalía ocurre en $\theta = 96.09°$, donde el satélite pasa por $\overline{r_\theta}$ en su camino desde el perigeo, y en $\theta = 263.9°$, donde el satélite pasa por $\overline{r_\theta}$ en su camino hacia el perigeo.

Velocidad del satélite cuando $r = \overline{r_\theta}$

Para encontrar la velocidad del satélite cuando $r = \overline{r_\theta}$, lo más sencillo es utilizar la ecuación de energía para la elipse

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{\overline{r_\theta}} = -\frac{\mu}{2a}$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{398.600}{8.387} = -\frac{398.600}{2 * 8.578}$$

$$\boxed{v = 6.970 \frac{km}{s}}$$

Angulo de la trayectoria de vuelo γ cuando $r = \overline{r_\theta}$

$$\tan\gamma = \frac{e \sin\theta}{1 + e\cos\theta}$$

$$\tan\gamma = \frac{0.2098 \sin 95.06}{1 + 0.2098 \cos 96.09}$$

$$\tan\gamma = 0.2134$$

Esto significa que $\boxed{\gamma = 12.05°}$ cuando el satélite pasa por $\overline{r_\theta}$ en su camino desde el perigeo.

Angulo máximo de la trayectoria de vuelo γ_{max} y la verdadera anomalía en la que ocurre.

Para encontrar dónde γ es un máximo, debemos tomar la derivada de

$$\gamma = \tan^{-1}\frac{e \sin\theta}{1 + e\cos\theta}$$

con respecto a θ y establecer el resultado igual a cero. Usando las reglas del cálculo,

$$f(x) = arctan(x)$$
$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = \frac{1}{1 + \left(\frac{e \sin\theta}{1 + e\cos\theta}\right)^2} \frac{d}{d\theta}\left(\frac{e \sin\theta}{1 + e\cos\theta}\right) = \frac{e\,(e + \cos\theta)}{(1 + e\cos\theta)^2 + e^2 \sin^2\theta}$$

Para $e < 1$, el denominador es positivo para todos los valores de θ. Por lo tanto, $\frac{d\gamma}{d\theta} = 0$ sólo si el numerador desaparece (es decir, si $\cos\theta = -e$). Recuerde de la Ec. 14 que

esta anomalía verdadera ubica el punto final del eje menor de la elipse. Por lo tanto, el ángulo positivo máximo de la trayectoria de vuelo se produce en la verdadera anomalía,

$$\theta = \cos^{-1}(-0.2098)$$

$$\boxed{\theta = 102.1°}$$

Sustituyendo esto en $\gamma = \tan^{-1}\frac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta}$, encontramos que el valor del ángulo de la trayectoria de vuelo es

$$\gamma = \tan^{-1}\frac{0.2098\sin 102.1°}{1+0.2098\cos 102.1°}$$

$$\boxed{\gamma = 12.11°}$$

Después de alcanzar esta magnitud máxima, el ángulo de la trayectoria de vuelo comienza a disminuir constantemente hacia su valor cero en el apogeo.

Ejemplo 3

En dos puntos de una órbita geocéntrica, la altitud y la anomalía verdadera son $z_1 = 1.545\ km$, $\theta_1 = 126°$ y $z_2 = 852\ km$, $\theta_2 = 58°$, respectivamente. Encontrar

a) la excentricidad y momento angular
b) la altitud del perigeo
c) el semieje mayor
d) el período.

Excentricidad e

Antes de continuar, debemos recordar sumar el radio de la Tierra a las altitudes dadas para que estemos tratando con radios orbitales. Los radios de los dos puntos son

$$r_1 = R_E + z_1 = 6.378 + 1.545 = 7.923\ km$$

$$r_2 = R_E + z_2 = 6.378 + 852 = 7.230\ km$$

La única fórmula que tenemos que relaciona la posición orbital con los parámetros orbitales e y h es la fórmula de la órbita. Por lo que podemos plantear un sistema de ecuaciones, escribiendo la ecuación de orbita para cada uno de los dos puntos dados y de esta forma producir dos ecuaciones para e y h.

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{h^2}{\mu}\dfrac{1}{1+e\cos\theta_1} \\ r_2 = \dfrac{h^2}{\mu}\dfrac{1}{1+e\cos\theta_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7.923 = \dfrac{h^2}{398.600}\dfrac{1}{1+e\cos 126} \\ 7.230 = \dfrac{h^2}{398.600}\dfrac{1}{1+e\cos 58} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$\boxed{e = 0.08164}$$

$$\boxed{h = 54.830\,\frac{km^2}{s}}$$

Altitud de perigeo z_p

Con la excentricidad y el momento angular disponibles, podemos usar la ecuación de la órbita para obtener el radio del perigeo.

$$r_p = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e}$$

$$r_p = \frac{54.830^2}{398.600}\frac{1}{1+0.08164}$$

$$r_p = 6.974\ km$$

A partir de esto encontramos la altitud del perigeo,

$$z_p = r_p - R_E = 6.974 - 6.378$$

$$z_p = 595.5\ km$$

Semieje mayor a

El semieje mayor es el promedio de los radios de perigeo y apogeo. Acabamos de encontrar el radio del perigeo arriba en la ecuación. Por lo tanto, sólo necesitamos calcular el radio del apogeo usando la fórmula de la órbita evaluada en el apogeo.

$$r_a = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1-e}$$

$$r_a = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1-e}$$

$$r_a = \frac{54.830^2}{398.600}\frac{1}{1-0.08164}$$

$$r_a = 8.213\ km$$

Luego

$$a = \frac{r_p + r_a}{2}$$

$$a = \frac{8.213 + 6.974}{2}$$

$$\boxed{a = 7.593\ km}$$

Periodo órbita T

$$T = \frac{2\,\pi}{\sqrt{\mu}}a^{3/2}$$

$$T = \frac{2\,\pi}{\sqrt{398.600}}7593^{3/2}$$

$$T = 6585\ s$$

$$\boxed{T = 1.829\ h}$$

ÓRBITAS PARABOLICAS ($e = 1$)

Si la excentricidad es igual a 1, la fórmula de órbita queda expresada como

$$r = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1 + cos\,\theta} \qquad \textit{Ec. 27}$$

Cuando la anomalía verdadera θ se acerca a 180 grados, el denominador se acerca a cero, de modo que r tiende hacia el infinito. Según la ecuación $\varepsilon = -\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{h^2}\,(1-e^2)$ la energía de una trayectoria para la cual $e = 1$ es cero, de modo que para una trayectoria parabólica la conservación de la energía $\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \varepsilon$ es:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = 0 \qquad \text{Ec. 28}$$

En otras palabras, la velocidad en cualquier lugar de una trayectoria parabólica es

$$v = \sqrt{2\frac{\mu}{r}} \qquad \text{Ec. 29}$$

Si el cuerpo m_2 tiene una trayectoria parabólica, se desplazará hasta el infinito y llegará allí con velocidad cero en relación con m_1. No volverá. Por lo tanto, las trayectorias parabólicas se denominan trayectorias de escape. A una distancia dada r de m_1, la velocidad de escape viene dada por la Ec. 29,

$$v_{esc} = \sqrt{2\frac{\mu}{r}} \qquad \text{Ec. 30}$$

Sea v_c la velocidad de un satélite en una órbita circular de radio r. Luego, a partir de las Ecs. 2 y 30, tenemos

$$v_{esc} = \sqrt{2\, v_c} \qquad \text{Ec. 31}$$

Es decir, para escapar de una órbita circular se requiere un aumento de velocidad del $41{,}4\%$. Sin embargo, recuerde que nuestra suposición es que m_1 y m_2 son los únicos objetos en el universo. Una nave espacial lanzada desde la Tierra con una velocidad v_{esc} (relativa a la Tierra) no llegará al infinito (es decir, abandonará el sistema solar) porque eventualmente sucumbirá a la influencia gravitacional del Sol y, de hecho, terminará en la misma órbita que la Tierra.

Para la parábola, la ecuación $tan\,\gamma = \frac{e\,sin\,\theta}{1+e\,cos\,\theta}$ para el ángulo de la trayectoria de vuelo toma la forma

$$\tan\gamma = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

Usando las identidades trigonométricas

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad \cos\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$$

Podemos escribir

$$\tan\gamma = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1+2\cos^2\frac{\theta}{2}-1} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}$$

Resulta que

$$\gamma = \frac{\theta}{2} \qquad \textit{Ec. 32}$$

Es decir, en trayectorias parabólicas el ángulo de la trayectoria de vuelo es siempre la mitad de la anomalía verdadera

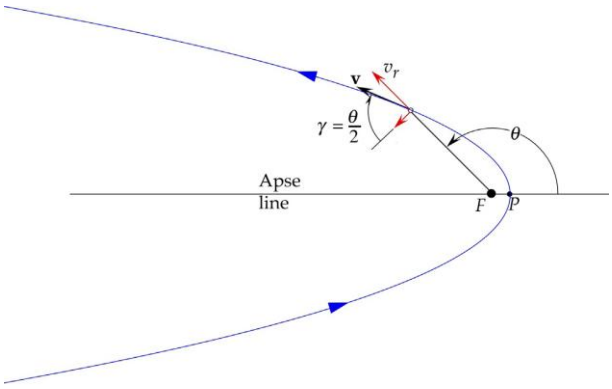


Figura 6. Trayectoria parabólica alrededor del foco F.

La ecuación $p = \frac{h^2}{\mu}$ da el parámetro p de una órbita. Sustituyamos esa expresión en la Ec. 27 y luego grafique $r = p/(1 + cos\,\theta)$ en un sistema de coordenadas cartesiano centrado en el foco, como se ilustra en la Figura 7.

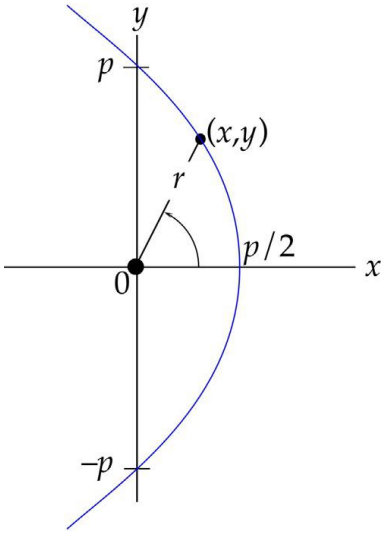


Figura 7. Parábola con foco en el origen del sistema de coordenadas cartesiano.

De la figura se desprende claramente que

$$x = r\cos\theta = p\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta} \qquad y = r\sin\theta = p\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \qquad \textit{Ec. 33}$$

Luego

$$\frac{x}{p/2} + \left(\frac{y}{p}\right)^2 = 2\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta} + \frac{\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^2} \qquad \textit{Ec. 34}$$

Trabajando para simplificar el lado derecho, obtenemos

$$x = \frac{p}{2} - \frac{y^2}{2p} \qquad \textit{Ec. 35}$$

Esta es la ecuación de una parábola en un sistema de coordenadas cartesiano cuyo origen sirve como foco.

Ejemplo 1

El radio del perigeo de un satélite en una trayectoria geocéntrica parabólica de la Figura 8 es de $7.000\ km$. Encuentre la distancia d entre los puntos P_1 y P_2 de la órbita, que están a $8.000\ km$ y $16.000\ km$, respectivamente, del centro de la Tierra.

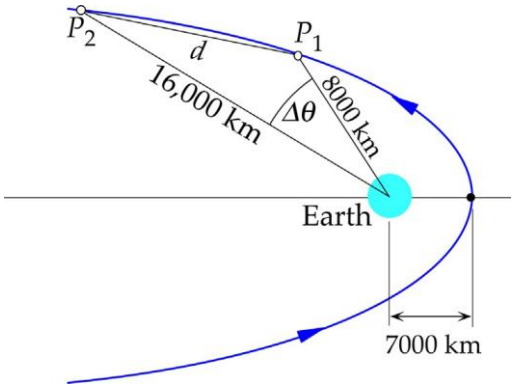


Figura 8. Trayectoria geocéntrica parabólica.

Solución

Este sería un problema de trigonometría simple si conociéramos el ángulo $\Delta\theta$ entre los radiales de P_1 y P_2. Podemos encontrar ese ángulo determinando primero las verdaderas anomalías de los dos puntos. Las verdaderas anomalías se obtienen a partir de la fórmula de la órbita, $r = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+\cos\theta}$, una vez determinado el momento angular h.

Calculamos el momento angular del satélite evaluando la ecuación de la órbita en el perigeo,

$$r_p = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+\cos 0} = \frac{h^2}{2\,\mu}$$

a partir del cual

$$h = \sqrt{2\,\mu\,r_p} = \sqrt{2 * 398.600 * 7.000} = 74.700\,\frac{km^2}{s}$$

Sustituyendo los radios y las verdaderas anomalías de los puntos P_1 y P_2 en la ecuación de órbita parabólica, obtenemos

$$8.000 = \frac{74.700^2}{398.600}\,\frac{1}{1 + cos\,\theta_1} \longrightarrow cos\,\theta_1 = 0.75 \rightarrow \theta_1 = 41{,}41°$$

$$16.000 = \frac{74.700^2}{398.600}\,\frac{1}{1 + cos\,\theta_2} \longrightarrow cos\,\theta_2 = -0.125 \rightarrow \theta_2 = 97{,}18°$$

La diferencia entre los dos ángulos θ_1 y θ_2 es $\Delta\theta = 97{,}18 - 41{,}41 = 55{,}78°$.

La longitud de la cuerda $\overline{P_1P_2}$ ahora se puede encontrar usando la ley de los cosenos de trigonometría,

$$d^2 = 8.000^2 + 16.000^2 - 2 \cdot 8.000 \cdot 16.000 \cos \Delta\theta$$

$$d = 13.270\ km$$

Ejercicio propuesto en clase

Una sonda espacial que órbita alrededor de la Tierra describe una órbita circular de 25.000 km. El siguiente paso en su viaje a Júpiter consiste en impulsarla para que pueda entrar en una órbita de escape.

1. Determina la velocidad de la sonda en esta órbita circular.
2. Determina la velocidad mínima necesaria para entrar en una trayectoria parabólica con ese radio.
3. Determinar la diferencia en las energías cinética, potencial y mecánica específicas entre las dos órbitas.

Solución

ÓRBITAS HIPERBOLICAS ($e > 1$)

Si la excentricidad es mayor a 1, la fórmula de órbita queda expresada como

$$r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e\cos\theta} \qquad \text{Ec. 36}$$

describe la geometría de la hipérbola que se muestra en la Figura 8. El sistema consta de dos curvas simétricas. El cuerpo en órbita ocupa uno de ellos. La otra es su imagen matemática vacía.

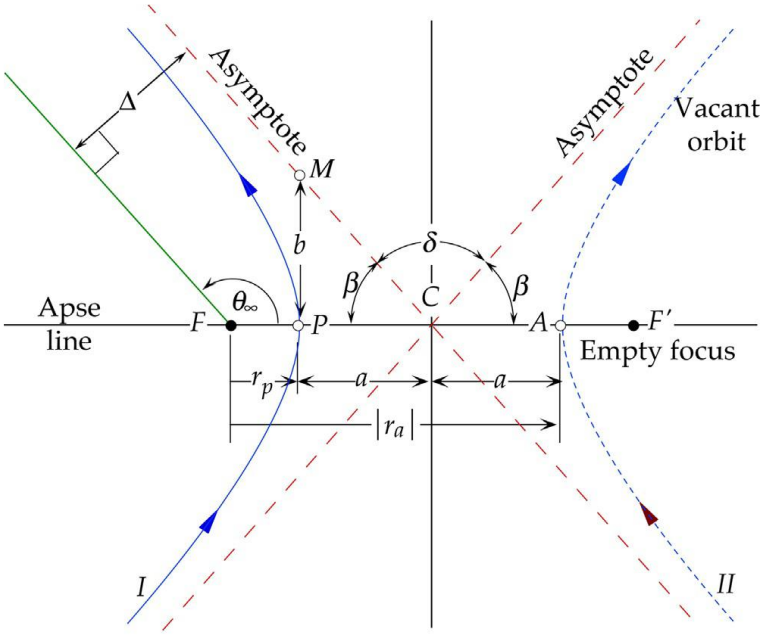


Figura 9. Trayectoria hiperbólica.

Claramente, el denominador de la Ec. 36 tiende a cero cuando $\cos\theta = 1/e$. Denotamos este valor de verdadera anomalía como

$$\theta_\infty = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{e}\right) \qquad \text{Ec. 37}$$

ya que la distancia radial se acerca al infinito a medida que la anomalía verdadera se acerca a θ_∞. θ_∞ se conoce como la anomalía verdadera de la asíntota. Observe que θ_∞ se encuentra entre $90°$ y $180°$. De la identidad trigonométrica $sin^2\theta_\infty + cos^2\theta_\infty = 1$ se deduce que

$$\sin\theta_\infty = \sqrt{\frac{e^2 - 1}{e}} \qquad \text{Ec. 38}$$

Para $-\theta_\infty < \theta < \theta_\infty$, la trayectoria física es la hipérbola ocupada I que se muestra a la izquierda en la Figura 9. Para $\theta_\infty < \theta < (360° - \theta_\infty)$, se traza la hipérbola II, la órbita vacía alrededor del foco vacío F'. (La órbita vacía es físicamente imposible, porque requeriría una fuerza gravitacional repulsiva). La periapsis P se encuentra en la línea del ábside de la hipérbola física I, mientras que la apoapsis A se encuentra en la línea del ábside de la órbita vacía. El punto medio entre periapsis y apoapsis es el centro C de la hipérbola. Las asíntotas de la hipérbola son las líneas rectas hacia las que tienden las curvas cuando se acercan al infinito. Las asíntotas se cortan en C, formando un ángulo agudo β con la línea del ábside, donde $\beta = 180° - \theta_\infty$. Por lo tanto, $cos\beta = -cos\,\theta_\infty$, lo que significa

$$\beta = \cos^1(1/e) \qquad \textit{Ec. 39}$$

El ángulo δ entre las asíntotas se llama ángulo de giro. Este es el ángulo a través del cual el vector de velocidad del cuerpo en órbita gira cuando rodea el cuerpo que se atrae en F y regresa hacia el infinito. De la figura vemos que $\delta = 180° - 2\beta$, de modo que

$$\sin\frac{\delta}{2} = \sin\left(\frac{180° - 2\beta}{2}\right) = \sin(90° - \beta) = \cos\beta \overset{Ec.39}{=} \frac{1}{e}$$

O

$$\delta = 2\,sin^{-1}(1/e) \qquad \textit{Ec. 40}$$

La distancia r_p desde el foco F hasta el periapsis,

$$r_p = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e} \qquad \textit{Ec. 41}$$

Al igual que para una elipse, la coordenada radial r_a de la apoapsis se encuentra estableciendo $\theta = 180°$ en la ecuación

$$r_a = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1-e} \qquad \textit{Ec. 42}$$

Observe que r_a es negativo, ya que $e > 1$ para la hipérbola. Esto significa que la apoapsis se encuentra a la derecha del foco F.

En la Figura 9 vemos que la distancia $2a$ desde la periapsis P hasta la apoapsis A es

$$2a = |r_a| - r_p = -r_a - r_p$$

$$2a = -\frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e} - \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1-e}$$

$$2a = -\frac{h^2}{\mu}\left(\frac{1}{1+e} + \frac{1}{1-e}\right)$$

$$2a = -\frac{h^2}{\mu}\left(\frac{1-e+1+e}{(1+e)(1-e)}\right)$$

$$2a = -\frac{h^2}{\mu}\left(\frac{2}{1-e^2}\right)$$

$$2a = -2\frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1-e^2}$$

De esto se deduce que a, el semieje mayor de la hipérbola está dado por una expresión casi idéntica a la de una elipse Ec. 10

$$a = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{e^2-1} \qquad \textit{Ec. 43}$$

Por lo tanto, la ecuación de órbita Ec. 36 puede escribirse para la hipérbola

$$r = a\,\frac{e^2-1}{1 + e\cos\theta} \qquad \textit{Ec. 44}$$

Esta fórmula es análoga a la Ec. 10 para la órbita elíptica. Además, a partir de la Ec. 44 se sigue que

$$r_p = a\,(e-1) \qquad \textit{Ec. 45}$$

$$r_a = -a\,(e+1) \qquad \textit{Ec. 46}$$

La distancia b desde el periapsis hasta una asíntota, medida perpendicular a la línea del ábside, es el semieje menor de la hipérbola. En la Figura 9, vemos que la longitud b del semieje menor $\overline{PM}$ es

$$b = a\tan\beta = a\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = a\frac{\sin(180° - \theta_\infty)}{\cos(180° - \theta_\infty)} = a\,\frac{\sin\theta_\infty}{-\cos\theta_\infty} = a\frac{\frac{\sqrt{e^2-1}}{e}}{-\left(-\frac{1}{e}\right)}$$

de modo que para la hipérbola

$$b = a\sqrt{e^2 - 1} \qquad \textit{Ec. 47}$$

Esta relación es análoga a la Ec. 15 para el semieje menor de una elipse.

La distancia Δ entre la asíntota y una línea paralela que pasa por el foco se llama radio de apuntamiento, que se ilustra en la Figura 9. De esta figura vemos que

$$\begin{aligned} \Delta &= (r_p + a)\sin\beta \\ &= a\,e\sin\beta && \textit{(Ec.45)} \\ &= a\,e\frac{\sqrt{e^2-1}}{e} && \textit{(Ec.39)} \\ &= a\,e\sin\theta && \textit{(Ec.38)} \\ a\,e\ \sin&\sqrt{1-\cos^2\theta_\infty} && \text{(identidad trigonométrica)} \\ a\,e&\sqrt{1-\frac{1}{e^2}} && \text{(Ec. 37)} \end{aligned}$$

O

$$\Delta = a\sqrt{e^2 - 1} \qquad \textit{Ec. 48}$$

Comparando este resultado con la Ec. 47, está claro que el radio de apuntamiento es igual a la longitud del semieje menor de la hipérbola.

Al igual que con la elipse y la parábola, podemos expresar la forma polar de la ecuación de la hipérbola en un sistema de coordenadas cartesiano cuyo origen está en este caso a medio camino entre los dos focos, como se ilustra en la Figura 10.

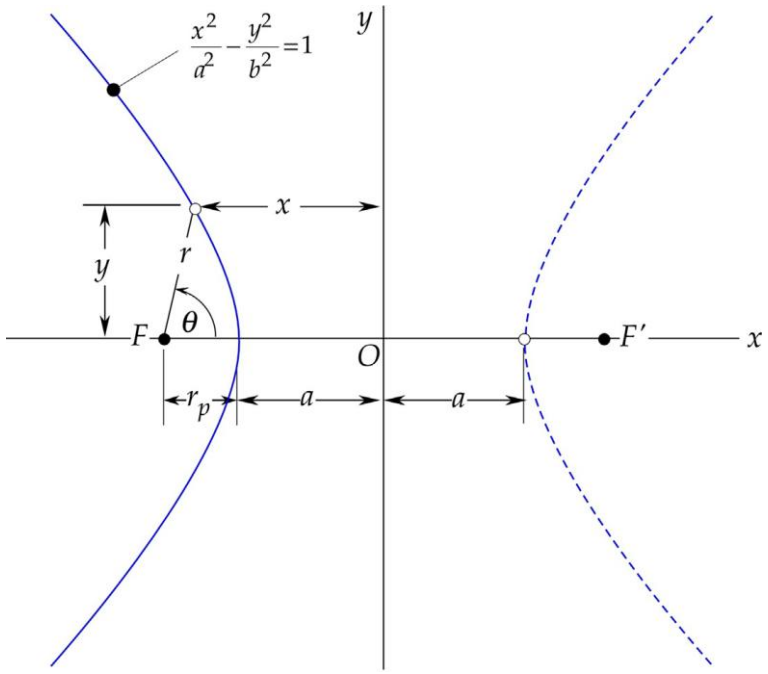


Figura 10. Gráfico de la Ec. 44 en un sistema de coordenadas cartesiano con origen O a medio camino entre los dos focos.

De la figura se desprende que

$$x = -a - r_p + r\cos\theta \qquad \text{Ec. 49}$$

$$y = r\sin\theta \qquad \text{Ec. 50}$$

Usando las Ec. 44 y Ec. 45 en la Ec. 49, obtenemos

$$x = -a - a(e-1) + a\frac{e^2-a}{1+e\cos\theta}\cos\theta = -a\,\frac{e+\cos\theta}{1+e\cos\theta}$$

Sustituyendo las Ec. 44 y Ec.47 en la Ec. 50 obtenemos

$$y = \frac{b}{\sqrt{e^2-1}}\,\frac{e^2-\frac{b}{\sqrt{e^2-1}}}{1+e\cos\theta}\sin\theta = b\,\frac{\sqrt{e^2-1}}{1+e\cos\theta}$$

Resulta que

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{e+\cos\theta}{1+e\cos\theta}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{e^2-1}}{1+e\cos\theta}\right)^2$$

$$= \frac{e^2+2\,e\cos\theta+\cos^2\theta-(e^2-1)(1-\cos^2\theta)}{(1+e\cos\theta)^2}$$

$$= \frac{1 + 2\,e\cos\theta + e^2\cos^2\theta}{(1 + e\cos\theta)^2}$$

$$= \frac{(1 + e\cos\theta)^2}{(1 + e\cos\theta)^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \textit{Ec. 51}$$

Ésta es la ecuación familiar de una hipérbola que es simétrica con respecto a los ejes x e y, con intersecciones en el eje x.

En cuanto a la ecuación de energía $\varepsilon = -\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{h^2}(1 - e^2)$ usando la Ec. 43

$$\varepsilon = \frac{\mu}{2\,a} \qquad \textit{Ec. 52}$$

La energía específica de una órbita hiperbólica es claramente positiva e independiente de la excentricidad. La conservación de la energía para una trayectoria hiperbólica es

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{\mu}{2a} \qquad \textit{Ec. 53}$$

Sea v_∞ la velocidad con la que un cuerpo en una trayectoria hiperbólica llega al infinito. Según la Ec. 53

$$v_\infty = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \qquad \textit{Ec. 54}$$

v_∞ se llama exceso de velocidad hiperbólica. En términos de v_∞ podemos escribir la Ec. 53 como

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{v_\infty^2}{2} \qquad \textit{Ec. 55}$$

Sustituyendo la expresión para velocidad de escape, $v_{esc} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$ (Ec. 30), obtenemos para una trayectoria hiperbólica

$$v^2 = v_{esc}^2 + v_\infty^2 \qquad \textit{Ec. 56}$$

Esta ecuación muestra claramente que el exceso de velocidad hiperbólica v_∞ representa el exceso de energía cinética sobre la que se requiere para simplemente escapar del

centro de atracción. El cuadrado de v_∞ se denota C_3 y se conoce como energía característica.

$$C_3 = v_\infty^2 \qquad \text{Ec. 57}$$

C_3 es una medida de la energía requerida para una misión interplanetaria, y C_3 también es una medida de la energía máxima que un vehículo de lanzamiento puede impartir a una nave espacial de una masa determinada. Obviamente, para coincidir con un vehículo de lanzamiento con una misión, $C_{3_{vehiculo\ de\ lanzamiento}} > C_3_{mision}$

Tenga en cuenta que el exceso de velocidad hiperbólica también se puede obtener de las Ec 38 y la velocidad radial $v_r = \frac{\mu}{h} e \sin\theta$

$$v_\infty = \frac{\mu}{h} e \sin\theta = \frac{\mu}{h}\sqrt{e^2 - 1} \qquad \text{Ec. 58}$$

Finalmente, con fines de comparación, la Figura 11 muestra una variedad de trayectorias, desde un círculo hasta hipérbolas, todas con un foco y periapsis comunes. La parábola es la demarcación entre las órbitas cerradas de energía negativa (elipses) y las órbitas abiertas de energía positiva (hipérbolas).

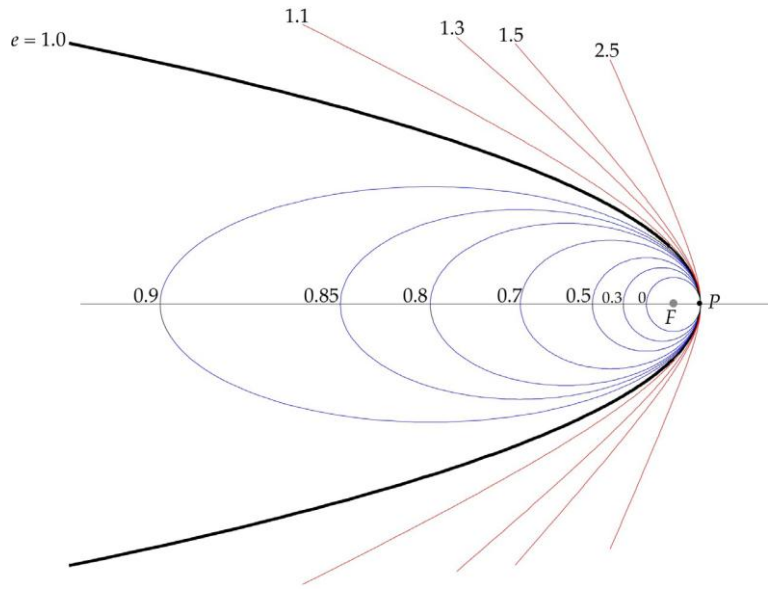
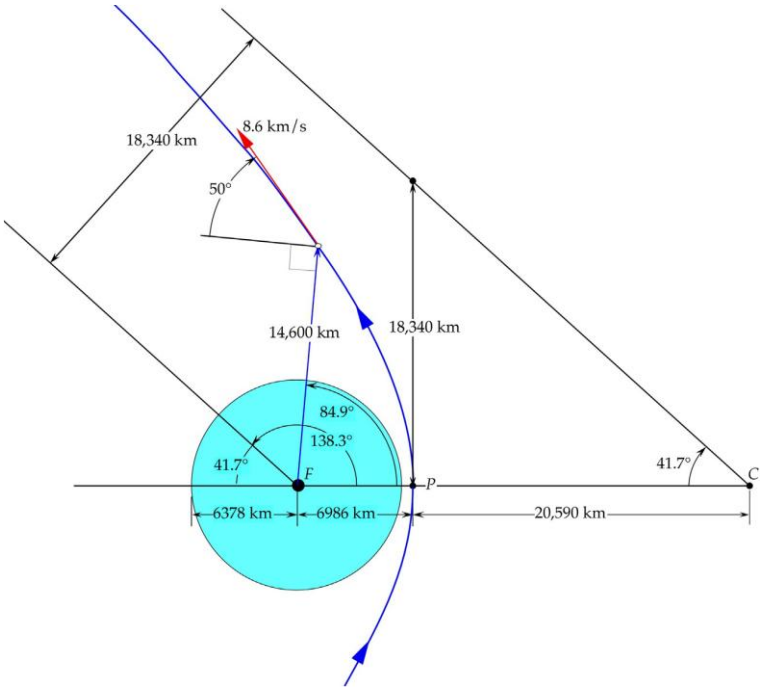


Figura 11. Órbitas de diversas excentricidades, que tienen un foco común F y periapsis P.

Ejemplo 1

En un punto dado de la trayectoria geocéntrica de una nave espacial, el radio es de 14.600 km, la velocidad es de 8,6 km/s y el ángulo de la trayectoria de vuelo es de 50°. Demuestre que la trayectoria es una hipérbola y calcule lo siguiente:

a) momento angular
b) excentricidad
c) verdadera anomalía
d) radio del perigeo
e) semieje mayor
f) C_3
g) ángulo de giro
h) radio de puntería



Dado que tanto el radio como la velocidad están dados, podemos determinar el tipo de trayectoria comparando la velocidad con la velocidad de escape (de una trayectoria parabólica) en el radio dado:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 398600}{14600}} = 7{,}389\ km/s$$

La velocidad de escape es menor que la velocidad de la nave espacial de $8{,}6\ km/s$, lo que significa que el camino es una hipérbola.

Momento angular

Antes de embarcarse en la búsqueda de los datos orbitales necesarios, recuerde que todo depende de los parámetros orbitales primarios, el momento angular h y la excentricidad e. Estas se encuentran entre la lista de cinco incógnitas para este

problema: $h, e, \theta, v_r \; y \; v_\perp$. Tenemos cinco ecuaciones que involucran estas cinco cantidades y los datos dados:

$$r = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1 + e\cos\theta} \qquad a$$

$$v_r = \frac{\mu}{h} e \sin\theta \qquad b$$

$$v_\perp = \frac{h}{\mu} \qquad c$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\perp^2} \qquad d$$

$$\tan\gamma = \frac{v_r}{v_\perp} \qquad e$$

De la ecuación e

$$\tan\gamma = \frac{v_r}{v_\perp} \rightarrow v_r = v_\perp \tan 50° \rightarrow v_r = 1{,}1918\, v_\perp$$

Sustituyendo esto y la velocidad dada en la ecuación d obtenemos

$$v^2 = v_r^2 + v_\perp^2 \rightarrow 8{,}6^2 = (1{,}1918\, v_\perp)^2 + v_\perp^2 \rightarrow v_\perp = 5{,}528\frac{km}{s}$$

El momento angular ahora se puede encontrar a partir de la ecuación c

$$h = 14.600 \cdot 5{,}528 = 80.708\frac{km^2}{s}$$

Excentricidad

Sustituyendo $v_\perp$ en la ecuación de v_r obtenemos el componente de velocidad radial,

$$v_r = 1{,}1918\, v_\perp \rightarrow \; v_r = 1{,}1918 \cdot 5{,}528 = 6{,}588\frac{km}{s}$$

Sustituyendo h y v_r, en la ecuación b

$$v_r = \frac{\mu}{h} e \sin\theta \rightarrow 6{,}588 = \frac{398.600}{80.708} e \sin\theta \rightarrow e\sin\theta = 1{,}3339$$

Sustituyendo h y r, en la ecuación a

$$r = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1 + e\cos\theta} \rightarrow 14.600 = \frac{80.708^2}{398.600}\frac{1}{1 + e\cos\theta} \rightarrow e\cos\theta = 0{,}1193$$

Al elevar al cuadrado las expresiones y luego sumándolos, obtenemos la excentricidad,

$$(e\sin\theta)^2 + (e\cos\theta)^2 = 0{,}1193^2 + 1{,}3339^2$$

$$e^2 = 1{,}7936$$

$$e = 1{,}3393$$

Anomalía verdadera

Sustituimos e en la una de las ecuaciones anteriores

$$e\cos\theta = 0{,}1193 \rightarrow\ 1{,}3393\cos\theta = 0{,}1193 \rightarrow \theta = 84{,}889°\ o\ \theta = 275{,}11°$$

Elegimos el menor de los ángulos porque las $e\cos\theta = 0{,}1193$ y $e\sin\theta = 1{,}3339$ implican que tanto $sen\,\theta$ como $cos\,\theta$ son positivos, lo que significa que θ se encuentra en el primer cuadrante ($\theta \leq 90°$). Alternativamente, podemos observar que el ángulo de trayectoria de vuelo dado ($50°$) es positivo, lo que significa que la nave espacial está volando lejos del perigeo, por lo que la anomalía verdadera debe ser inferior a $180°$. En cualquier caso, la anomalía verdadera viene dada por $\theta = 84{,}889°$.

Radio de perigeo

Usando la ecuación a

$$r_p = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1 + e\cos 0} = \frac{80.710^2}{398.600}\frac{1}{1 + 1{,}339} = 6.986\ km$$

Semieje mayor

El semieje mayor de la hipérbola se encuentra en la Ec 43

$$a = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{e^2 - 1} = \frac{80.710^2}{398.600}\frac{1}{1{,}339^2 - 1} = 20.590\ km$$

C_3

El exceso de velocidad hiperbólica se encuentra usando la Ec. 56

$$v^2 = v_{esc}^2 + v_\infty^2 \rightarrow\ v_\infty^2 = v^2 - v_{esc}^2 = 8{,}6^2 - 7{,}389^2 = 19{,}36\frac{km^2}{s^2}$$

De la Ec. 57 resulta que

$$C_3 = v_\infty^2 = 19{,}36\frac{km^2}{s^2}$$

Angulo de giro

La fórmula para el ángulo de giro es la Ec. 40 de donde

$$\delta = 2\,sin^1(1/e) = 2\,sin^1(1/1{,}339) = 96{,}60°$$

Radio de puntería

Según la Ec. 48, el radio de puntería es

$$\Delta = a\sqrt{e^2 - 1} = 20.590\sqrt{1{,}339^2 - 1} = 18.340\ km$$

Ejercicio propuesto de clase

Una nave espacial es lanzada desde una órbita de estacionamiento alrededor de la Tierra hacia Marte.

Dado:

$$v_\infty = 2.94\frac{km}{s}$$

$$R_{parking} = 6697\ km\ (circular)$$

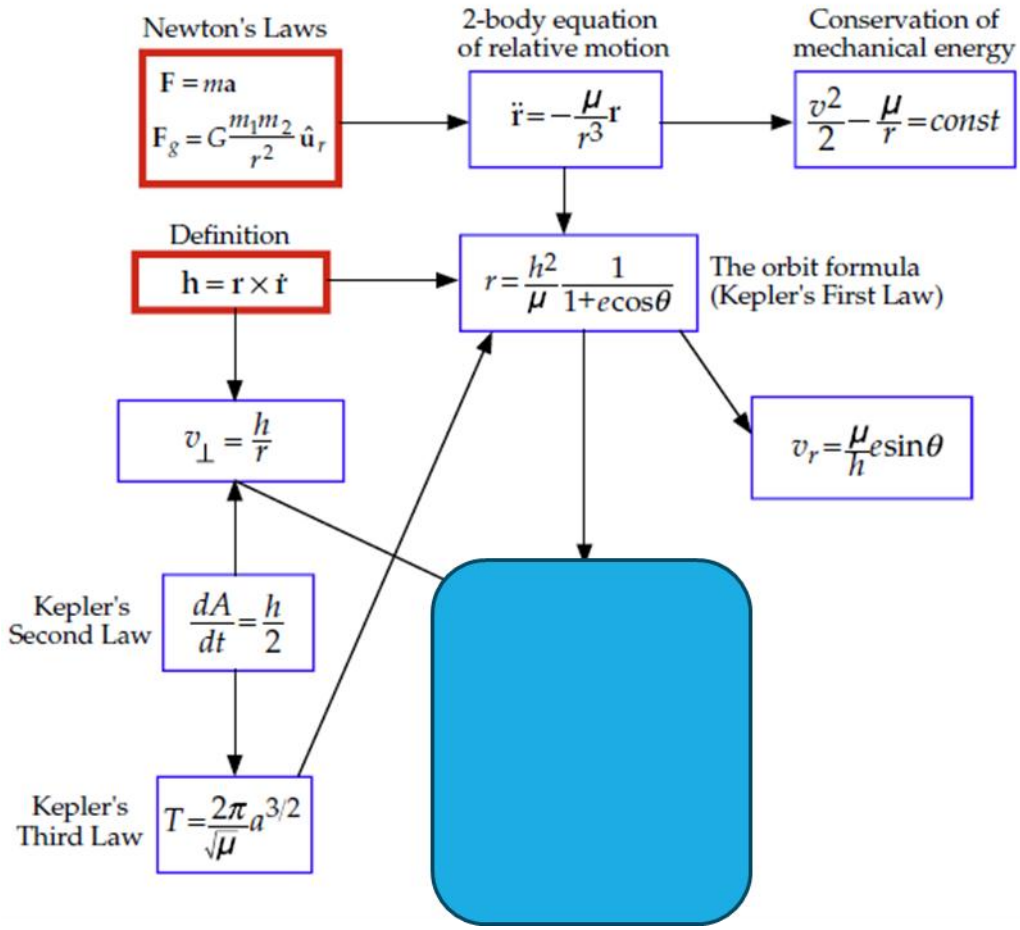
Encontrar

1. Energía necesaria en el borde de la esfera de influencia de la Tierra
2. La velocidad necearía en la órbita de estacionamiento para alcanzar la velocidad necesaria en el borde de la esfera de influencia de la tierra
3. El impulso necesario para llevar la nave desde su orbita de estacionamiento a la trayectoria de salida hiperbólica

Solución

RESUMEN DE FORMULA MAS USADAS

Mapa conceptual



Todas las órbitas

$$h = r\, v_\perp$$

$$r = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1 + e\cos\theta}$$

$$v_r = \frac{\mu}{h} e \sin\theta$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\perp^2}$$

$$\tan\gamma = \frac{v_r}{v_\perp}$$

Órbita Circular ($e = 0$)

$$r = \frac{h^2}{\mu}$$

$$v_c = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} r^{\frac{3}{2}}$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{h^2}$$

$$z_{GEO} = 35\,786\ km$$

$$v_{GEO} = 3.075\frac{km}{s}$$

$$\phi_{GEO} = 81{,}30°$$

Órbitas Elíptica ($0 < e < 1$)

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1 - e^2}$$

$$h = \sqrt{\mu\, a\, (1 - e^2)}$$

$$r = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1 + e\cos\theta} = a\frac{1 - e^2}{1 + e\cos\theta}$$

$$\mathrm{b} = a\sqrt{1 - e^2}$$

$$\epsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{\mu}{2a}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2}$$

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$

Órbita Parabólica ($e = 1$)

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = 0$$

$$v_{esc} = \sqrt{2\, v_c} = \sqrt{\frac{2\,\mu}{r}}$$

$$r = \frac{h^2}{\mu}\ \frac{1}{1 + cos\,\theta}$$

Órbita Hiperbólica ($e > 1$)

$$\theta_\infty = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{e}\right)$$

$$\delta = 2\,sin^{-1}\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$\Delta = a\sqrt{e^2 - 1}$$

$$a = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{e^2 - 1}$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{\mu}{2a}$$

Notar que estas dos últimas ecuaciones pueden reescribirse como sigue (donde a es positivo),

$$-a = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1 - e^2}$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2(-a)}$$

Es decir, si suponemos que el semieje mayor de una hipérbola tiene un valor negativo, entonces la fórmula del semieje mayor y la ecuación de energía se vuelven idénticas para elipses e hipérbolas. No hay ninguna ventaja en este punto en exigir que las hipérbolas tengan semiejes mayores negativos. Sin embargo, será necesario hacerlo para la formulación de la variable universal que se presentará en próximas unidades.