Clase 2 – El problema de los dos cuerpos

2.1 - Leyes de Newton del movimiento


AXIOMATA
SIVE
LEGES MOTUS

Las leyes de Newton, también conocidas como leyes del movimiento de Newton, son tres principios a partir de los cuales se explican una gran parte de los problemas planteados en mecánica clásica, en particular aquellos relativos al movimiento de los cuerpos, que revolucionaron los conceptos básicos de la física y el movimiento de los cuerpos en el universo.

> *"Constituyen los cimientos no sólo de la dinámica clásica sino también de la física clásica en general. Aunque incluyen ciertas definiciones y en cierto sentido pueden verse como axiomas, Newton afirmó que estaban basadas en observaciones y experimentos cuantitativos; ciertamente no pueden derivarse a partir de otras relaciones más básicas. La demostración de su validez radica en sus predicciones... La validez de esas predicciones fue verificada en todos y cada uno de los casos durante más de dos siglos"*

En concreto, la relevancia de estas leyes radica en dos aspectos: por un lado constituyen, junto con la transformación de Galileo, las bases de la mecánica clásica, y por otro, al combinar estas leyes con la ley de la gravitación universal, se pueden deducir y explicar las leyes de Kepler sobre el movimiento planetario. Así, las leyes de Newton permiten explicar, por ejemplo, tanto el movimiento de los astros como los movimientos de los proyectiles artificiales creados por el ser humano y toda la mecánica de funcionamiento de las máquinas. Su formulación matemática fue publicada por Isaac Newton en 1687 en su obra *Philosophiæ naturalis principia mathematica*.

La dinámica de Newton, también conocida como dinámica clásica, solo se cumple en ***los sistemas de referencia inerciales*** (que se mueven a velocidad constante; la Tierra, aunque gire y rote, se trata como tal a efectos de muchos experimentos prácticos). Solo es aplicable a cuerpos cuya velocidad dista considerablemente de la velocidad de la luz; cuando la velocidad del cuerpo se va aproximando a los 300 000 km/s (lo que ocurriría en los sistemas de referencia no-inerciales) aparecen una serie de fenómenos denominados efectos relativistas. El estudio de estos efectos (contracción de la longitud, por ejemplo) corresponde a la teoría de la relatividad especial, enunciada por Albert Einstein en 1905.

2.1.1 - Primera ley de Newton de Ley de inercia

La primera ley del movimiento rebate la idea aristotélica de que un cuerpo solo puede mantenerse en movimiento si se le aplica una fuerza. Newton expone que:

> *"Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo a no ser que sea obligado a cambiar su estado por fuerzas impresas sobre él"*

2.1.2 – Segunda ley de Newton o Ley de Fuerza

Originalmente, la segunda ley de Newton expresa que:

> *"El cambio de movimiento es directamente proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime"*

$$F = m \, . \, a$$

$$\vec{F} = m \, . \, \vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

La aceleración es siempre inercial

2.1.3 – Tercera ley de Newton o Ley de acción y reacción

La tercera ley de Newton establece que siempre que un objeto ejerce una fuerza sobre un segundo objeto, este último ejerce una fuerza sobre el primero de igual magnitud y dirección, pero en sentido opuesto. Con frecuencia se enuncia así: a cada acción siempre se opone una reacción igual, pero de sentido contrario. En cualquier interacción hay un par de fuerzas de acción y reacción situadas en la misma dirección con igual magnitud y sentidos opuestos. La formulación original de Newton es:

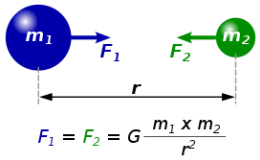
> *"Con toda acción ocurre siempre una reacción igual y contraria: quiere decir que las acciones mutuas de dos cuerpos siempre son iguales y dirigidas en sentido opuesto"*

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

2.2 - Ley de Newton de la gravitación universal

La ley de gravitación universal es una ley en la mecánica clásica que describe la fuerza o interacción gravitatoria entre distintos cuerpos con masa, fue formulada por Isaac Newton en su libro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, publicado el 5 de julio de 1687, donde establece por primera vez una relación proporcional de la fuerza con que se atraen dos objetos con masa.

Así, Newton dedujo que la fuerza con que se atraen dos cuerpos tenía que ser proporcional al producto de sus masas dividido por la distancia entre ellos al cuadrado. Para grandes distancias de separación entre cuerpos se observa que dicha fuerza actúa de manera muy aproximada como si toda la masa de cada uno de los cuerpos estuviese concentrada únicamente en su centro de gravedad, es decir, es como si dichos objetos fuesen únicamente un punto, lo cual permite reducir enormemente la complejidad de las interacciones entre cuerpos complejos.



Así, con todo esto resulta que la ley de la gravitación universal predice que la fuerza ejercida entre dos cuerpos de masas separados una distancia es igual al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, es decir:

$$\vec{F}_{21} = -\frac{G.m_{1.}m_2}{|r|^3}\,\vec{r}_{21}$$

$$\vec{F}_{12} = +\frac{G.m_{1.}m_2}{|r|^3}\,\vec{r}_{12}$$

Donde $G = 6.6732\ x\ 10^{-11}\ \frac{N.m^2}{Kg^2}$

2.3 - El problema de los dos cuerpos

El llamado "problema de los dos cuerpos" es una situación teórica, que no existe en la práctica, en la cual suponemos qué tenemos dos masas que se atreven mutuamente. En nuestro caso, asumimos que una de esas dos masas es un planeta o un cuerpo primario gravitacional y la segunda masa es, por ejemplo, una nave espacial o un satélite orbitando alrededor de la primera.

En la práctica esta situación no existe porque la influencia del sol con su gran masa, la Luna, la influencia gravitacional del resto de los planetas del sistema solar "tiran y empujan" al satélite, por eso mismo analizamos sólo un cuerpo principal y un satélite orbitando.

2.3.1 – Ecuación del movimiento de un cuerpo relativa al planeta

$$\vec{r} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$$

Donde $\vec{r}$ es la posición relativa de m_2 con respecto a m_1

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}}_2 - \ddot{\vec{R}}_1$$

$$\cancel{m}_1.\ddot{\vec{R}}_1 = \vec{F}_{12} = +\frac{G.\cancel{m}_1.m_2.\vec{r}}{|r|^3} = +\frac{G.\cancel{m}_1.m_2.\vec{r}}{r^3}$$

$$\cancel{m}_2.\ddot{\vec{R}}_2 = \vec{F}_{21} = -\frac{G.m_1.\cancel{m}_2.\vec{r}}{|r|^3} = -\frac{G.m_1.\cancel{m}_2.\vec{r}}{r^3}$$

Donde $|r| = r$

$$\ddot{\vec{R}}_1 = +\frac{G.m_2.\vec{r}}{r^3}$$

$$\ddot{\vec{R}}_2 = -\frac{G.m_1.\vec{r}}{r^3}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}}_2 - \ddot{\vec{R}}_1 = -\frac{G.m_1.\vec{r}}{r^3} - \frac{G.m_2.\vec{r}}{r^3} = -\frac{G.(m_1+m_2).\vec{r}}{r^3}$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G.(m_1+m_2).\vec{r}}{r^3}$$

La expresión anterior es válida para $m_1 \cong m_2$

Si en cambio $m_1 = planeta\ y\ m_2 = satélite$

$$m_1 + m_2 \cong m_1$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G.m_1}{r^3}\vec{r}$$

La aceleración del satélite con respecto al planeta no depende de la masa del satélite, esta es una situación muy particular y la razón para esto es que la relación de masas involucradas es muy grande.

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r}$$

Nota del profesor: Esta es la ecuación del movimiento de dos cuerpos, si al final del curso solo recuerdan esta ecuación, ¡seré muy feliz!

μ es más fácil de medir en forma precisa que G

μ es una constante para cada planeta, en la tabla se muestra μ para los planetas de nuestro sistema solar:

Planeta	$\mu \quad [\frac{N.m^2}{Kg^2}]$
Mercurio	$8.510571820\ x\ 10^{-15}$
Venus	$6.839517717\ x\ 10^{-14}$
Tierra	$6.672921527\ x\ 10^{-11}$
Marte	$8.504776526\ x\ 10^{-12}$
Júpiter	$5.382814658\ x\ 10^{-12}$
Saturno	$6.822277513\ x\ 10^{-13}$

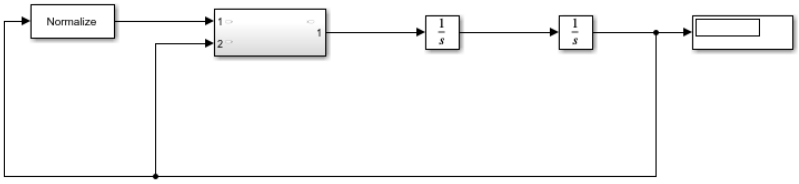
La ecuación del movimiento de los dos cuerpos nos permite predecir o calcular cuál es la aceleración inercial que experimenta un cuerpo, por ejemplo, un satélite en función de un tiempo dado. Dónde estaría el satélite con respecto al planeta a través del vector posición $\vec{r}$ y la distancia escalar r.

Una vez calculada la aceleración podemos integrar ese valor en un paso del tiempo del proceso para obtener la velocidad en la órbita. Integrando nuevamente podemos obtener la posición del objeto en cada intervalo de la órbita,

Esta simple ecuación del movimiento de dos cuerpos nos permite describir completamente una órbita. En términos de Matlab o Simulink tenemos un script principal que describe el proceso para calcular la aceleración basado en el vector posición actual y la distancia con respecto al planeta para ese paso del

tiempo, para esto se necesita integrar una señal una vez para obtener el vector velocidad instantáneo del objeto, nave espacial o satélite integrando a la señal resultante nuevamente obtenemos el vector posición para cada para ese paso del tiempo.

Insertar diagrama de simulink



Resultado de la simulación simulink

Es de remarcar la potencia y la elegancia de esta simple ecuación del movimiento. En la práctica no sólo tenemos la atracción gravitacional creada por el planeta sobre el satélite representada por el parámetro μ sino que también aparecen perturbaciones adicionales a la aceleración gravitacional por ejemplo la resistencia debido a la radiación solar, la presión ejercida también a la no esfericidad de la Tierra. En la ecuación, la Tierra, es una esfera perfecta pero en realidad es una forma esferoide y eso crea desviaciones o perturbaciones al módulo de la Tierra esférica que inicialmente asumimos como modelo para la ecuación del movimiento de dos cuerpos.

Resumiendo, esta es una de las las ecuaciones más importantes para este curso.

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r}$$