El problema de los dos cuerpos

Mecánica orbital

UTN – 2026

El problema de los dos cuerpos

En la ***mecánica clásica***, el problema de los dos cuerpos consiste en predecir el movimiento de dos objetos masivos que se consideran de forma abstracta como ***partículas puntuales***. El problema supone que los dos objetos interactúan sólo entre sí; la única fuerza que afecta a cada objeto surge del otro y todos los demás objetos se ignoran.

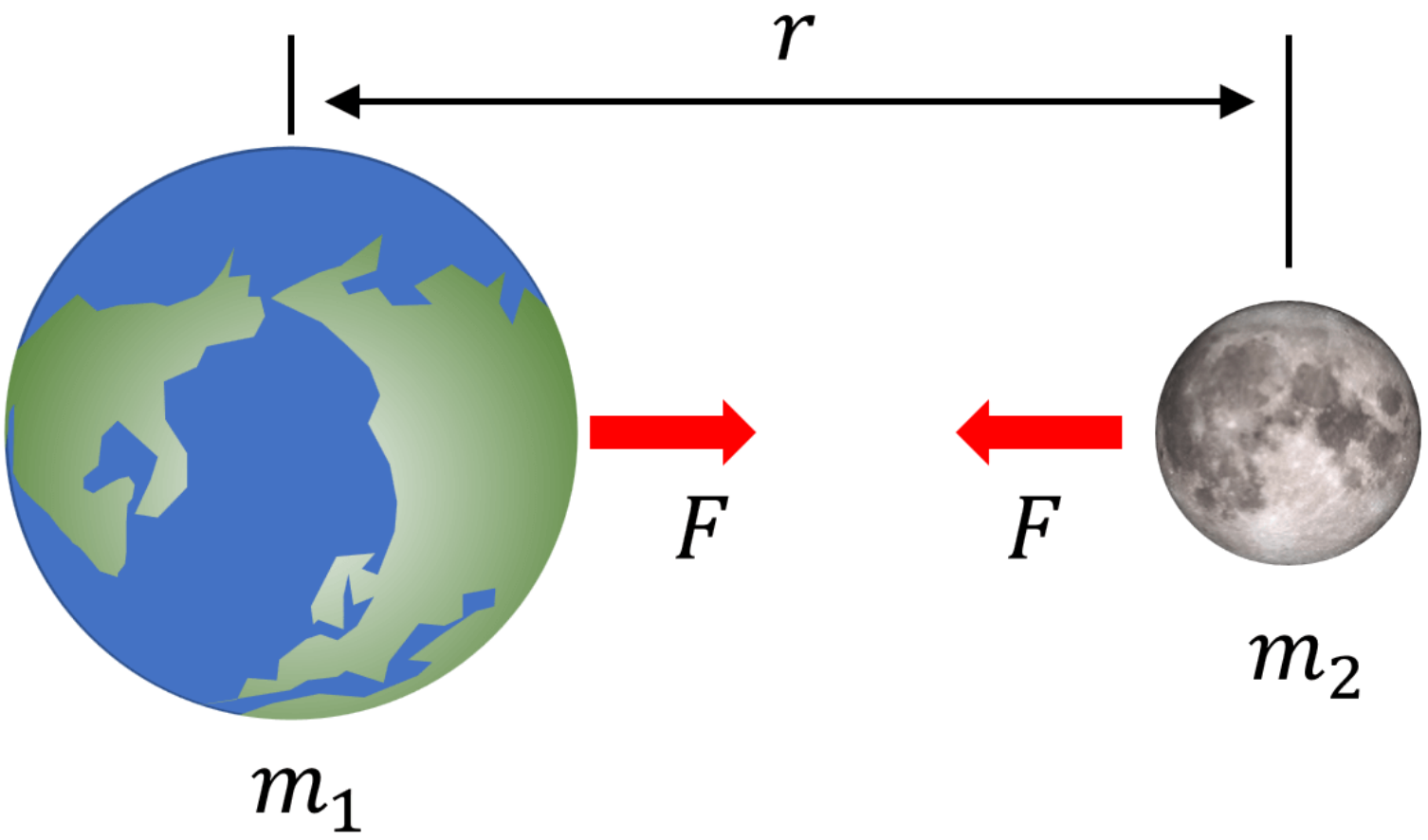
Los ejemplos comunes incluyen:

- La Luna orbitando la Tierra y en ausencia del Sol,
- Un planeta orbitando una estrella,
- Dos estrellas que giran en torno al centro de masas (estrella binaria)
- Un electrón girando en torno al núcleo atómico.

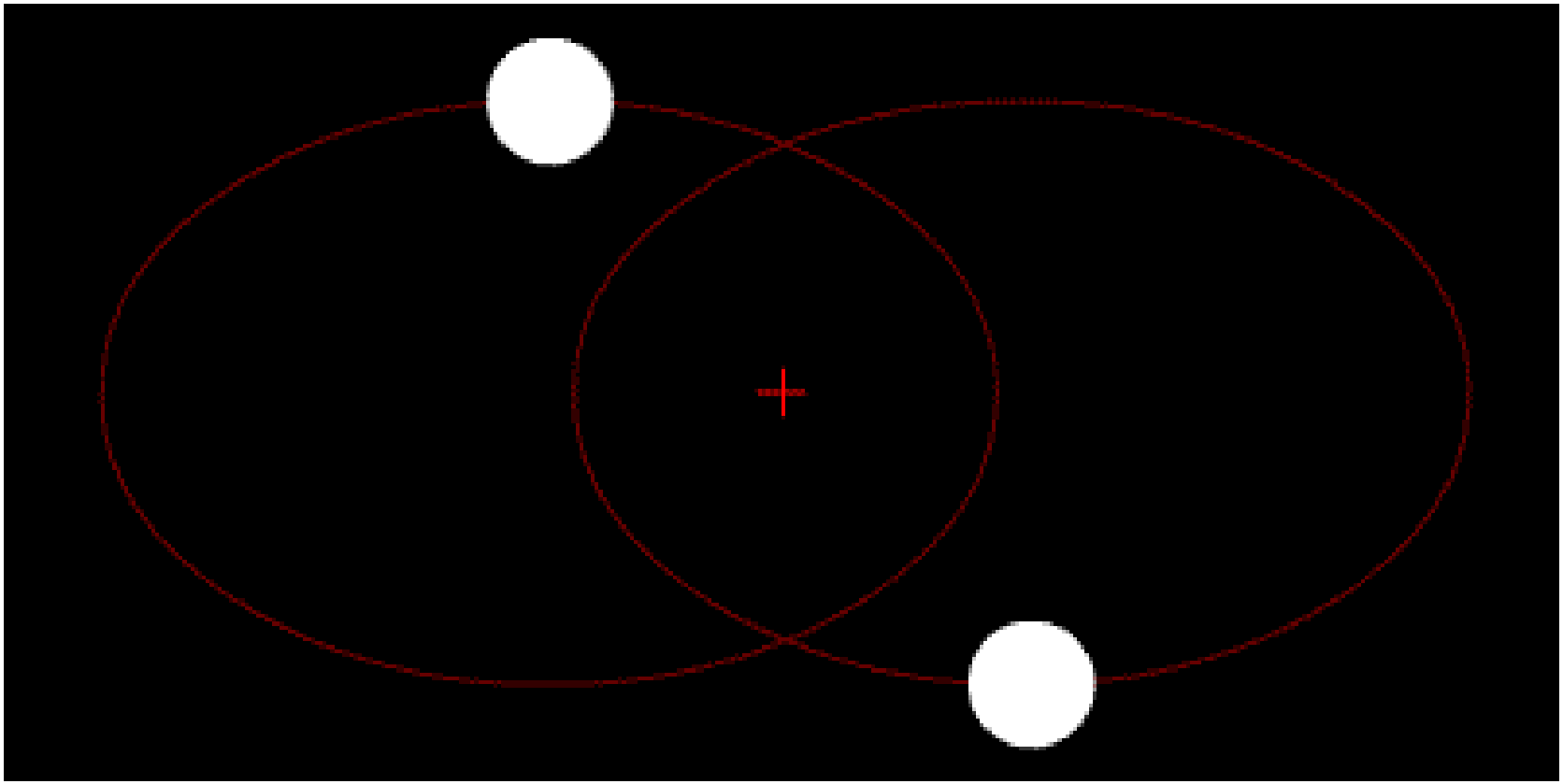
En el problema de los dos cuerpos se trata de describir matemáticamente el movimiento que presentan dos partículas materiales cuando están sometidas única y exclusivamente a la atracción recíproca debida a la fuerza de gravitación.

En la practica significa resolver las ecuaciones diferenciales que resultan de utilizar las leyes newtonianas de movimiento y aplicar las soluciones a todo tipo de situaciones y condiciones de frontera. Con ello se puede conocer el vector posición y velocidad de las partículas (con respecto a su centro de masas o con respecto a una de ellas) para todo tiempo. Es conocido que el problema de los dos cuerpos posee una solución analítica completamente general. El movimiento relativo de una de las partículas con repecto a la otra es o bien descrito por una cónica (elipse, parábola e hipérbola) o una línea recta. La posición en el tiempo es sencilla de calcular e implica resolver (a excepción del movimiento parabólico)

El problema de los dos cuerpos

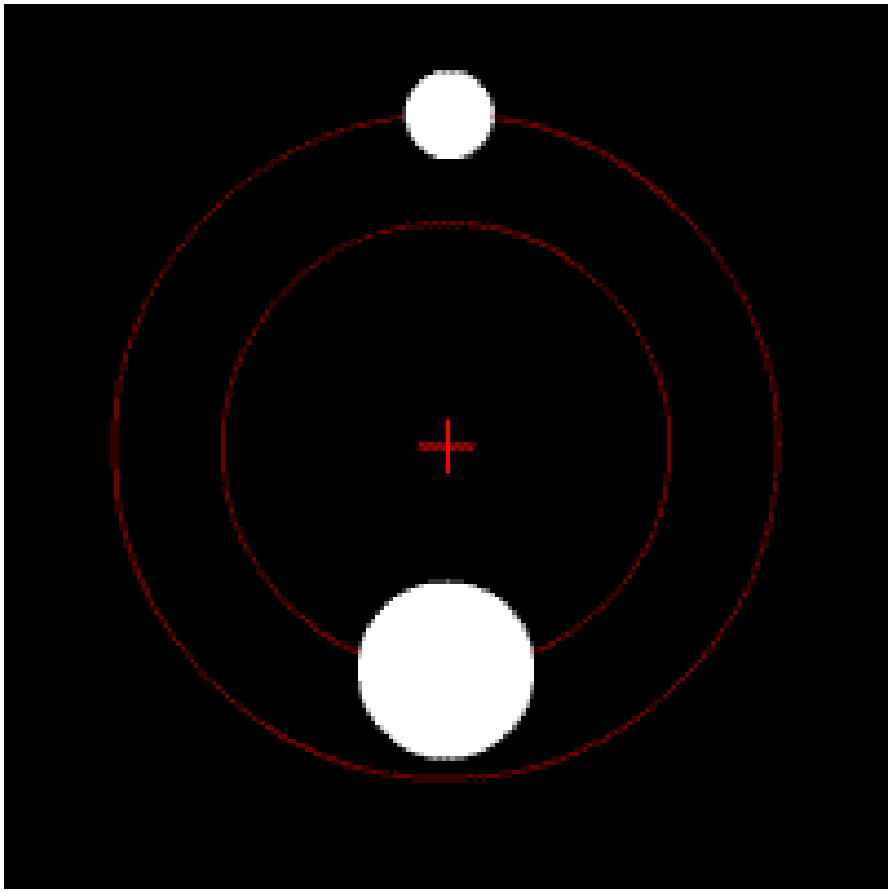


El problema de los dos cuerpos



Dos cuerpos orbitando alrededor de su centro de masas en órbitas elípticas

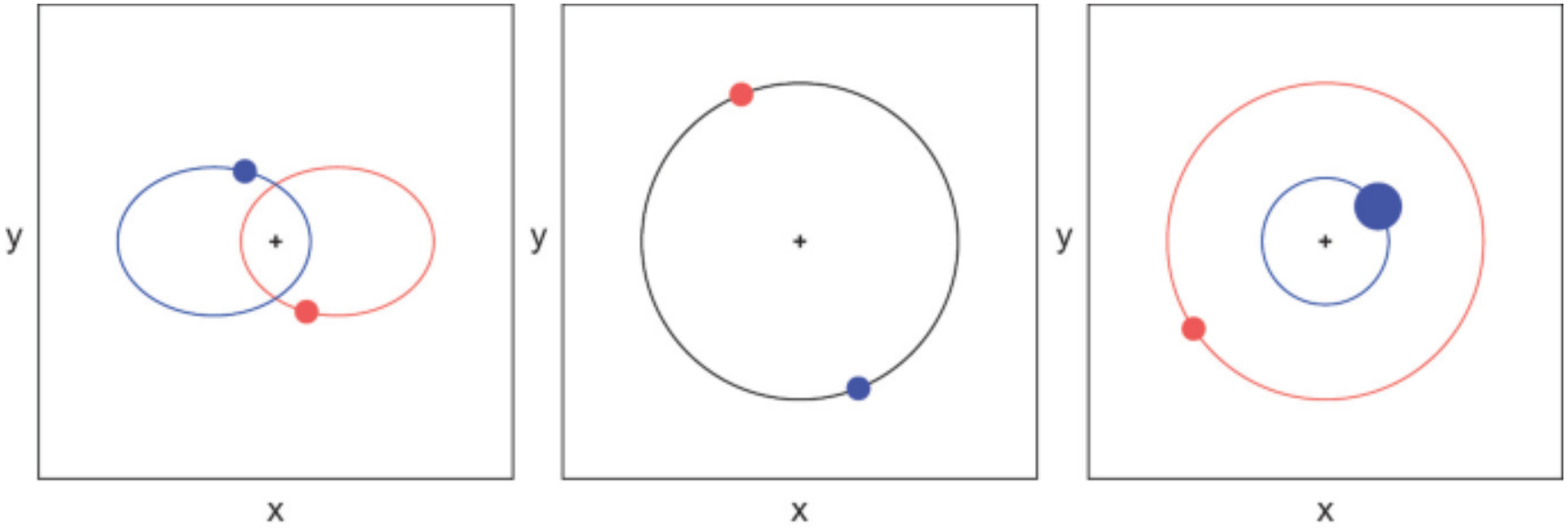
El problema de los dos cuerpos



Dos cuerpos con diferencia de masa orbitando alrededor de su centro de masa. (Plutón – Caronte)

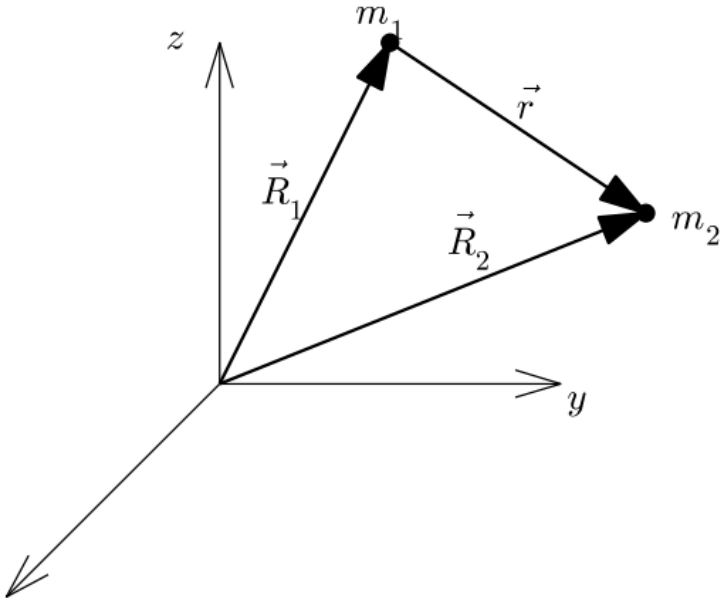
El problema de los dos cuerpos

Las Leyes de Newton permiten reducir el problema de los dos cuerpos a un problema de un cuerpo equivalente



Hipótesis generales

Problema: ***Estudiar el movimiento de dos cuerpos masivos en el espacio, sometidos a la fuerza de gravedad***.

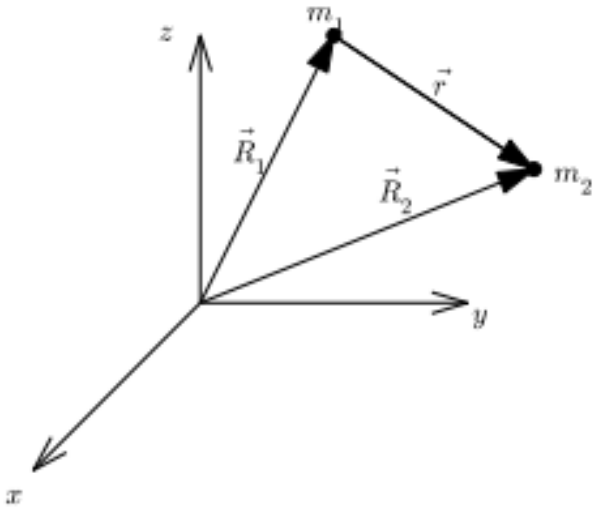


- Se considera el sistema aislado del resto del universo (no hay más fuerza que la atracción gravitatoria mutua entre los dos cuerpos).
- Las masas se pueden considerar puntuales y localizadas en el centro de masas de cada cuerpo. Las denominamos m_1 y m_2

Teorema de Newton:

"Un cuerpo rígido con forma esférica y densidad constante genera el mismo campo gravitatorio que una partícula, situada en el centro de dicha esfera, con la misma masa del cuerpo"

Ecuación del movimiento I



- La fuerza en cada partícula es la atracción gravitatoria ejercida por la otra partícula:

$$\vec{F}_1 = \frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{F}_2 = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

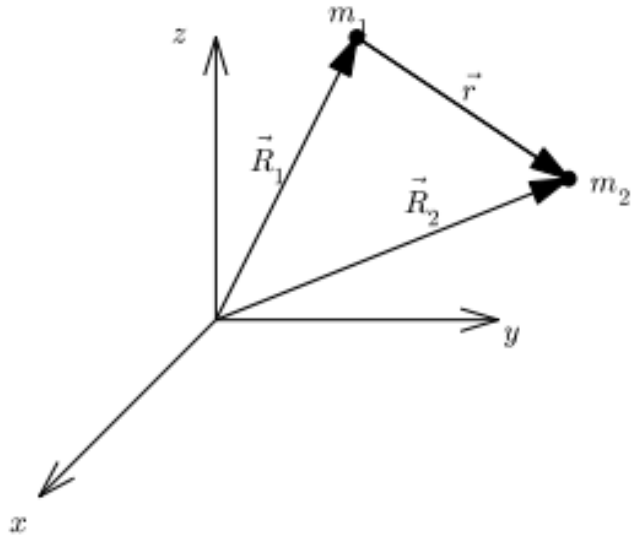
donde $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$ y $\vec{r} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$.

- Por tanto, la ecuación del movimiento de cada partícula es, respecto al sistema de referencia inercial:

$$m_1\ddot{\vec{R}}_1 = \vec{F}_1 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vec{R}}_1 = \frac{Gm_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$m_2\ddot{\vec{R}}_2 = \vec{F}_2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vec{R}}_2 = -\frac{Gm_1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Ecuación del movimiento II



- Consideremos la ecuación que verifica el centro de masas (CM) cuya posición viene definida por $\vec{R}_{CM} = \frac{m_1\vec{R}_1 + m_2\vec{R}_2}{m_1+m_2}$.

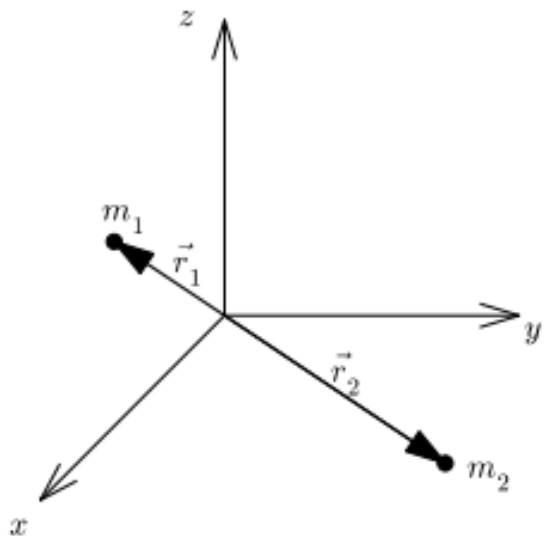
$$\begin{aligned} \ddot{\vec{R}}_{CM} &= \frac{m_1\ddot{\vec{R}}_1 + m_2\ddot{\vec{R}}_2}{m_1+m_2} \\ &= \frac{m_1\frac{Gm_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} - m_2\frac{Gm_1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}}{m_1+m_2} = \vec{0}. \end{aligned}$$

- Por tanto, integrando, la posición del CM viene dada por:

$$\vec{R}_{CM}(t) = \vec{V}_{CM}(0)t + \vec{R}_{CM}(0)$$

es decir, un movimiento rectilíneo y uniforme.

Ecuación del movimiento III



- Si desplazamos el origen del sistema de referencia al CM, el nuevo sistema de referencia sigue siendo inercial. En el nuevo sistema, la posición de los cuerpos viene definida por los vectores $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$:

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_1 - \vec{R}_{CM} = \left(\vec{R}_1 - \vec{R}_2\right)\frac{m_2}{m_1+m_2}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R}_2 - \vec{R}_{CM} = \left(\vec{R}_2 - \vec{R}_1\right)\frac{m_1}{m_1+m_2}$$

- Por tanto, conocido $\vec{r}$ se obtienen $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$:

$$\vec{r}_1 = -\vec{r}\frac{m_2}{m_1+m_2}, \qquad \vec{r}_2 = \vec{r}\frac{m_1}{m_1+m_2}$$

- Obsérvese que si $m_1 \gg m_2$, entonces $\vec{r}_1 \approx \vec{0}$ $(\vec{R}_1 \approx \vec{R}_{CM})$ y $\vec{r}_2 \approx \vec{r}$. Es decir el movimiento se puede aproximar por el "problema de un cuerpo", alrededor del cuerpo masivo.

Ecuación del movimiento IV

- De la definición de $\vec{r}$:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \ddot{\vec{R}}_2 - \ddot{\vec{R}}_1 = -\frac{Gm_1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} - \frac{Gm_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \\ &= -G(m_1+m_2)\frac{\vec{r}}{r^3} = \boxed{-\mu\frac{\vec{r}}{r^3}} \end{aligned}$$

- $\mu = G(m_1 + m_2)$ es el Parámetro Gravitacional de las Masas Combinadas. Si $m_1 \gg m_2$, entonces $\mu \approx \mu_1 = Gm_1$.
- Por ejemplo, dado que $m_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg, $m_\oplus = 6 \times 10^{24}$ kg, y $m_\leftmoon = 7{,}3 \times 10^{22}$ kg, se tiene que en el estudio del movimiento de la Tierra respecto al Sol:

$$\mu \approx \mu_\odot = 132712439935{,}5 \ \mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$$

En el estudio del movimiento de la Luna en torno a la Tierra:

$$\mu \approx \mu_\oplus = 398600{,}4 \ \mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$$

Conservación de la energía

- Por tanto la ecuación del movimiento es $\boxed{\ddot{\vec{r}} = -\mu\vec{r}/r^3}$.
- Definimos $r = |\vec{r}|$ y $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$. Obsérvese que $v = |\vec{v}| \neq \dot{r}$.
- Tomando producto escalar de la ecuación del movimiento con $\dot{\vec{r}}$, se tiene que

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{r^3}$$

- Se tiene que $\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = \vec{r} \cdot \vec{v} = r\dot{r}$ ¿Por qué? Por tanto, $\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = -\mu\dot{r}/r^2$.
- Puesto que $d/dt(v^2) = d/dt(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}$, obtenemos que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\mu\frac{\dot{r}}{r^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \text{cte.} = \epsilon$$

donde ϵ=energía específica.

Descripción del momento cinético

- Tomando producto vectorial de $\vec{r}$ con la ecuación del movimiento:

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r} \times \vec{r}}{r^3} = \vec{0}$$

- Puesto que $d/dt(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}$, obtenemos que

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{v} = \overrightarrow{\text{cte.}} = \vec{h}$$

donde $\vec{h}$=momento cinético específico.

- $h = |\vec{h}|$ se denomina constante de las áreas.
- Se tiene que $\vec{r} \cdot \vec{h} = 0$ y $\vec{v} \cdot \vec{h} = 0$, con $\vec{h}$ constante; por tanto el movimiento es plano, es decir, está confinado a un plano perpendicular a $\vec{h}$.

Descripción del movimiento I

- Tomando producto vectorial de la ecuación del movimiento con $\vec{h}$:

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = -\mu \frac{\vec{r} \times \vec{h}}{r^3}$$

- Puesto que $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$, obtenemos que

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = -\mu \frac{\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{v})}{r^3} = -\mu \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{v}}{r^3} = -\mu \frac{r\dot{r}\vec{r} - r^2\vec{v}}{r^3}$$

- Además $d/dt(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = \ddot{\vec{r}} \times \vec{h} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{h}} = \ddot{\vec{r}} \times \vec{h}$. Por tanto

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{v} \times \vec{h}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}\right) = -\mu \frac{\dot{r}\vec{r} - r\vec{v}}{r^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu\vec{r}}{r}\right)$$

- Por tanto, integrando:

$$\vec{v} \times \vec{h} - \frac{\mu\vec{r}}{r} = \overrightarrow{\text{cte.}} = \mu\vec{e}$$

donde $\vec{e}$=vector de Laplace o vector excentricidad.

Descripción del movimiento II

- Finalmente, tomando producto escalar de la última ecuación con $\vec{r}$:

$$\vec{r} \cdot \vec{v} \times \vec{h} - \frac{\mu \vec{r} \cdot \vec{r}}{r} = \mu \vec{e} \cdot \vec{r}$$

- Obsérvese que $\vec{r} \cdot \vec{v} \times \vec{h} = \vec{h} \cdot \vec{r} \times \vec{v} = \vec{h} \cdot \vec{h} = h^2$.
- Definimos $|\vec{e}| = e$ (excentricidad) y θ (llamada la anomalía verdadera) como el ángulo que forma $\vec{r}$ con $\vec{e}$. Por tanto $\vec{e} \cdot \vec{r} = er \cos\theta$, y llegamos a

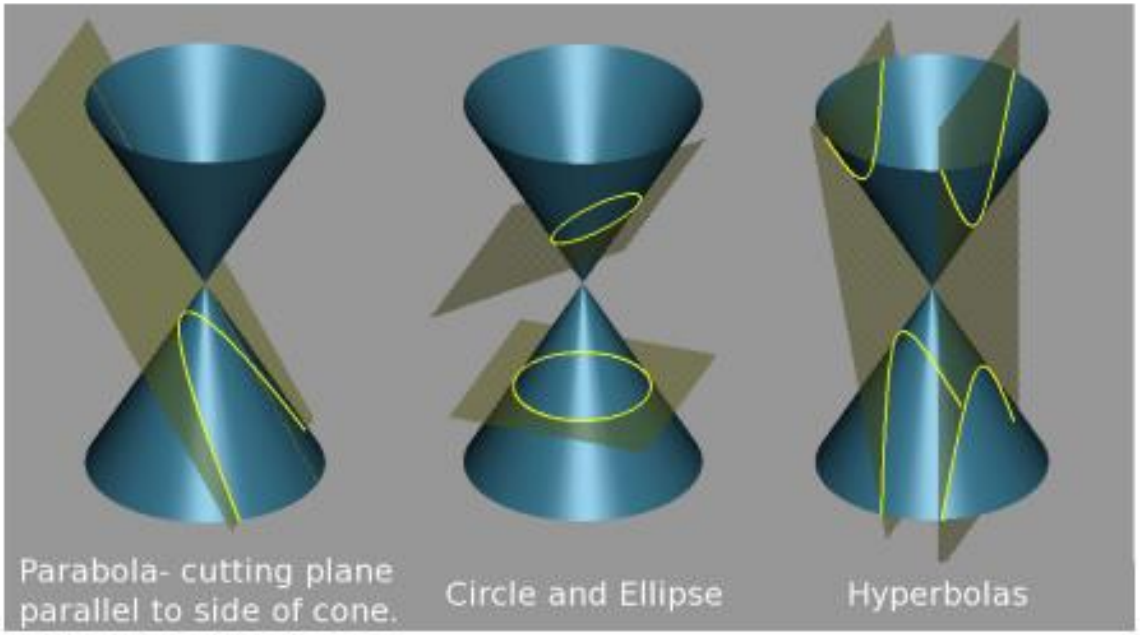
$$h^2 - \mu r = \mu r e \cos\theta$$

- Despejando r:

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e\cos\theta} = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

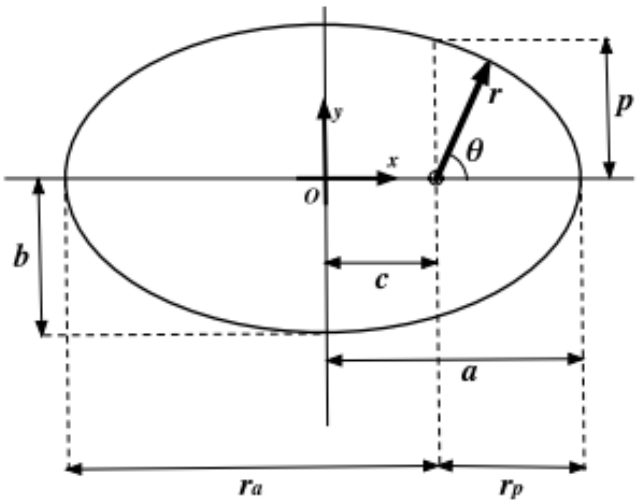
donde p es el llamado "parámetro". Esta es la ecuación de una cónica.

Cónicas



- La ecuación $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$ corresponde a la ecuación de una cónica (elipse, parábola o hipérbola) en coordenadas polares.
- Las secciones cónicas las describió Apolonio en el s. II AC en su tratado *"Cónicas"*, el cual Kepler conocía. Se obtienen como las intersecciones de un cono circular recto con un plano oblicuo a su eje.

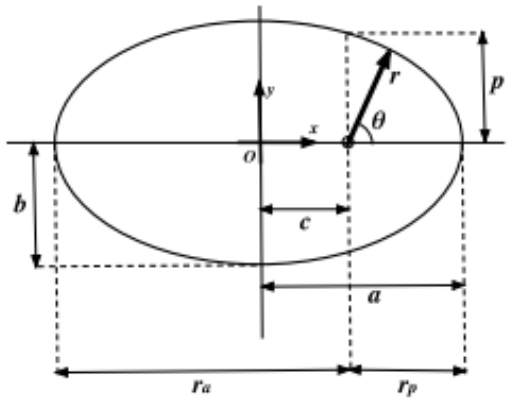
Elipse I



- Ecuación en cartesianas (con origen en el centro de la elipse): $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$, donde a es el semieje mayor y b es el semieje menor.
- Ecuación en polares (con origen en uno de los focos): $\boxed{r=\frac{p}{1+e\cos\theta}}$, donde $p>0$ es el "semilatus-rectum" y $e\in[0,1)$.
- Se define el punto de periapsis (simplemente, periapsis/periápside) como el de mínima distancia al foco; en tal caso, $\theta=0$ y $r_p=\frac{p}{1+e}$ es el radio de periapsis.
- Se define el punto de apoapsis (simplemente, apoapsis/apoápside) como el de máxima distancia al foco; en tal caso, $\theta=\pi$ y $r_p=\frac{p}{1-e}$ es el radio de apoapsis

Elipse II

Los parámetros de la elipse se expresan en función de a y e.



- De la figura, $r_p = a - c$ y $r_a = a + c$.
- Por tanto, $r_p + r_a = 2a$, y de la definición en polares, $r_p + r_a = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2}$, luego: $\boxed{p = a(1-e^2)}$.
- Por tanto, $\boxed{r_p = a(1-e)}$ y $\boxed{r_a = a(1+e)}$.
- Puesto que $r_a - r_p = 2c$ y de la definición en polares $r_p - r_c = \frac{p}{1+e} - \frac{p}{1-e} = \frac{2pe}{1-e^2}$, luego $c = p\frac{e}{1-e^2}$ y usando la definición de p en función de e y a: $\boxed{c = ae}$.
- Finalmente, puesto que se tiene $a^2 = b^2 + c^2$, obtenemos que $\boxed{b = a\sqrt{1-e^2}}$.
- Para $e = 0$, se obtiene una circunferencia de radio $R = p = a = b$, con $c = 0$.

Elipse III

Nombres que reciben periapsis y apoapsis según a qué cuerpo celeste se refieren:

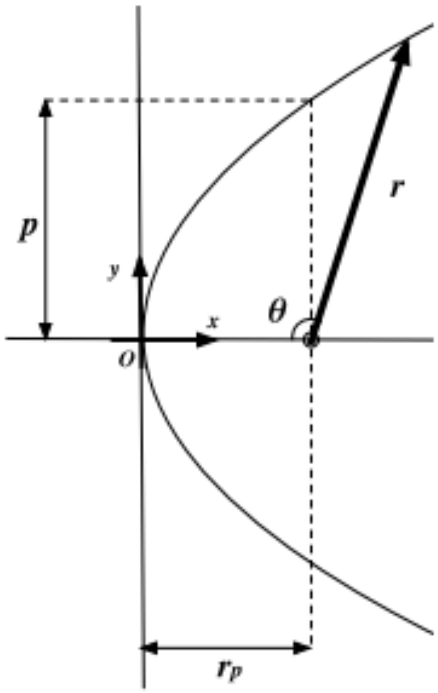
Cuerpo	Máxima aproximación(periapsis)	Máximo alejamiento(apoapsis)
Galaxia	Perigalácticon	Apogalácticon
Estrella	Periastro	Apoastro
Agujero negro	Perimelasme/Perinigricon	Apomelasme/Aponigricon
Sol	Perihelio	Afelio
Mercurio	Perihermo	Afhermo
Venus	Pericitera	Apocitera
Tierra	Perigeo	Apogeo
Luna	Periselenio/Pericintio/Perilunio	Aposelenio/Apocintio/Apolunio
Marte	Periareion	Apoarerion
Júpiter	Perijovio	Apojovio
Saturno	Pericrono/Perisaturnio	Apokrono/Aposaturnio
Urano	Periuranio	Apouranio
Neptuno	Periposeidinion	Apoposeidinion
Plutón	Perihadio	Apohadio

Fuentes:

http://www.astronoo.com/es/articulos/caracteristicas-de-los-planetas.html

https://es.wikipedia.org/wiki/Apside

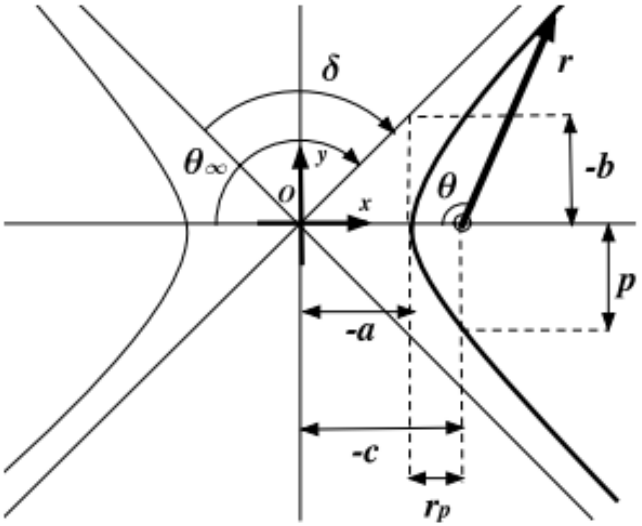
Parábola



- Ecuación en cartesianas (con origen en un extremo de la parábola): $\boxed{y^2 = \alpha x}$.
- Ecuación en polares (con origen en el foco): $\boxed{r = \dfrac{p}{1 + \cos\theta}}$, donde $p > 0$ es el "semilatus-rectum".
- En el caso de la parábola, $\boxed{r_p = p/2}$ y $\boxed{\alpha = 2p}$
- Obsérvese que $a = r_a = \infty$ (la trayectoria no es cerrada), y $e = 1$.

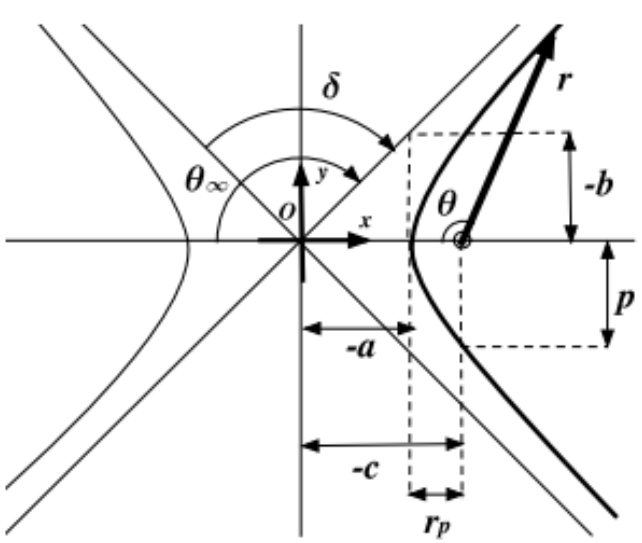
- Nota: Para $p = 0$ y $e = 1$ se tiene una trayectoria rectilínea (un caso degenerado que nunca aparece en la práctica).

Hipérbola I



- Ecuación en cartesianas: $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$, donde a es el semieje mayor y b es el semieje menor, que por definición son negativos.
- Ecuación en polares (con origen en uno de los focos): $\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}}$, donde $p > 0$ es el "semilatus-rectum" y $e > 1$.
- Se verifican relaciones similares a la elipse: $\boxed{p = a(1 - e^2)}$, $\boxed{r_p = a(1 - e)}$, $\boxed{c = ae}$, $\boxed{b = a\sqrt{e^2 - 1}}$.
- Sin embargo $r_a = \infty$, ya que la trayectoria no es cerrada.

Hipérbola II



- El ángulo θ_∞ que forma la asíntota con el eje x se obtiene buscando el valor de θ que hace que $r \to \infty$. Este valor es $\boxed{\theta_\infty = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{e}\right)}$.
- Por otro lado, el ángulo entre las asíntotas $\delta = 2\theta_\infty - \pi$, por tanto $\boxed{\delta = 2\,\mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{1}{e}\right)}$.
- Estos ángulos son importantes en las maniobras asistidas por gravedad.
- Obsérvese que la hipérbola tiene dos ramas; sólo la rama que "rodea" al foco donde se ubica el cuerpo central es una solución válida de la ecuación. La otra rama representa soluciones para fuerzas repulsivas (p.ej. las fuerzas electromagnéticas que se dan en un acelerador de partículas)

Demostración de las leyes de Kepler I

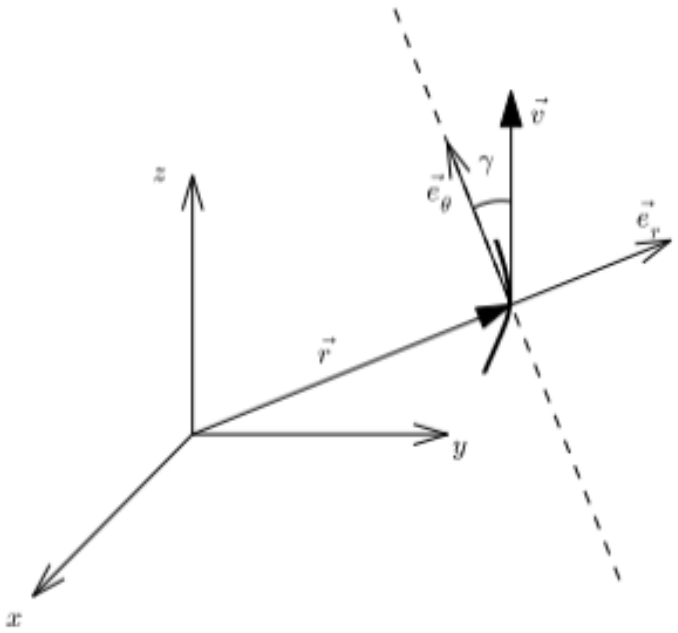
Primera ley de Kepler: "La órbita de cada planeta es una elipse con el Sol en uno de sus focos".

Demostración

- Puesto que el Sol es mucho más masivo que los planetas, se puede considerar el centro de masas del sistema Sol-planeta centrado en el Sol y éste inmóvil.
- Por tanto el movimiento del planeta es una cónica con el Sol en uno de sus focos.
- Observacionalmente, sabemos que las órbitas de los planetas son cerradas. Por tanto, ya que la única cónica cerrada es la elipse, las órbitas deben ser elipses.

Demostración de las leyes de Kepler II

Segunda ley de Kepler: "Una línea que una el Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales". Es decir, la velocidad con la que el vector $\vec{r}$ barre áreas (**velocidad areolar**) es constante.



- Para la demostración, definimos un nuevo sistema de referencia local en el plano orbital, con origen cada punto de la trayectoria $\vec{r}(t)$, de forma que el eje $\vec{e}_r$ es paralelo a $\vec{r}$ y el otro eje, $\vec{e}_\theta$, define la horizontal local, y está orientado "a la izquierda" (en la dirección contraria a las agujas de un reloj) respecto a $\vec{e}_r$.
- El ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{e}_\theta$ es γ, el ángulo de trayectoria (flight path angle).
- Por tanto $\vec{r} = r\vec{e}_r$ y $\vec{v} = v \operatorname{sen}\gamma \vec{e}_r + v\cos\gamma\vec{e}_\theta$.

Demostración de las leyes de Kepler III

Segunda ley de Kepler: "La velocidad areolar es constante".

Demostración

- Calculemos $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$ usando los ejes locales.
  $\vec{h} = vr \operatorname{sen}\gamma(\vec{e}_r \times \vec{e}_r) + vr\cos\gamma(\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta) = vr\cos\gamma\vec{e}_z$.
- Por otro lado, $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, luego repitiendo el cálculo obtenemos $\vec{h} = r^2\dot{\theta}\vec{e}_z$.
- Por tanto $h = r^2\dot{\theta} = vr\cos\gamma = \text{cte}$.
- El área se define como
  $A(t) = \int_0^{\theta(t)}\int_0^{r(\psi)} \rho d\rho d\psi = \int_0^{\theta(t)} \frac{r(\psi)^2}{2} d\psi$.
- Por tanto, $\frac{d}{dt}A(t) = \frac{r^2\dot{\theta}}{2} = \frac{h}{2} = \text{cte}$.

La Segunda Ley de Kepler se cumple para todas las cónicas!

Demostración de las leyes de Kepler IV

Tercera ley de Kepler: "El cuadrado del periodo orbital de cada planeta es directamente proporcional al cubo del semieje mayor de la elipse de la órbita del planeta".

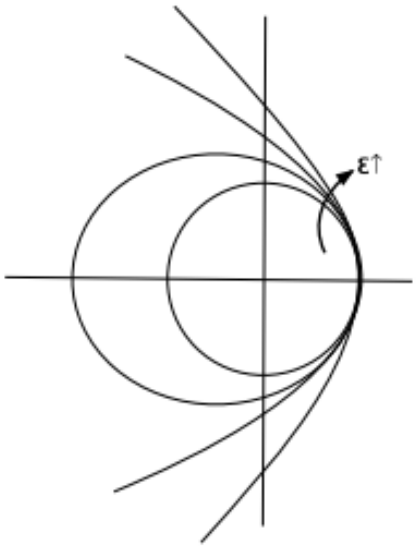
Demostración

- Puesto que conocemos $\dot{A}$, el periodo será: $T = \frac{A}{\dot{A}} = \frac{\pi ab}{h/2} = \frac{2\pi ab}{h}$.
- En las definiciones de la elipse, tenemos que $b = a\sqrt{1-e^2}$. Por otro lado, definimos $p = \frac{h^2}{\mu}$, luego $h = \sqrt{p\mu}$ y de la definición de p, $h = \sqrt{a(1-e^2)\mu}$.
- Por tanto $T = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a(1-e^2)\mu}} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$
- Finalmente llegamos a $T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu}a^3$.

Ecuación de las “Fuerzas vivas”

- El término fuerza viva es una forma arcaica de denominar a la energía cinética.
- Obtuvimos la ecuación de la energía $\epsilon = v^2/2 - \mu/r = \text{cte}$. En periapsis: $\epsilon = v_p^2/2 - \mu/r_p$. Sabemos que $r_p = a(1-e)$. Por otro lado, puesto que en periapsis $\gamma_p = 0$ o π, se tiene que $h = r_p v_p$ y por tanto $v_p = \frac{h}{r_p} = \frac{\sqrt{a(1-e^2)\mu}}{a(1-e)}$.
- Se tiene pues que $\epsilon = \frac{a(1-e^2)\mu}{2a^2(1-e)^2} - \frac{\mu}{a(1-e)} = \frac{(1+e)\mu}{2a(1-e)} - \frac{\mu}{a(1-e)} = \frac{\mu}{a}\frac{1+e-2}{2(1-e)}$, y operando llegamos a $\boxed{\epsilon = -\frac{\mu}{2a}}$.
- Sustituyendo en la ecuación de la energía: $v^2/2 - \mu/r = -\frac{\mu}{2a}$ $\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}}}$.

Clasificación de órbitas



- Para un valor fijo de p (es decir, de h), las órbitas se pueden clasificar de menos a más energía específica:
  1. Órbitas circulares: $e = 0$, $R = p$, $\epsilon_C = -\frac{\mu}{2R} < 0$.
  2. Órbitas elípticas no circulares: $0 < e < 1$, $a = \frac{p}{1-e^2}$, $\epsilon_E = -\frac{\mu}{2a} < 0$. Se tiene que $\epsilon_E > \epsilon_C$.
  3. Órbitas parabólicas: $e = 1$, $\epsilon_P = 0$.
  4. Órbitas hiperbólicas: $e > 1$, $a = \frac{p}{1-e^2}$, $\epsilon_H = -\frac{\mu}{2a} > 0$.
- En órbitas circulares la velocidad es $v_c(R) = \sqrt{\mu/R} = \text{cte}$.
- En órbitas parabólicas se tiene que $v_p = \sqrt{2\mu/r} = \sqrt{2}v_c(r)$; ésta es la conocida como velocidad de "escape".
- Para hipérbolas se define la velocidad de "exceso" como $v_\infty = \lim_{r\to\infty} v = \sqrt{-\mu/a}$. En el caso parabólico $v_\infty = 0$.

Fin

