INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA ORBITAL
CONTENIDO

Capítulo 1 – Fundamentos orbitales
¡Bienvenidos al capítulo 1!
En este capítulo, investigaremos las bases del movimiento de los satélites. Comenzaremos con una breve historia de algunas personas que nos ayudaron a comprender inicialmente por qué los objetos en el espacio, incluyendo los planetas, se mueven como lo hacen. A continuación, analizaremos las leyes de dos figuras famosas que contribuyeron significativamente al mundo de la astrodinámica: Isaac Newton y Johannes Kepler. Después, combinaremos dos de estas leyes, incluyendo la Segunda Ley de Newton y su Ley de Gravitación Universal, para desarrollar la ecuación de movimiento de dos cuerpos, que servirá de base para nuestro estudio de la mecánica orbital.

Los objetivos de este capítulo son:

- Explicar cómo los primeros exploradores espaciales contribuyeron a nuestra comprensión de las órbitas.
- Comprender las tres leyes básicas del movimiento de Newton y cómo se aplican a las órbitas.
- Explicar y utilizar la Ley de Gravitación Universal de Newton.
- Utilizar las dos constantes del movimiento orbital (energía mecánica específica y momento angular específico) para explicar las propiedades básicas de las órbitas.
- Combinar estas leyes para desarrollar la ecuación de movimiento de dos cuerpos. Integrar la ecuación de movimiento de dos cuerpos (opcional).

Antes de continuar, les recomiendo repasar algunos conceptos básicos de matemáticas vectoriales, trigonometría y cálculo. La próxima clase será en este sentido práctico.

LOS PRIMEROS ASTRÓNOMOS Y LAS LEYES DE KEPLER

Algunos de los primeros en contribuir a la comprensión del espacio fueron filósofos primitivos, como el filósofo griego Aristóteles (Figura 1), quien vivió entre el 384 y el 322 a. C. Durante casi 2000 años, su visión de una Tierra estacionaria en el centro de un universo en rotación, es decir, un universo geoestático y geocéntrico (Figura 2), dominó el pensamiento mundial sobre el tema. Esta visión del universo se arraigó en la teología cristiana, convirtiéndola en una doctrina religiosa

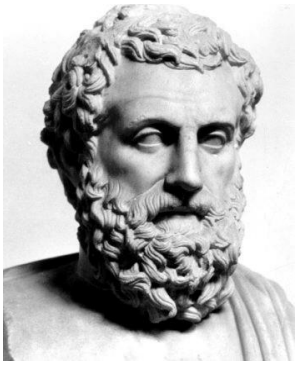


Figura 1: Busto de Aristóteles

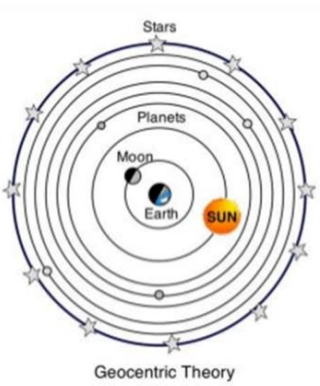


Figura 2: La teoría geocéntrica del universo

Nicolás Copérnico (Figura 3), astrónomo polaco, nació en 1473. Siendo adolescente, supuestamente sus padres, como miles de padres desde entonces, finalmente se cansaron de su egocentrismo y le dijeron: "¡Hijo, el universo no gira a tu alrededor!". Esto le planteó un profundo dilema filosófico sobre el que reflexionar.
Se cree que Copérnico probablemente dio con su idea principal a principios del siglo XVI y escribió un manuscrito llamado Commentariolus, o en español, "Pequeño Comentario". En esta obra, propuso el Sol como el punto fijo alrededor del cual giran los planetas en órbitas circulares. También propuso que la Tierra gira una vez al día sobre su propio eje.
Su sistema, representado en la Figura 4, fue rápidamente denunciado tanto por católicos como por protestantes. Sin embargo, su visión heliocéntrica del universo tuvo enormes consecuencias para los pensadores posteriores de la Revolución Científica, incluyendo figuras importantes como Galileo, Kepler y Newton.



Figura 3: Retrtato de Copérnico

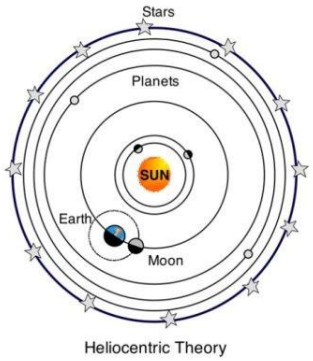


Figura 4: La teoría heliocéntrica del universo

Tycho Brahe, quien vivió entre 1546 y 1601, fue más que un astrónomo observacional tradicional. Brahe era una persona bastante excéntrica que se tomaba su trabajo muy en serio. Aunque aún creía que los planetas orbitaban en órbitas circulares alrededor del Sol,

también creía que el Sol, la Luna y las estrellas giraban alrededor de la Tierra. Era conocido por realizar mediciones muy meticulosas de los objetos celestes. Entre sus logros científicos se incluyen el descubrimiento de la supernova en 1572 y una serie de ensayos sobre el movimiento de los cometas.

Hombre adinerado de noble cuna, Brahe poseía una cantidad significativa de todo el dinero de Dinamarca y lo utilizaba para financiar sus proyectos. También era conocido por su temperamento impulsivo y, mientras bebía cerveza, se encontraba en medio de una acalorada discusión sobre matemáticas cuando fue retado a duelo. Como era conocido por no escabullirse, aceptó el duelo en estado de ebriedad y perdió la nariz en 1566 (Figura 5). Brahe simplemente compró una costosa pieza de repuesto hecha de latón, o posiblemente incluso de una aleación de oro y plata, razón por la cual luce una nariz de aspecto extraño en sus fotos posteriores, que se muestran en la Figura 6.

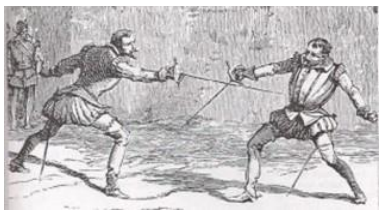


Figura 5: Duelo de modelos tychonianos



Figura 6: Tycho Brahe presentando su nariz de bronce

Brahe también utilizó su dinero para adquirir los mejores instrumentos de observación de su época. Conoció a un joven prometedor llamado Johannes Kepler, y en 1600 lo contrató como asistente. Juntos, comenzaron a trabajar en un nuevo catálogo de estrellas. Este catálogo fue finalmente publicado por Kepler en 1627 con el nombre de las *Tablas Rudolfinas*. Eran, con mucho, los datos astronómicos más precisos jamás publicados, que incluían no solo datos planetarios, sino también las posiciones de 1006 estrellas. La mayoría de estas estrellas fueron catalogadas con una precisión de un minuto de arco. Para comprender esto, tomemos un círculo y lo dividimos en 360 partes iguales para obtener un minuto de precisión. ¡Luego divimos cada minuto en 60 partes! En otras palabras, esto es 1/60 de un grado.
Para darle una idea de la precisión de estas mediciones (Figura 7), una pelota de fútbol reglamentaria con un diámetro de 22 cm **subtiende** un ángulo de 1 minuto de arco a una distancia de aproximadamente 756 metros.

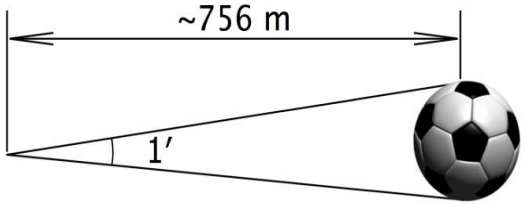


Figura 7: Medición de un minuto de arco

Brahe fue responsable de multitud de mediciones precisas, pero no era un matemático experto. Afortunadamente, Kepler sí lo era; sin embargo, la colaboración Brahe-Kepler duraría poco. En octubre de 1601, Brahe fue invitado a un banquete real. Como era costumbre, a los invitados no se les permitió abandonar la mesa del banquete hasta después de la partida del rey. Tras una copiosa comida y una abundante bebida, se cree que Brahe pudo haber reventado la vejiga. Sufrió varios días y luego falleció. Sin embargo, antes de morir, retó a Kepler a calcular la órbita de Marte. Fue una tarea acertada, ya que la órbita de Marte es una de las más excéntricas, o no circulares, de nuestro sistema solar (Randolph, 2017).

JOHANNES KEPLER

Kepler encontró un pequeño problema con las mediciones de la órbita de Marte. Las meticulosas mediciones realizadas por Brahe indicaban que la órbita de Marte *no era* circular. Había una diferencia de ocho minutos de arco entre una órbita circular ideal y las observaciones de Brahe. Kepler comenzó a reflexionar sobre la discrepancia y finalmente llegó a la conclusión de que los planetas giraban alrededor del Sol en órbitas elípticas, con el Sol no en el centro, sino en uno de los puntos focales de la elipse. Kepler estaba tan convencido de su razón que desarrolló tres Leyes del Movimiento Orbital.

PRIMERA LEY DE KEPLER

La figura 8 muestra que las órbitas de los planetas son elipses con el Sol en un foco.

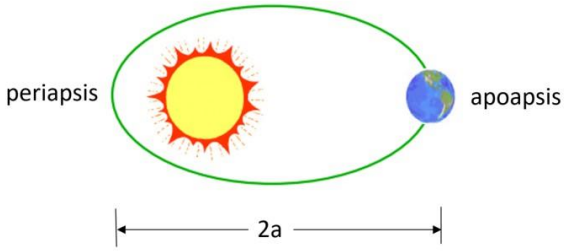


Figura 8: Ilustración de la primera ley de Kepler.

Además, al estudiar más detenidamente las partes individuales de las órbitas de Marte, se observaron diferencias en el tiempo que tardaba el planeta en recorrer la misma distancia a lo largo de su órbita. Kepler observó que una línea entre el planeta y Marte recorría un área igual en el mismo tiempo. Para explicar esto, razonó que cuando el planeta está más cerca del Sol, o en el perihelio, debe viajar más rápido que cuando está más lejos del Sol. Esto se convirtió en la Segunda Ley de Kepler.

SEGUNDA LEY DE KEPLER

Los planetas barren áreas iguales en tiempos iguales, como se muestra en la Figura 9.

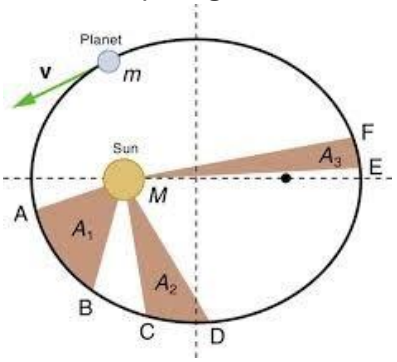


Figura 9: Ilustración de la segunda ley de Kepler

Kepler publicó estas dos primeras leyes en 1609; diez años más tarde descubrió su tercera ley.

TERCERA LEY DE KEPLER

El cuadrado del período orbital, o el tiempo que tarda un planeta en completar una órbita, es directamente proporcional al cubo de la distancia media o promedio entre el Sol y el planeta.
La Tercera Ley de Kepler nos permite predecir la órbita de cualquier objeto en el espacio que gira alrededor de un cuerpo central. Más adelante descubriremos que esta relación puede cuantificarse mediante la ecuación del período (1):

$$Periodo = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (seg) \tag{1}$$

Dónde
a es el semieje mayor, que describe el tamaño de la órbita
$\mu = GM$ se denomina constante gravitacional, G es la constante gravitacional universal, y M es la masa del cuerpo central.

Como era de esperar, esto significa que cuanto mayor sea la órbita, más tiempo tarda el objeto en recorrerla. Para la Tierra, esta constante gravitacional es de aproximadamente $398.600{,}5\ km^3/s^2$.

Aprenderemos más sobre estos parámetros cuando estudiemos la Ley de Gravitación Universal de Newton más adelante en este capítulo.

ISAAC NEWTON

Kepler explicó cómo se movían los planetas, pero no fue hasta Isaac Newton (Figura 10), quien vivió entre 1642 y 1727, que comprendimos el porqué. En 1665, una gran plaga asoló Inglaterra y provocó el cierre de las universidades. ¡En tan solo ese año, Newton realizó avances significativos en cálculo, gravitación y óptica a la edad de veintitrés años!

Newton finalmente publicó sus tres leyes del movimiento y la Ley de Gravitación Universal en Principia (mostradas en la Figura 11) en 1687.



Figura 10: Sir Isaac Newton

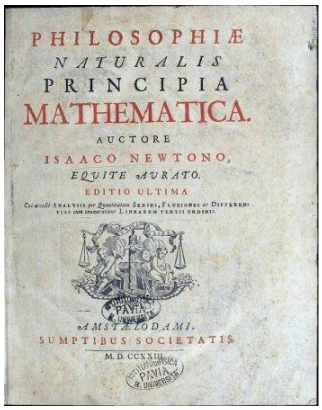


Figura 11: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica

PRIMERA LEY DEL MOVIMIENTO DE NEWTON

Un cuerpo continúa en su estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta, a menos que sea obligado a cambiar ese estado por fuerzas impresas sobre él.

Esta ley establece que ...*"Cualquier objeto en reposo permanecerá en reposo a menos que una fuerza lo impulse a moverse"*. De igual manera, cualquier objeto en movimiento permanecerá en movimiento indefinidamente, con velocidad constante en línea recta, hasta que una fuerza lo haga cambiar su velocidad o dirección de movimiento.

Esto nos permite extraer dos conclusiones sobre cómo se aplica esta ley a los satélites en órbita:

En primer lugar, observamos que un satélite se desplaza en círculo o elipse alrededor de un cuerpo central. Dado que no se desplaza en línea recta*, debe haber* alguna fuerza actuando sobre él. Esa fuerza es la gravedad, y debe estar atrayendo al satélite en dirección al cuerpo central.

En segundo lugar, la inercia impide que un objeto se mueva sin la aplicación de una fuerza externa. Sin embargo, una vez en movimiento, un objeto tiene momento, que es la

resistencia que un objeto en movimiento ofrece a los cambios en su velocidad o dirección de movimiento.

Estudiaremos esto más adelante, pero estas dos conclusiones se pueden resumir como:

1. Debe haber una fuerza sobre los satélites: ¡la gravedad!
2. El momento lineal se conserva(1): las órbitas tienen una orientación constante.

En este momento vale la pena revisar el concepto de *momentum*.

El momentum es la resistencia que un objeto en movimiento ofrece a los cambios en su velocidad o dirección.

(1) El momento total de un sistema permanece constante antes y después de una interacción, como un choque o una explosión

Existen dos tipos: *momento lineal* y *momento angular*. Analizaremos el momento angular más adelante en este capítulo.
El momento lineal se define como la masa multiplicada por la velocidad y suele representarse mediante la variable $\vec{p}$. En la ecuación (2), esto se convierte en:

$$\vec{\boldsymbol{p}} = m\,\vec{\boldsymbol{V}} \tag{2}$$

Dónde:

$$\vec{\boldsymbol{p}} \;=\; vector\ momentum\ lineal\ \ ((kg\,.m)/s)$$

$$m \;=\; masa\ (kg)$$

$$\vec{\boldsymbol{V}} \;=\; vector\ velocidad\ \left(\frac{m}{s}\right)$$

Entender este concepto nos lleva a la siguiente ley de Newton.

SEGUNDA LEY DEL MOVIMIENTO DE NEWTON

La variación en el tiempo del momentum de un objeto es igual a las fuerzas aplicadas.
¿Pero, esta ley no es simplemente $F = ma$? ¡No!

Observemos con atención lo que realmente dice la segunda ley de Newton. La variación en el tiempo del momentum de un objeto es igual a las fuerzas aplicadas. Aquí hay dos diferencias importantes. Primero, acabamos de aprender que el momentum lineal es un vector, como se muestra en la Ecuación 3.

$$\vec{\boldsymbol{p}} = m\vec{\boldsymbol{V}}$$

(3)

La variación en el tiempo del momentum es entonces la derivada del producto de la masa por la velocidad como se muestra en la ecuación 4, o:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\left(m\vec{\boldsymbol{V}}\right)}{dt}$$

(4)

Luego podemos expandir esta ecuación usando la regla del producto del cálculo, dando como resultado la Ecuación 5:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{V} + m\frac{d\left(\vec{V}\right)}{dt}$$

(5)

Y la segunda ley de Newton dice que este producto es igual a las fuerzas aplicadas, que pueden ser una o más, por lo que usaremos el símbolo de suma ∑ para escribir esta ecuación (6) como:

$$\sum \vec{F} = \frac{dm}{dt}\vec{V} + m\frac{d\left(\vec{V}\right)}{dt}$$

(6)

El segundo término,

$$\frac{d\left(\vec{V}\right)}{dt} = \vec{a}$$

Dónde $\vec{a}$ es el vector de aceleración. Pero ¿qué pasa con el primer término? Observemos que $\frac{dm}{dt} = 0$ solo si la masa no cambia. Entonces, la segunda ley de Newton adopta la forma más conocida de la ecuación 7:

$$\sum \vec{F} = m\,\vec{a}$$

(7)

¡Sólo cuando la masa no cambia !

Esto tiene relevancia para los sistemas espaciales de dos maneras:

1. Combinaremos esto con la Ley de Gravitación Universal de Newton para formar la ecuación de movimiento de dos cuerpos.
2. En los cohetes (mostrados en la Figura 12), ¡esta es una gran parte del efecto de empuje!



Figura 12: SpaceX Dragon se lanza sobre el cohete Falcon 9

TERCERA LEY DEL MOVIMIENTO DE NEWTON

Por cada acción hay una reacción igual y opuesta.

Este principio de acción y reacción se aplica universalmente a todos los sistemas mecánicos. Esto es relevante para los sistemas espaciales de dos maneras principales:

1. En un entorno de caída libre, un astronauta debe ser muy consciente de este hecho. Por ejemplo, si gira un destornillador en un sentido, girará en el sentido opuesto a menos que esté anclado.
2. Esto es lo que hace que los cohetes funcionen: la velocidad a la que la masa del fluido de trabajo se expulsa del motor en una dirección crea empuje hacia el motor en la dirección opuesta.

LEY UNIVERSAL DE LA GRAVITACIÓN DE NEWTON

Newton no fue responsable del descubrimiento de la gravedad. Después de todo, en esa época se sabía que la fuerza de la gravedad hacía que los objetos terrestres (como las manzanas al caer) aceleraran hacia la Tierra a una velocidad de $9{,}8\ m/s^2$. También se sabía que la Luna aceleraba hacia la Tierra a una velocidad de $0{,}00272\ m/s^2$. Newton se preguntó qué tenía la fuerza de la gravedad que hacía que la Luna, mucho más distante, acelerara a una velocidad de aproximadamente 1/3600 de la aceleración de una manzana. Esto se muestra en la ecuación (8):

$$\frac{g_{Luna}}{g_{manzana}} = \frac{0{,}00272\,\frac{m}{s^2}}{9{,}8\,\frac{m}{s^2}} = \frac{1}{3600}$$

(8)

Newton sabía que la fuerza de gravedad debía estar relacionada de alguna manera con la distancia entre los dos cuerpos.

El dilema se resuelve comparando la distancia de la manzana al centro de la Tierra con la distancia de la Luna al centro de la Tierra. A medida que la Luna gira alrededor de la Tierra, está aproximadamente 60 veces más lejos del centro de la Tierra que la manzana. Por lo tanto, la fuerza de gravedad entre la Tierra y cualquier objeto es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa el objeto del centro de la Tierra (como se muestra en la Figura 13). La Luna, al estar 60 veces más lejos que la manzana, experimenta una fuerza de gravedad que es $\frac{1}{(60)^2}$ veces la de la manzana.

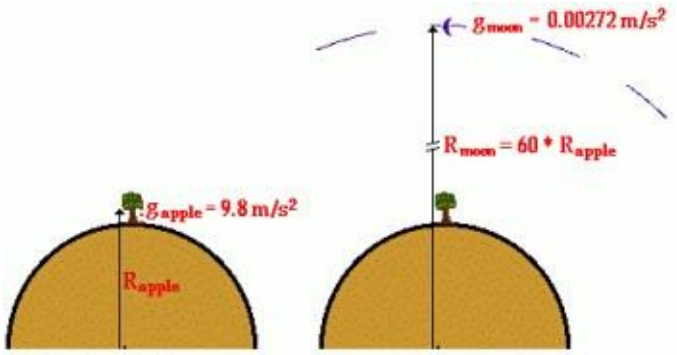


Figura 13: La ley del cuadrado inverso

Pero la Ley de Gravitación Universal de Newton no solo se aplica a los objetos cercanos a la Tierra. Como su nombre indica, es ***universal***. Todos los objetos se atraen entre sí con una fuerza de atracción gravitatoria, y dicha fuerza depende directamente de las masas de ambos objetos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa sus centros. En la ecuación (9), esto se convierte en:

$$F_{grav} \approx \frac{m_1 m_2}{R^2}$$

(9)

Observemos que R es la distancia entre los centros de los dos objetos. Resulta que existe una constante de proporcionalidad que se aplica en todo el universo, como se muestra en la Ecuación 10.

$$F_{grav} = G\frac{m_1 m_2}{R^2}$$

(10)

Donde G representa la constante gravitacional universal ($G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{k\,kg^2}$). El valor de G fue determinado experimentalmente por Henry Cavendish en el siglo posterior a la muerte de Newton.

Dado que aplicaremos mucho esta ecuación a nuestros estudios sobre los satélites alrededor de la Tierra, definiremos un nuevo parámetro, llamado ***constante gravitacional de la Tierra***, en la Ecuación 11:

$$\mu_{Tierra} = G\, m_{Tierra} = 398600{,}5\ \frac{km^3}{s^2} \tag{11}$$

Entonces, la Ley de Gravitación Universal de Newton para un objeto alrededor de la Tierra se convierte en lo que se muestra en la Ecuación 12:

$$F_{grav} = \frac{\mu\, m_{satélite}}{R^2} \tag{12}$$

A continuación, consideraremos las leyes de conservación de la energía y conservación del momento angular.

LEYES DE CONSERVACIÓN

Hay ciertas cosas que son constantes en la vida, además de que debemos pagar impuestos y que el tiempo avanza. Muchas de las propiedades básicas que hemos analizado, como el momentum y la energía, permanecen constantes. En física, si una propiedad o cantidad permanece invariable en un sistema, se dice que dicha propiedad o cantidad se ***conserva***.

MOMENTO ANGULAR ESPECÍFICO

Aprendimos anteriormente que el momento lineal se conserva para un sistema, como se muestra en la ecuación 13.

$$\vec{\boldsymbol{p}} = m\vec{\boldsymbol{V}} \tag{13}$$

El momentum es la resistencia que un objeto en movimiento opone a un cambio en su velocidad o dirección. Pero ¿qué ocurre con los objetos que giran? Estos también poseen una propiedad llamada momentum o momento angular, que se conserva.

Primero, veamos de dónde proviene el momento angular.
El momento de impulso, como se muestra en la ecuación 14, o momento angular, se da por:

$$\vec{H} = \vec{R} \times \vec{p} = \vec{R} \times m\vec{V} \tag{14}$$

Que siempre es perpendicular al plano de movimiento, como se referencia en la Figura 14.

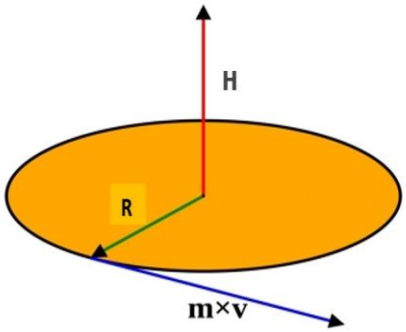


Figura 14: El movimiento circular de un objeto revela el momento angular

Para un satélite en órbita alrededor de la Tierra, la órbita está en un plano, por lo que el producto vectorial siempre es perpendicular al plano.
Ahora bien, como la masa no importa en caída libre, definamos una variable más útil en la ecuación 15:

$$\vec{h} = \frac{\vec{H}}{m} = \vec{R} \times \vec{V} \tag{15}$$

Dónde $\vec{h}$ es el ***momento angular específico***.

Esta propiedad tiene enormes implicaciones para los satélites en órbita.

1. El plano orbital de un satélite es fijo a menos que se aplique un par externo.
2. Se necesita MUCHA energía para cambiar un plano orbital.

Al igual que cuando te subís a una bicicleta por primera vez, descubris que cuanto más rápido ibas, más fácil era mantenerte erguido. Esta estabilidad giroscópica mantiene un objeto girando en un movimiento circular en el mismo plano. Por ejemplo, considera una rueda de bicicleta que avanza a 20 km/h (5,6 m/s). Si suponemos que una rueda de bicicleta promedio tiene una masa de 2 kg y un diámetro de 0,6 metros, su momento angular es de aproximadamente 7 $kg\ m^2\ /\ s$.

Ahora pensemos en la velocidad a la que una nave espacial orbita la Tierra (véase la Figura 15). En una órbita baja a una altitud de 300 km, esto es increíblemente rápido, a aproximadamente 7,7 km/s, ¡o más de 27.000 km/h! En este caso, el momento angular específico, sin incluir la masa, es de unos 51.500 $km^2\ /\ s$.

Es difícil hacerse una idea de esto, pero para un satélite típico a esta velocidad, se necesitaría tanto propulsor como la masa de la nave espacial para cambiar su inclinación orbital en tan solo 15°.

Incluso para un satélite pequeño con una masa de 500 kg, ¡esto serían 500 kg de propulsor! Entonces, ¿cómo realizamos estos cambios de inclinación orbital? Lo analizaremos más adelante en este curso.

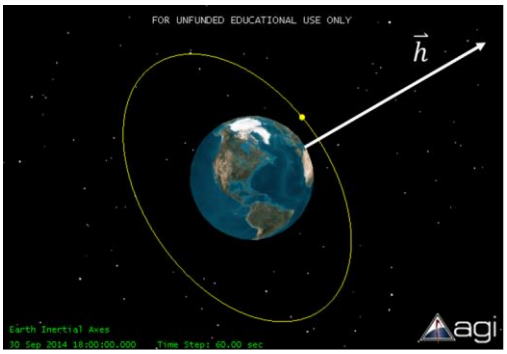


Figura 15: Un satélite en órbita constante alrededor de la Tierra.

ENERGÍA MECÁNICA ESPECÍFICA

Ahora sabemos mucho mas sobre la energía. Puede adoptar diversas formas, como la energía nuclear, la energía térmica, la energía eléctrica, la energía magnética y la energía química. La mecánica orbital se rige principalmente por la energía mecánica, por lo que nos centraremos en ella por ahora.
Sabemos que la energía mecánica total se compone de energía cinética y potencial. Por ejemplo, cuando se lanza un objeto al aire, al soltarlo, la energía se conserva, es decir, el sistema intercambia energía cinética y potencial, mientras que la energía total permanece constante. El sistema alcanza su mínima energía potencial y máxima energía cinética al soltarlo hacia arriba, pero se ralentiza y, de hecho, se detiene por completo en el punto más alto del lanzamiento, como se muestra en la Figura 16. En ese punto, la energía cinética, al menos instantáneamente, es cero. ¿Adónde se fue la energía? Se transformó en energía potencial al estar más lejos del suelo.

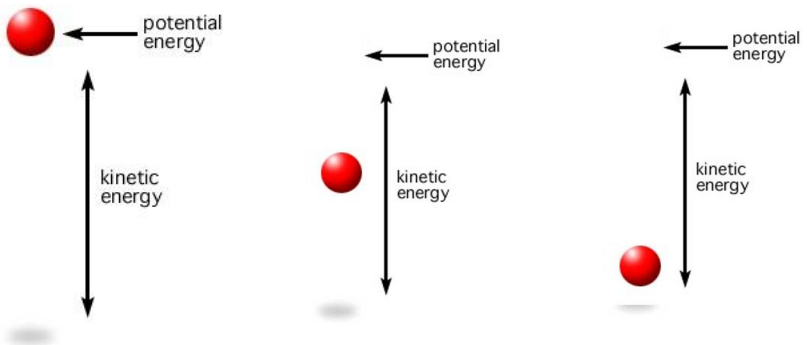


Figura 16: Una pelota que rebota oscilando entre energía cinética y potencial

Entonces, la energía mecánica total es igual a la combinación de energía cinética y potencial, y esas dos energías se intercambian de tal manera que la energía total es constante, como se muestra en la Ecuación 16.

$$E = EC + EP \tag{16}$$

Dónde:
E = energía mecánica total
EC = energía cinética EP = energía potencial

De la física conocemos las siguientes expresiones:

$$EC = \frac{1}{2} m\, V^2 \ (kg\ m^2/s^2)$$

$$EP = m\ g\ h\ (kg\ m^2/s^2)$$

Dónde:
m = masa
V = velocidad

$$g = \ constante\ gravitacional\ = \ 9{,}81\ m/s\ 2\ (para\ la\ Tierra)$$
$$h = \ altura\ desde\ el\ punto\ de\ referencia$$
$$(el\ punto\ de\ referencia\ es\ donde\ se\ define\ PE\ = \ 0)$$

Definiremos la energía mecánica específica, típicamente en unidades de $km^2\ /s^2$, como se muestra en la Ecuación 17:

$$\varepsilon = \frac{E}{m} \tag{17}$$

Recuerden que $EC = \frac{1}{2} m\, V^2$, por lo que el término de energía cinética específica se convierte en $V^2/2$.

Recuerden también que $EP = m\ g\ h$, donde g es la aceleración gravitacional, o la aceleración con la que caen los objetos cercanos a la Tierra. Usando la expresión para la fuerza de gravedad mencionada anteriormente e igualándola a la masa del objeto por su aceleración (en este caso, g), obtenemos lo que se muestra en la Ecuación 18:

$$F_{grav} = \frac{\mu\, m}{R^2} = m\, g$$

(18)

Entonces, vemos que la magnitud de la constante gravitacional puede escribirse como se muestra en la Ecuación 19:

$$g = \frac{\mu}{R^2}$$

(19)

Dado que esto actúa hacia el centro de la tierra y medimos R desde allí, esto actúa en dirección negativa, o como se muestra en la Ecuación 20:

$$g = -\frac{\mu}{R^2}$$

(20)

Entonces, como se muestra en la ecuación 21,

$$mgh = -\frac{\mu\, m\, R}{R^2}$$

(21)

Y dividiendo por masa y simplificando se obtiene el término de energía potencial específica en la ecuación 22:

$$EP = -\frac{\mu}{R}$$

(22)

Por lo tanto, la energía mecánica específica se convierte en lo que se muestra en la ecuación 23:

$$\varepsilon = \frac{V^2}{2} - \frac{V^2}{2}$$

$$EC = EP$$

(23)

Desde ε permanece constante, esto está relacionado con el tamaño orbital constante, a, o semieje mayor por lo que se muestra en la Ecuación 24:

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{2a} \tag{24}$$

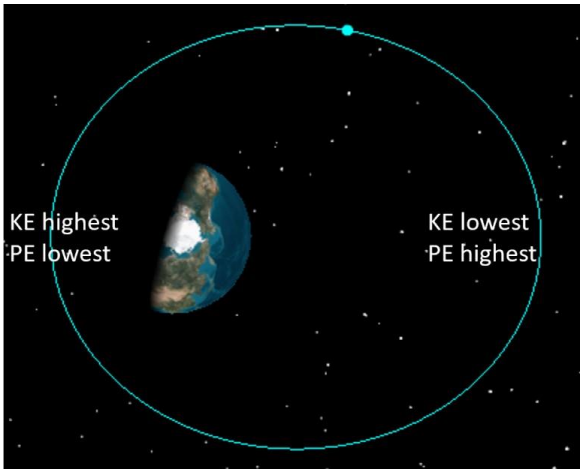


Figura 17: Satélite Geo que muestra energía mecánica constante en su rotación.

De esto podemos sacar tres conclusiones importantes:

1. Como la energía mecánica específica es constante, el tamaño de la órbita, a, es constante:
2. La EC y la EP se intercambian a medida que el satélite viaja alrededor de la órbita, por lo que el satélite se mueve más rápido en su punto más cercano a la Tierra, es decir, en el perigeo, y más lento en su punto más alejado de la Tierra, es decir, en el apogeo.
3. La energía potencial se define como negativa hasta que el objeto viaja muy, muy lejos de la Tierra.

Consideremos este último punto con más detalle. Primero, vemos que el término de energía potencial se vuelve cero solo cuando R tiende al infinito. Esto, en teoría, significaría que el objeto aún posee energía potencial hasta que se encuentra infinitamente lejos de la Tierra. Estableceremos una definición más práctica de ***"infinitamente lejos"*** como la *esfera de influencia terrestre*, que para nuestros propósitos definiremos aproximadamente a 1 millón de kilómetros del centro de la Tierra.

Por lo tanto, mientras un satélite se encuentre dentro de la esfera de influencia terrestre, tendrá energía potencial negativa y, por lo tanto, energía mecánica específica negativa (véase la Figura 18).

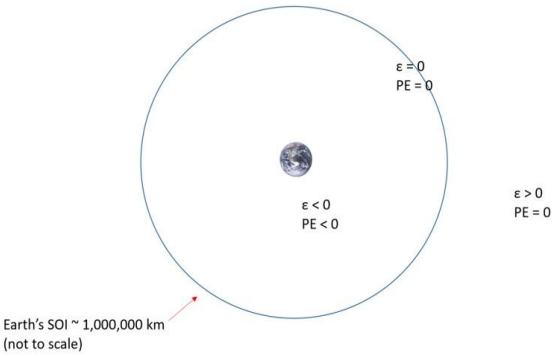


Figura 18: Satélite Geo que muestra energía mecánica negativa en su rotación.

Por ejemplo, un satélite en una órbita geográfica circular tendrá una energía mecánica específica (como se muestra en la ecuación 25) de aproximadamente:

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{2a} = -\frac{398600{,}5\ \frac{km^3}{s^2}}{2(42.000)km} = -4{,}6\ \frac{km^2}{s^2} \tag{25}$$

Un satélite en una órbita circular de 10 000 km tendrá una energía mecánica específica de aproximadamente $-20\ km^2\ /\ s^2$. Observen que la magnitud es mayor en comparación con el satélite geoestacionario, cuya energía es de aproximadamente $-4{,}6\ km^2\ /\ s^2$, pero su valor es menor.

La Estación Espacial Internacional viaja en órbita terrestre baja y su energía mecánica específica es aún menor, de $-30\ km^2\ /\ s^2$. Esto se muestra en la Figura 19.

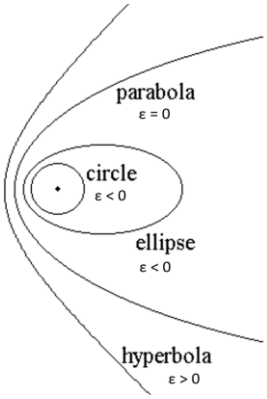


Figura 19: Determinadas por la excentricidad (ϵ), las secciones cónicas de un cuerpo celeste

Esta relación también nos indica que, fuera de la esfera de influencia terrestre, dado que el término de energía potencial tiende a cero, solo queda la energía cinética positiva, por lo que la energía mecánica específica total es positiva. Esto solo puede ser así si el semieje mayor es negativo, como ocurre en las órbitas interplanetarias con respecto a la Tierra. Analizaremos estas trayectorias hiperbólicas más adelante en este curso.

En la siguiente sección uniremos estas leyes para desarrollar la ecuación de movimiento de dos cuerpos y ampliar nuestra comprensión de la mecánica orbital.

LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO DE DOS CUERPOS

La ecuación de movimiento de dos cuerpos, a veces llamada el ***problema restringido de dos cuerpos***, sentará las bases de nuestra comprensión de la mecánica orbital. Para desarrollarla, recordemos la Ley de Gravitación Universal de Newton, como se muestra en la Ecuación 26:

$$F_{grav} = G\frac{m_1 m_2}{R^2} \tag{26}$$

Definimos una constante gravitacional para los satélites en órbita terrestre como se muestra en la Ecuación 27:

$$\mu_{Tierra} = G\, m_{Tierra} = 398600{,}5\ \frac{km^3}{s^2} \tag{27}$$

Entonces, la Ley de Gravitación Universal de Newton para un objeto alrededor de la Tierra se convierte en lo que se muestra en la Ecuación 28:

$$F_{grav} = \frac{\mu\, m}{R^2} \tag{28}$$

Analicemos esto con más detalle, como se muestra en la Figura 20. Supongamos que solo hay dos cuerpos involucrados, la Tierra y el satélite, y que la gravedad es la única fuerza que actúa sobre ellos. El vector de posición, medido desde el centro de la Tierra hasta el satélite, nos da este escenario:

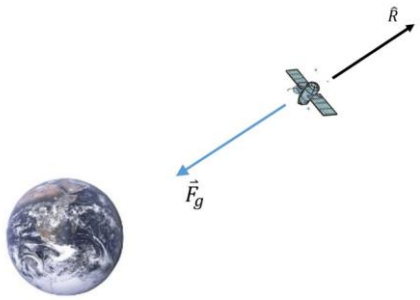


Figura 20: La derivación de la ley de Newton.

Ahora, utilizando la segunda ley de Newton y asumiendo que tanto la Tierra como el satélite tienen masas constantes como se muestra en las ecuaciones 29-31:

$$\sum \vec{F} = m\,\vec{a} \tag{29}$$

$$-F_g\,\hat{R} = m_{sat}\,\ddot{\vec{R}} \tag{30}$$

$$-\frac{\mu\, m_{sat}}{R^2} = m_{sat}\,\ddot{\vec{R}} \tag{31}$$

Reordenando y dividiendo por la masa del satélite, m_{sat} , se obtiene ***la ecuación de movimiento de dos cuerpos*** (32):

$$\ddot{\vec{R}} + \frac{\mu}{R^2}\,\hat{R} \tag{32}$$

dónde

$$\vec{R} = vector\ posición$$
$$\dot{\vec{R}} = \vec{V} = vector\ velocidad$$
$$\ddot{\vec{R}} = \vec{a} = vector\ aceleración$$
$$\hat{R} = vector\ unit\ en\ la\ dirección\ \vec{R}\ \ \mu = Gm_{tierra}$$

y R es la magnitud del vector posición, por lo que con esta ecuación (33),

$$\hat{R} = \frac{\vec{R}}{R}$$

(33)

La ***ecuación de movimiento de dos cuerpos*** toma la forma (34):

$$\ddot{\vec{R}} + \frac{\mu}{R^3}\,\hat{R} = 0$$

(34)

Tengamos en cuenta las suposiciones que hicimos a lo largo del camino:

1. Para aplicar las Leyes de Newton, nuestro sistema de coordenadas debe ser suficientemente inercial. Analizaremos más a fondo los sistemas de coordenadas en el siguiente capítulo.
2. La fuerza de la gravedad de la Tierra es la única fuerza que actúa sobre el satélite.
3. Para utilizar la Segunda Ley de Newton, debemos asumir que la masa del satélite (y la de la Tierra) no cambia.
4. La Tierra es esféricamente simétrica y tiene densidad uniforme.
5. La masa de la Tierra es mucho mayor que la masa del satélite.
6. Sólo hay dos cuerpos.

Observemos que la ecuación de movimiento de dos cuerpos es una ecuación diferencial vectorial no lineal de segundo orden. En la siguiente sección, integraremos numéricamente esta ecuación de movimiento para demostrar que la solución es una sección cónica, como se muestra en la Ecuación 35. Sin embargo, existe una forma analítica de la solución que podemos obtener en términos de coordenadas polares. Para una derivación completa de esta expresión, véase Bate (1971).

$$R = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\,\cos\nu}$$

(35)

Para $0 < e < 1$.

Consideremos ahora esta geometría en la Figura 21.

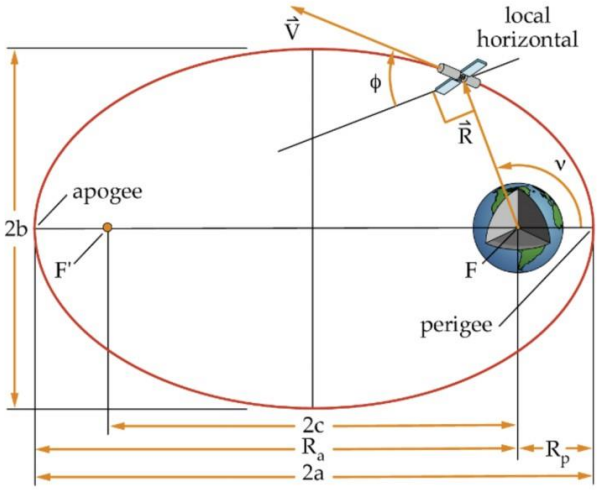


Figura 21: Geometría asociada para la ecuación de movimiento de dos cuerpos

Semieje mayor

$$a = semieje\ mayor\ (km)$$

$$R = \frac{a(1-e^2)}{1+e\ \cos\nu}$$

$$R_a = Radio\ al\ apogeo\ (km)$$
$$R_p = Radio\ al\ perigeo\ (km)$$
$$\epsilon = energía\ mecánica\ específica\ (km^2/s^2)$$

Para las cuatro secciones cónicas que consideraremos, estos son los valores para el semieje mayor

$$Círculo: a = R$$
$$Elipse: a > 0$$
$$Parábola: a = \infty$$
$$Hipérbola: a < 0$$

Excentricidad

$$e = excentricidad\ (sin\ unidades)$$
$$e = c/a$$
$$e = \frac{R_a - R_p}{R_a + R_p}$$

$$c = distancia\ entre\ los\ puntos\ focales\ de\ la\ elipse$$

Para las cuatro secciones cónicas que consideraremos, estos son los valores de excentricidad

$$\begin{gathered} círculo: e = 0 \\ elipse\ 0 < e < 1 \\ parábola\ e = 1 \\ hipérbola\ e > 1 \end{gathered}$$

Anomalía verdadera

$$V = anomalía\ verdadera\ (grados) \tag{36}$$

La anomalía verdadera mostrada en la Ecuación 36 es el ángulo entre el perigeo y el vector de posición respecto al satélite. Pronto descubriremos que el vector de excentricidad siempre apunta hacia el perigeo de una órbita.

Si conocemos el semieje mayor y la excentricidad de una órbita, también podemos determinar expresiones para R_a y R_p utilizando la solución de la ecuación de movimiento de dos cuerpos. Por ejemplo, para el radio del perigeo, podemos usar la Ecuación 37:

$$R = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\ \cos\nu} \tag{37}$$

En perigeo, o una verdadera anomalía $\nu = 0$ y al expandir el numerador, esta ecuación (38) se convierte en:

$$R_p = \frac{a(1-e)(1+e)}{1 + e\ \cos(0)} = \frac{(1-e)(1+e)}{1+e}$$
$$R_p = a(1-e) \tag{38}$$

En apogeo, o una verdadera anomalía $\nu = 180$ y al expandir el numerador, esta ecuación (39) queda:

$$R_a = \frac{a(1-e)(1+e)}{1 + e\ \cos(180)} = \frac{(1-e)(1+e)}{1+e}$$
$$R_a = a(1+e) \tag{39}$$

Fin del capítulo