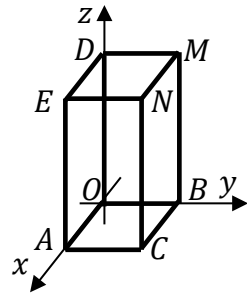


Segundo Parcial de Álgebra y Geometría Analítica

Apellido/s y Nombre/s:

Ej1		Ej2			Ej3	Ej4	Ej5		Calificación
1	2	1	2i	2ii			1	2	

Ejercicio 1. El prisma rectangular $OABCDEMN$ con base cuadrada de lado 1 y altura 2 está ubicado como se muestra en la figura. Sean las transformaciones lineales siguientes:



- $f \equiv$ rotación alrededor del eje z en un ángulo $\pi/4$ en sentido horario;
- $g \equiv$ proyección ortogonal sobre el plano coordenado xz ;

- 1.1) ¿Qué forma tiene el transformado del rectángulo $OCDN$ cuando se le aplica primero f y a continuación g ? Esquematizar un gráfico de la imagen final de $OCDN$.
- 1.2) Dar la forma explícita de la composición $h = g \circ f$ y de la composición $w = f \circ g$. ¿Hay alguna parte del prisma que se mantenga invariante frente a estas dos composiciones? Justificar la respuesta. En caso afirmativo, indicar cual es.

Ejercicio 2. Sea S_1 el subespacio vectorial generado por el conjunto

$$A = \{\vec{u} = (1,0,2,1); \vec{v} = (2,1,-1,0); \vec{w} = (c,0,d,2)\}$$

y sea S_2 el subespacio formado por todos los vectores ortogonales al vector $\vec{q} = (1,0,1,0)$.

- 2.1) Hallar para qué valores reales de c y d el conjunto A es linealmente dependiente. Dar todas las soluciones posibles.
- 2.2) i. Escribir la o las condiciones de pertenencia a S_2 mediante una o más ecuaciones según corresponda. ¿Qué dimensión tiene?
Lo mismo para el subespacio S_1 cuando $c = 2$ y $d = 0$.
- ii. Para las respuestas dadas en i., hallar el subespacio $S = S_1 \cap S_2$, su dimensión y una base.

Ejercicio 3. Analizar si existe una transformación lineal $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ tal que la imagen del plano coordenado xy sea el plano $\pi: x - z = 0$, y que simultáneamente $(0,0,1) \in Nu(f)$. Si no existe, justificar la respuesta. Si existe y es única, dar la forma explícita de f . Si existe pero no es única, dar la forma explícita de dos de las respuestas posibles.

Ejercicio 4. Sea $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 / (x,y,z) = \mu(1,-1,2), \forall \mu \in \mathbf{R}\}$. Hallar la proyección ortogonal del vector $\vec{w} = (1,3,-2)$ sobre el subespacio complemento ortogonal de S (S^\perp).

Ejercicio 5. Sea la transformación lineal $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, cuya matriz asociada es $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ k & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Analizar cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Justificar en forma clara la respuesta.

- 5.1) No existe valor real k para el que la matriz A sea diagonalizable.
- 5.2) Cualquiera sea el valor real k el vector $\vec{u} = (0,1,-2)$ pertenece al subespacio $Im(f)$.

Segundo Parcial de Álgebra y Geometría Analítica – FRH UTN

Apellido/s y Nombre/s:

Curso:

Fecha:

Ejercicio 1				Ejercicio 2				Ejercicio 3			Calificación
1	2	3	4	1.i	1.ii	2	3	1	2	3	

Ejercicio 1. Sea el subespacio $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 / x = z = t\}$ y el conjunto:

$$C = \{\vec{v}_1 = (1,1,1,1); \vec{v}_2 = (0,1,1,1); \vec{v}_3 = (1,2,2,2); \vec{v}_4 = (1, a, a^2, a)\}.$$

1.1. Analizar si existen valores reales a para los que el subespacio generado por C tenga dimensión 3. Justificar la respuesta. Si existen, dar todas las soluciones posibles e indicar cuál es el subespacio generado.

1.2. Dar la forma explícita y la matriz asociada de la transformación $f: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ tal que a cada vector de \mathbf{R}^4 le asigna su proyección ortogonal al subespacio generado por:

$$\{\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2; \vec{v}_2\}.$$

1.3. ¿Existe una transformación lineal $g: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ tal que se cumpla que $Nu(g) = S$ y \vec{v}_1 sea invariante frente a g ? Justificar la respuesta. Si existe, ¿es única?

1.4. Dar una base ortogonal del subespacio complemento ortogonal de S .

Ejercicio 2. Sea cuerpo tetraédrico con vértices en $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, que se muestra en la figura, sea M el punto medio entre A y B , y sean las dos transformaciones lineales de $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ correspondientes a:

f : rotación alrededor del eje z en sentido antihorario de $\pi/4$.

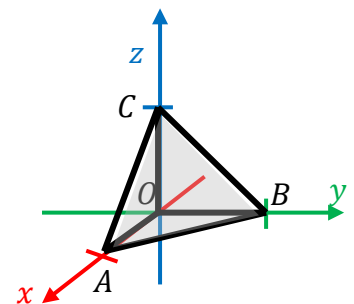
g : proyección ortogonal sobre el plano xz .

2.1. i. Al cuerpo se le aplica primero f . Indicar la ubicación de los transformados de cada vértice y del punto M . ¿Qué forma tiene el cuerpo transformado?

ii. Luego, en forma sucesiva, se le aplica la transformación g . ¿Qué forma tiene la imagen final del cuerpo transformado? ¿Cuál es la ubicación de los transformados finales de cada vértice y del punto M ?

2.2. Sea h la transformación correspondiente a la composición, en el orden descrito, de las transformaciones f y g . Dar la forma explícita de h y su matriz asociada.

2.3. ¿Existe alguna transformación lineal w tal que aplicada luego de la sucesión de transformaciones anteriores vuelva el cuerpo a su estado inicial? Justificar la respuesta.



Ejercicio 3. Analizar si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Justificar en forma clara la respuesta. Si es falsa, dar un contraejemplo. Si es verdadera, demostrarla.

3.1. No existe valor real k para el que la matriz A sea diagonalizable con $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & k \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3.2. $A = \{\vec{u}; \vec{v}\} \subset \mathbf{R}^3$ es un sistema de generadores del subespacio S de dimensión 1, entonces el conjunto $C = \{2\vec{u}; \vec{u} + \vec{v}; \vec{v} \times \vec{u}\}$ genera el mismo subespacio S .

3.3. Dada la transformación lineal $f(x, y, z) = (x + y, 2x + 2y, x + y + z, -2x - 2y)$ existen exactamente dos valores reales de k para los que el vector $\vec{v} = (k, 2k, k^2 - k, -2k)$ pertenezca al subespacio $Im(f)$.