Modelo 1 – Segundo Parcial de Álgebra y Geometría Analítica

El examen se realiza <u>en tinta</u>. No se tendrán en cuenta cálculos dispersos ni procedimientos poco claros.

Ejercicio 1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Hallar los subespacios definidos a continuación, dar un vector genérico de los mismos, indicar una base y dimensión para cada uno de ellos.

$$S_1 = \{X \in \mathbf{R}^{2\times 2} / A \cdot X = X\};\ S_2 = \{X \in \mathbf{R}^{2\times 2} / X^T \cdot A = -X\};\ S_3 = S_1 \cap S_2$$

Ejercicio 2. Indicar para que valores $k \in \mathbf{R}$ el subespacio generado por $\{\vec{a} = (1,2,-1); \vec{b} = (1,2,3)\}$ es el mismo que el generado por $\{\vec{a} = (1,2,-1); \vec{b} = (1,2,3); \vec{c} = (-1,-2-2k+k^2,0)\}$. Justificar la respuesta.

Ejercicio 3. Sea el subespacio $S = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 / x - y = 0\}$.

a) Demostrar que *S* es un subespacio. Indicar dimensión y dar una base.

b) Hallar el subespacio complemento ortogonal de *S*, $S^{\perp}$, escribir un vector genérico del mismo. Hallar dimensión y una base.

c) Sea $f: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la transformación lineal que a cada vector de $S^{\perp}$ lo triplica y los transformados de los vectores de *S* dan el vector nulo de $\mathbf{R}^4$. Hallar la forma explícita de la transformación *f* y su matriz asociada A_f.

Ejercicio 4. Sea $g: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tal que a cada vector $\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ le hace corresponder su proyección ortogonal sobre el subespacio $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 / 2x - y = 0 \wedge z = 0\}$.

a) Hallar la forma explícita de *g* y su matriz asociada A_g.

b) Indicar en qué se transforma la superficie triangular contenida en el plano coordenado *xy* cuyos vértices son *O*(0,0,0), *Q*(1,0,0), y *H*(1,2,0) cuando se le aplica la transformación *g*. Explicar el razonamiento hecho para llegar a esa conclusión.

Ejercicio 5. Indicar si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Justificar claramente cada respuesta.

a) Sea $B_1 = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3\}$ una base ortonormal de un subespacio *S* de $\mathbf{R}^5$. Sea $B_2 = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2\}$ una base ortonormal del subespacio complemento ortogonal de *S*, $S^{\perp}$. El conjunto $C = \{\vec{u}_1; proy_{\vec{v}_3}\vec{u}_2\}$ es linealmente independiente.

b) Si al vector $\vec{v} = (1,1,1)$ se le aplican en forma sucesiva, siguiendo el orden de presentación, las siguientes transformaciones lineales:

$f_1: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, reflexión sobre el plano coordenado (*xz*);
$f_2: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, rotación de $\pi/4$ en sentido antihorario con respecto al eje *z*;
$f_3: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, proyección sobre el eje coordenado *x*;

La imagen final obtenida es $(\sqrt{2}, 0, 0)$.

Modelo 2 Segundo Parcial de Algebra y Geometría analítica UTN – FRH

1					2						3	Calificación
a	**b**	**C1**	**C2**	**C3**	**a**	**b**	**c**	**D1**	**D2**	**g**		

1) Sea el conjunto $A = \left\{\overline{a} = (k+1;1;-2), \overline{b} = (1;-1;1), \overline{c} = (5;k-3,0)\right\}$.

a) Hallar los valores reales de k tales que A sea base de $\mathbb{R}^3$

b) Si k= 3, hallar las coordenadas de h para que $\overline{u} = (2h+1, h-2, 1)$ sea C.L de $\overline{a}$ y $\overline{b}$

c) Sea S el subespacio generado por el vector $\overline{b}$ (S = gen$\left\{\overline{b}\right\}$). Se define la T.L f que a cada vector del espacio lo proyecta ortogonalmente sobre el subespacio S. Se pide:

c1) Hallar el subespacio núcleo e imagen de f. Dar una base de cada uno de ellos e interpretar geométricamente. Si hay algún vínculo entre ellos explíquelo

c2) Calcular los autovalores de f y los subespacios de autovectores correspondientes. Dar una base para cada uno de ellos.

c3) Hallar la forma explícita de la T.L f y su matriz asociada.

Nota: Para los puntos c1) y c2) no debes realizar cálculos, es decir, hay que interpretar la T.L geométricamente.

2) Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$ asociada a la T.L f, se pide:

a) Para que valores de a y b se verifica que $\overline{u} = (b,3,1) \in Nu(f)$

b) Para que valores de a se verifica $\dim(Nu(f)) = 1$

c) Encontrar el valor de a para que $\lambda = 0$ sea autovalor de f.

d) Si a = 5

d1) Calcular una base y dimensión del Nu(f)

d2) Hallar una base y dimensión del $\left[\mathrm{Im}(f)\right]^{\perp}$

g) Si g es la T.L que gira alrededor del eje z en sentido antihorario un ángulo $\phi = \pi$. Hallar la forma explícita de (f o g) cuando a = 0

3) Indicar si la siguiente proposición en verdadera o falsa. Si es verdadera demuéstrela, si es falsa justificar su razón o dar un contraejemplo:

Si $A = \left\{\overline{a}, \overline{b}\right\} \subset \mathbb{R}^3$ genera un subespacio S , dim(S)=1 $\rightarrow B = \left\{\overline{a}, \overline{a} - \overline{b}, \overline{a} \times \overline{b}\right\}$ genera un plano.

Modelo 3 de 2do Parcial AYGA

1) a) Indicar si el conjunto $A = \left\{\overline{a} = (1,-1,2); \overline{b} = (1,0,1)\right\}$ es una base de los siguientes subespacios vectoriales.

i) $S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - z = 0 \wedge y + z - x = 0\right\}$

ii) $S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - y - z = 0\right\}$

b) Considerando los mismos subespacios del apartado anterior:

i) Calcular una base ortonormal para S_1.

ii) Hallar los valores reales de *h* para que $\overline{u} = \left(2h, h, h^2 - 3\right)$ sea ortogonal a S_1.

iii) Calcular el subespacio complemento ortogonal a S_2.

2) Definida la transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2x2} / f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x - z & x - y \\ 3x - y - 2z & x + z \end{pmatrix}$:

a) Determinar el núcleo y la imagen de f. Encontrar una base para cada uno de ellos e indicar su dimensión.

b) Hallar el valor real de *k*, para que $\overline{a} = (k - 3, -2k + 6, 0)$ pertenezca al núcleo de la transformación.

3) Sea f la T.L. que proyecta ortogonalmente un vector del espacio sobre el plano *xy* y *g* la T.L. que provoca un giro alrededor del eje z en sentido antihorario un ángulo $\phi = \pi$. Se pide:

a) Hallar el subespacio núcleo e imagen de f. Dar una base de cada uno de ellos e interpretar geométricamente. Si hay algún vínculo entre ellos explicarlo.

b) Calcular los autovalores de f y los subespacios de autovectores correspondientes. Dar una base para cada uno de ellos.

c) Si $\overline{u} = \left(x_1, y_1, 0\right)\ \forall x_1 \in \mathbb{R}\ \forall y_1 \in \mathbb{R}$. Calcular $(f \circ f)(\overline{u})$. En función a la respuesta dada, ¿$\overline{u}$ es autovector de f? En caso afirmativo indicar el autovalor correspondiente.

d) Hallar la forma explícita de ($g \circ f$) y su matriz asociada.

Nota: Para la parte a) b) y c) no es necesario realizar cálculos, puedes interpretar geom. la T.L. f.

4) Sea $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, la matriz asociada a una T.L f,

a) Hallar autovalores y autovectores de f

b) ¿Es diagonalizable C? justifique su respuesta

5) Indicar si la siguiente proposición en verdadera o falsa. Si es verdadera demostrarla, si es falsa justificar su razón o dar un contraejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ es la matriz asociada a la T.L. $f \to A$ es diagonalizable $\forall k \in \mathbb{R}$.

Modelo 4 de 2do parcial AYGA 2019

Ejercicio 1: Dado el subespacio $S=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 / x-y=0 \wedge z+2y=0\}$

a) Hallar una base ortonormal de S e Indicar su dimensión.
b) Hallar el conjunto formado por todos los vectores ortogonales a S. $(S^{\perp})$. Obtener base y dimensión del mismo.

Ejercicio 2:

a) Calcular la Transformación lineal $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ sabiendo que:

$(1,-2)\in Ng$ y $g(0,1)=(1,-1,2)$

b) Si $A=\begin{pmatrix}-2 & -1 & a\\ a & 0 & 2\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}$ es la matriz asociada a la transformación lineal f :

b1) Si $a=2$, calcular base y dimensión del núcleo e imagen de f

b2) Calcular $a\in\mathbb{R}$ y $b\in\mathbb{R}$, para que 0 sea autovalor de f y f(1,b,0) = (0,-2,2)

b3) El vector $\bar{u}=(2,-4)$, ¿pertenece al núcleo de $f\circ g$?. Justificar

Ejercicio 3: Sea la transformación lineal $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, tal que a cada vector del espacio le hace corresponder su proyección ortogonal sobre la recta $(x,y,z)=\lambda(1,-1,1)\,\forall\lambda\in\mathbb{R}$

a) Describir geométricamente los subespacios núcleo e imagen.
b) Describir geométricamente los autovalores y subespacios de autovectores correspondientes.
c) Escribir la forma explícita de f y su matriz asociada.

Ejercicio 4: Sea $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}\mathrm{a} & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ obtenga todos los valores de $\mathrm{a}\in\mathrm{R}$ tales que:

a) Sus autovalores sean distintos. ¿Es diagonalizable para estos valores de a?
b) A tenga un autovalor de multiplicidad 2. ¿Es diagonalizable? Justifique.