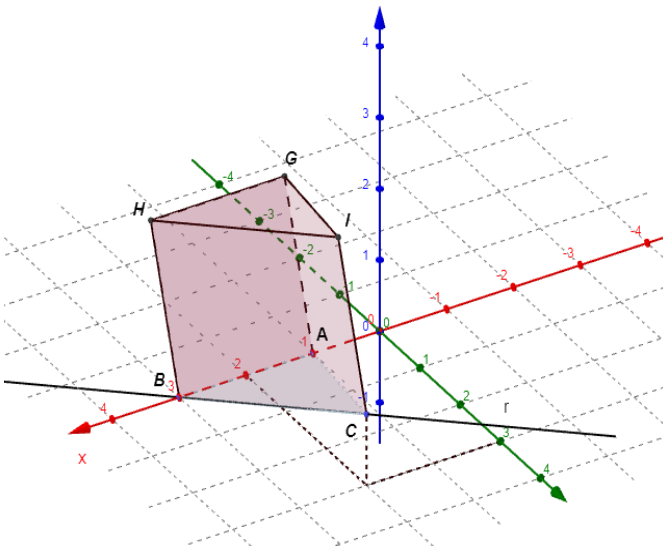
Primer Parcial de Álgebra y Geometría Analítica – Modelo 1

1) Dado el prisma *ABCIHG*, se conocen las coordenadas cartesianas de los puntos $C(2,3,1)$ e $I\left(2,\frac{5}{2},3\right)$, también que los puntos $A\ y\ B$ pertenecen al eje x. Sea r la recta que determinan los puntos B y C. Se pide:



a) Las coordenadas cartesianas de los puntos que pertenezcan a la recta r y disten del origen de coordenadas 3 unidades de longitud. ¿La respuesta es única?

b) Dada la recta $s \equiv \mu(h,-1,1)+(2,3,5)\ \forall\mu \in \boldsymbol{R}$ calcular, si existe, el valor del parámetro h real de manera tal que las rectas $r\ y\ s$ resulten coplanares. Para el valor de h hallado analizar si las rectas son paralelas o secantes, en caso de poseer intersección, dar las coordenadas cartesianas del punto.

c) El volumen del prisma.

d) Las ecuaciones generales de los planos que contienen a las caras triangulares del prisma. Calcular la distancia entre los mencionados planos.

2) Estudiar la posición relativa de la recta $t \equiv \begin{cases} \frac{2-x}{2} = \frac{z-1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$ y el plano de ecuación general $\pi\ \equiv 2x+y=1$. Si son secantes encontrar el punto de intersección; sin son paralelos, la distancia entre ellos.

3) Sea $A \in R^{3\times3}/a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j\ \vee\ (i-j)=-2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$, $B=\begin{pmatrix} 8 & 9 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C \in R^{3\times3} / \det(2C)=24$.

a) Contruir la matriz A. Calcular A^2, A^3 e inducir una hipótesis para A^n.

b) Calcular el $\det\left(A^3 \cdot B^T \cdot C\right)$.

c) ¿Es posible hallar $h \in R / \left(A \cdot B\right)^T = \begin{pmatrix} 13 & -1 & 5 \\ 2h+1 & 0 & 2 \\ h-6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$? Si la respuesta es afirmativa, calcularlo. Caso contrario, justificar.

4) Indicar si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa; si es verdadera demostrarla, si es falsa dar un contraejemplo.

a) Sean las matrices $A\epsilon R^{n\times n}, B\epsilon R^{n\times n}$ y $C\epsilon R^{n\times n}$. Si A es una matriz simétrica e involutiva de índice 2 $(A^2=I)$ y B es una matriz antisimétrica $\rightarrow (A\cdot B\cdot C^T)^T\cdot A + A\cdot B = (A-C)\cdot B$.

b) Sean los vectores $\vec{u},\vec{v}\ y\ \vec{w}\ \epsilon\ R^3$ tales que $\vec{u} \parallel \vec{v},\ \vec{v}\perp\vec{w}$ y $\vec{u},\ \vec{v}\ y\ \vec{w}$ coplanares, entonces:

$$-2\vec{v}\times(\vec{u}\times\vec{w})+5(\vec{u}\times\vec{v})+(\vec{u}\cdot\vec{v}\times w)\vec{u}-2(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}=\vec{0}.$$

Primer Parcial de Álgebra y Geometría Analítica – Modelo 2

Ejercicio 1: Sean los puntos $A(1,0,2), B(2,-1,1), C(1,1,1)$ y el punto D perteneciente a la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+z=0 \\ x-y=-1 \end{cases}$.

La recta s definida por los puntos A y B.

El plano π perpendicular a la recta s tal que $s \cap \pi = \{B\}$.

- **a)** Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \alpha \overrightarrow{AC}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, calcular $\alpha \in R$ tal que $\vec{u} \perp \vec{v}$.
- **b)** Hallar las coordenadas del punto D tal que no sea coplanar a los puntos A, B y C.
- **c)** El punto B divide al segmento AP en tres partes iguales, quedando B más cercano a A.
  - **i)** Dar las coordenadas del punto P. Dar la ecuación del plano β paralelo al plano π que pasa por el punto P.
  - **ii)** Si se coloca un cubo tal que dos de sus caras opuestas estén contenidas en los planos π y β, ¿cuál es el volumen del cubo?

Ejercicio 2:

a) Hallar la matriz A que verifique la siguiente igualdad $\left(I+2A\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

b) Sean M, P y Q matrices cuadradas de orden tres, el $\det(-2Q^2) = -32$, el $\det(M \cdot Q^{-1}) = 10/3$ y P es una matriz triangular superior tal que $p_{1,1} = p_{3,3} = 5 \wedge p_{2,2} = 1$. Calcular $\det(Q^T \cdot M \cdot P^3)$.

Ejercicio 3: ¿Es posible definir un plano π que contenga al eje y y a la recta $r: x-1 = y = -z$? Si la respuesta es afirmativa, dar la ecuación general del plano π. Si es negativa, calcular la distancia entre el eje y y la recta r.

Ejercicio 4:

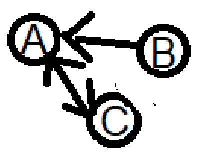
Analizar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar la respuesta.

a) Si $A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times n}$ y $C \in R^{n\times n}$ son tales que A es ortogonal, B es antisimétrica, C es invertible y $A+B+C=O$ donde O es la matriz nula de orden n, entonces

$$C^{-1}\left(A \cdot C^T\right)^T \cdot A + (A+B)^{-1} \cdot C + B^T = -B.$$

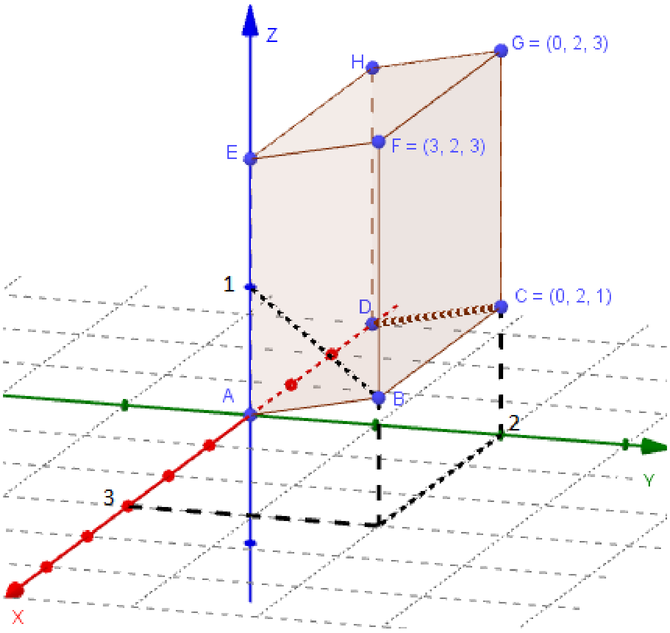
b) Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son versores que forman un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ entonces $\vec{a} - \vec{b}$ es versor.

Ejercicio 5:

	M es la matriz de comunicación que representa a la red de la figura. I es la matriz identidad de orden 3. $A = I + M$.	Expresar las matrices y calcular A, A^2, A^3, A^4 e inducir una hipótesis para $A^n \ n \in N$.

Primer Parcial AyGA – Modelo 3

Ejercicio 1: Sea el cuerpo de la figura ABCDEFGH se pide responder los siguientes ítems:



a) Hallar el plano que pasa por los puntos de coordenadas ABCD.

b) Calcular el área del triángulo EFH.

c) Hallar la distancia entre el punto M y la recta que pasa por los puntos E y F, siendo M el punto medio entre E y G.

Ejercicio 2: Dada la recta r y la ecuación del plano π:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}; \ \pi: (h+1)x - y + z + 3 = 0,$$

responder:

a) El valor real de h para que la recta y el plano resulten paralelos.

b) Para el valor de h hallado determinar la distancia entre la recta y el plano.

Ejercicio 3: Sean los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w} \epsilon R^3$ tales que $\vec{u} \parallel \vec{v}, \vec{v} \perp \vec{w}$ y $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ coplanares, verificar la siguiente proposición:

$$-2\vec{v} \times (\vec{u} \times \vec{w}) + 5(\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w})\vec{u} - 2(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} = \vec{O}.$$

Ejercicio 4: Sea $A \in R^{3\times3}$ que cumple con la siguiente ley de formación:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 2 \vee j = 2 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

a) Construir la matriz A.

b) CalcularA^2, A^3 e inducir una hipótesis para A^n.

Ejercicio 5: Sea $A \in R^{3\times3}$ y $B \in R^{3\times3}$, de las cuales se conoce:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 9 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } det(2B) = 16.$$

Hallar:

a) $det(A^T \cdot B)$.

b) Hallar la inversa de A: A^{-1}.

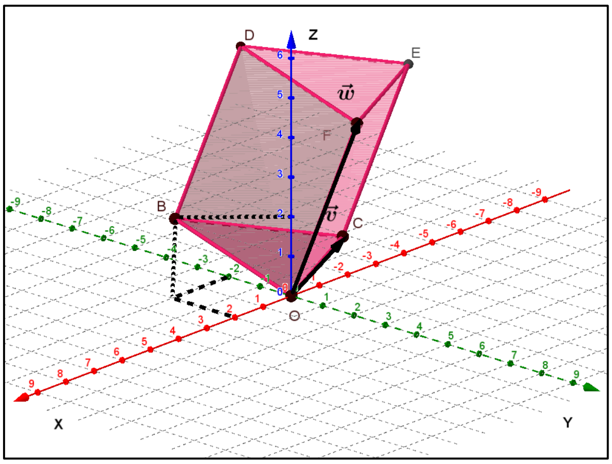
c) Calcular $det[(A \cdot B)^{-1}]$.

Ejercicio 6: Sean las matrices $A \epsilon R^{n\times n}, B \epsilon R^{n\times n}$ y $C \epsilon R^{n\times n}$. Si A es una matriz simétrica e idempotente de índice 2 $(A^2 = A)$, B es una matriz ortogonal, verificar la siguiente proposición:

$$(A \cdot B \cdot C^T)^T \cdot A + (B^{-1} + A) \cdot B = C \cdot B^T \cdot A + I + A \cdot B$$

Primer Parcial AyGA – Modelo 4

1) En el cuerpo de vértices OBCDEF, se sabe qué $\vec{v}=\overrightarrow{OC}=(-2,0,1)$ y $\vec{w}=\overrightarrow{OF}=(2,4,6)$:



a) Hallar el área del triángulo FDE.

b) Sabiendo que $\vec{u}=(h,2k,3)$ hallar los valores reales de h y k para que $proy_{\overline{BF}}\vec{u}=\vec{0}$.

c) ¿Es posible hallar el valor real del parámetro k para que A(k+1,2,–4k) pertenezca al plano que pasa por los puntos OBDF? En caso afirmativo calcularlo.

d) Estudiar la posición relativa entre el plano que pasa por los puntos OBC y la recta $t:\begin{cases} x+2y=9 \\ y-z=3 \end{cases}$. Si son secantes encuentre el punto de intersección, sin son paralelos la distancia entre ellos.

2) Dado el plano $\pi_1 \equiv x+2y+z+2=0$ y sea r_1 la recta perpendicular a π_1 que pasa por el punto A(1,3,1). Hallar el/los puntos de r_1 que se encuentra a 2 unidades de distancia del plano $\pi_2 \equiv -x+2y+2z-4=0$.

3) Dadas las matrices de orden 2:

$$A \in R^{2\times2} \,/\, a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & i>j \\ i-j & \text{en otro caso} \end{cases} \quad , \; B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix}$$

a) Calcular $A^2, A^3 y\ A^4$. Expresar una inducción para A^n.

b) Determinar los valores reales de a, b y c de modo que $|C|=8$ y $B\cdot C=C\cdot B$.

c) Calcular $det[(3A^T\cdot B)^T]$.

4) Indicar si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa; si es verdadera demuéstrela, si es falsa dar un contraejemplo.

a) Sean los vectores $\vec{u},\vec{v}\ y\ \vec{w}\ \epsilon\ R^3$ tales que $\vec{u}\perp\vec{v} \rightarrow (\vec{u}+\vec{v})\times\vec{u}+\vec{u}\times(\vec{u}\times\vec{v})+|\vec{u}|^2\vec{v}=-\vec{u}\times\vec{v}$.

b) Sean A, B y C matrices cuadradas de orden n, donde A es simétrica e involutiva de índice 2, y B una matriz antisimétrica, entonces se verifica $(A\cdot B\cdot C^T)^T\cdot(A\cdot B)=C\cdot B^2$.