U.T.N. – F.R.H. – Segundo Parcial de Álgebra y Geometría Analítica – Fecha: ……..

Alumno:………………………………………………………………………………………… Curso: …..

1a 1b 1c	2a 2b	3a 3b	4a 4b 4c	Calificación

Ejercicio 1: Dado el conjunto $C=\left\{\vec{a}=(1,-2,3);\vec{b}=(0,1,x);\vec{c}=(0,x,4)\right\}$ de vectores de $\mathbf{R}^3$, se conoce $f(\vec{a})=\vec{0}, f(\vec{b})=-\vec{b}, f(\vec{c})=2\vec{c}$. Responder las siguientes cuestiones.

- **a)** ¿Para qué valores de $x\in\mathbf{R}$ se puede afirmar que existe una única transformación lineal f que cumple las condiciones dadas?
- **b)** Para $x=0$, ¿es posible definir $f(2,-1,2)$? Justificar la respuesta.
- **c)** Sea A la matriz asociada a la transformación lineal f cuando $x=0$ ¿A es diagonalizable? En caso de ser posible definir la matriz P y la matriz D.

Ejercicio 2: Analizar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa, justificando cada respuesta.

- **a)** Sea $A\in\mathbf{R}^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ una matriz cuyas n columnas son vectores linealmente independientes entonces el sistema $A\cdot X=B$ es un sistema compatible indeterminado.
- **b)** Sean $f:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ y $g:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ dos transformaciones lineales. Si $\vec{x}\in Nu(f)$ entonces $\vec{x}\in Nu(g\circ f)$.

Ejercicio 3: Sea el conjunto $W=\left\{X\in\mathbf{R}^{2\times2} \,/\, X=\begin{pmatrix} a & b \\ -a & b\end{pmatrix}\ \forall a,\forall b\in\mathbf{R}\right\}$ y sea $B_S=\left\{\vec{u}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1\end{pmatrix};\vec{v}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2\end{pmatrix}\right\}$ la base del subespacio S, se pide:

- **a)** Demostrar que W es un subespacio de $\mathbf{R}^{2\times2}$.
- **b)** ¿Es el subespacio W el subespacio complemento ortogonal del subespacio S?

Ejercicio 4: Sea $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ la transformación lineal que a cada vector $\vec{x}\in\mathbf{R}^3$ le asigna su proyección ortogonal sobre el subespacio S. Sea $W=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^3 \,/\, \begin{cases} x+2y+z=0 \\ y-z=0 \\ x+y+2z=0\end{cases}\right\}$ el núcleo de la transformación lineal f, $Nu(f)=W$.

- **a)** Definir una base y la dimensión del núcleo de f. Interpretar geométricamente al subespacio núcleo.
- **b)** Interpretando la acción de la transformación, definir mediante ecuaciones al conjunto imagen de f. Interpretar geométricamente al subespacio imagen. Dar una base y la dimensión del mismo.
- **c)** Hallar, si es posible, un valor de k tal que el vector $\vec{u}=(k,2k-1,k^2-1)$ sea un autovector de f.

U.T.N. F.R.H. – Segundo Parcial de Álgebra y Geometría Analítica – Modelo 2

Apellido/s, Nombre/s del Alumno ....

1a 1b 1c	2a 2b 2c	3	4a 4b	5a 5b 5c	Calificación

Ejercicio 1. Dado el subespacio $S=\{(x,y)\in\mathbf{R^2}\,/\,3x+y=0\}$, sea $f:\mathbf{R^2}\to\mathbf{R^2}$ la transformación lineal que le hace corresponder a cada vector $\vec{x}=(x,y)\in\mathbf{R^2}$ su imagen especular con respecto a *S*.

a) Hallar la forma explícita de *f* y su matriz asociada *A* en la base canónica.

b) Se conoce que $(f\circ f)(\vec{w})=(1,2)$. ¿Es esta información suficiente para hallar $\vec{w}$? Justificar la respuesta. En caso de ser posible, hallar $\vec{w}$.

c) Desde aspectos geométricos, indicar los autovalores y los correspondientes subespacios de autovectores de *A*, indicando base y dimensión para cada uno de ellos. Si *A* resulta diagonalizable, presentar una matriz diagonal *D* semejante con *A* y su correspondiente matriz de pasaje *P*.

Ejercicio 2. Sea *S* el subespacio generado por el conjunto

$$C=\{\vec{v}_1=(1,0,0,1);\vec{v}_2=(0,-1,1,0);\vec{v}_3=(3,2,-2,0);\vec{v}_4=(0,0,0,0)\},$$

y sea $f:\mathbf{R^4}\to\mathbf{R^4}$ la transformación lineal que proyecta ortogonalmente cada $\vec{x}=(x,y,z,t)\in\mathbf{R^4}$ sobre *S*.

a) ¿Cuál es la dimensión de *S*?

b) Encontrar la forma explícita de *f*.

c) Hallar el subespacio complemento ortogonal de *S*, $S^{\perp}$. Dar una base ortogonal de dicho subespacio e indicar su dimensión.

Ejercicio 3. Sea un sistema de ecuaciones lineales de la forma $A\cdot X=B$ con $A=\left(\left(a_{i,j}\right)\right)\in\mathbf{R^{5\times3}}$ con el rango de $A=3$, $X=\left(\left(x_j\right)\right)\in\mathbf{R^{3\times1}}$, $B=\left(\left(b_i\right)\right)\in\mathbf{R^{5\times1}}$. Completar los puntos suspensivos con alguna de las tres opciones dadas en la tabla. Cada opción puede usarse 0, 1, 2 ó 3 veces. Justificar la respuesta.

1. El sistema $A\cdot X=B$, ... tiene solución única.
2. El sistema $A\cdot X=B$, ... tiene infinitas soluciones.
3. El sistema $A\cdot X=B$, ... es incompatible.

siempre	a veces pero no siempre	nunca

Ejercicio 4. La transformación lineal $f:\mathbf{R^4}\to\mathbf{R^2}$ está definida por $f(x,y,z,t)=(x+y,z+w)$, y sea $\vec{w}=(h+2,h,2h^2-2,h+1)$.

a) Hallar, si existen, todos los valores $h\in\mathbf{R}$ para los que $\vec{w}\in Nu(f)$. Justificar la respuesta.

b) Hallar, si existen, todos los valores $h\in\mathbf{R}$ para los que $\vec{w}$ sea autovector de *f*. Justificar la respuesta.

Ejercicio 5. Indicar si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Justificar claramente cada respuesta. De ser verdadera, demostrarla mencionando las propiedades usadas. En caso de ser falsa, dar un contraejemplo o una explicación adecuada.

a) Si $A=\{\vec{u},\vec{v}\}\subset\mathbf{R^3}$ genera un subespacio S_A de dimensión 1, entonces $B=\{\vec{u},\vec{v}-\vec{u},\vec{v}\times\vec{u}\}$ genera un subespacio S_B de dimensión 2.

b) Sea $S\subset\mathbf{R^3}$ un subespacio de dimensión 2 y sea $f:\mathbf{R^3}\to\mathbf{R^3}$ la transformación lineal que a cada vector $\vec{x}=(x,y,z)\in\mathbf{R^3}$ le hace corresponder su proyección ortogonal sobre el subespacio *S*, $f(\vec{x})=proy_S\vec{x}$. Entonces el vector $\vec{w}=\vec{x}-f(\vec{x})\in Nu(f)$.

c) Sea $f:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ una transformación lineal que y sean $\vec{v}_1\in\mathbf{V}$ y $\vec{v}_2\in\mathbf{V}$ dos autovectores linealmente independientes de *f* asociados al mismo autovalor $\lambda\in\mathbf{R}$. Entonces $\vec{v}_3=\vec{v}_1+2\vec{v}_2$ es autovector de *f* asociado al mismo autovalor λ.

Álgebra y Geometría Analítica – Segundo Examen Parcial – UTN FRH - Modelo 3

Apellido y Nombre del Alumno: ………………………………………………………………………………

1				**2**			**3**		**4**		CALIFICACIÓN
a	**b**	**c**	**d**	**a**	**b**	**c**	**a**	**b**	**a**	**b**	

<u>*Ejercicios a desarrollar*</u>:

1) En $\mathbf{R}^3$, se define $S = \{(x;y;z) \in \mathbf{R}^3 \ / \ x + z = 0\}$.

a) Demostrar que S es un subespacio de $\mathbf{R}^3$, interpretar geométricamente al subespacio S y hallar el ó los valores reales de "h" para que el vector $\vec{u} = (h^2; h-1; -h^2)$ pertenezca a dicho subespacio.

b) Hallar una base ortonormal para S (B_S).

c) Encontrar el subespacio ortogonal a S $(S^\perp)$, interpretar geométricamente al subespacio hallado y una base ortonormal para el mismo $(B_{S^\perp})$.

d) Escribir al vector $\vec{w} = (2;-1;1)$, como: $\vec{w} = \vec{p} + \vec{h}$, tal que verifique: $\vec{p} \in S \ \wedge \ \vec{h} \in S^\perp$.

2) Para cada una de las siguientes afirmaciones, determinar el valor de verdad. Si resulta verdadera, demostrarla y si es falsa, proponer un contraejemplo.

a) Si $A \cdot X = O$ con $A \in \mathbf{R}^{3x3}$ es un sistema compatible indeterminado, entonces $A \cdot X = B$, con $B \neq O$, es también sistema compatible indeterminado.

b) Si $f: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ es una transformación lineal entre dos espacios vectoriales $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$, tal que: $\dim(\mathbf{V}) = 5$ y $\dim(\mathbf{W}) = 3$, entonces siempre será la $\dim[Nu(f)] = 2$.

c) Si el conjunto de vectores $M = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ es un conjunto de vectores ortonormales de $\mathbf{R}^3$, entonces el conjunto $C = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}), (\vec{a} \times \vec{a}) \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$, constituye un sistema de generadores para $\mathbf{R}^3$.

3) Sea $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, la transformación lineal que a cada vector le produce el efecto g que lo hace girar alrededor del eje "x" un ángulo $\hat{\varphi} = \pi$ y a su imagen el efecto h que proyecta ortogonal al vector sobre el plano coordenado $(y;z)$.

a) Escribir explícitamente las transformaciones lineales "g", "h" y "f". Interpretar geométricamente los subespacio imagen y subespacio núcleo de "f", e indicar una base para cada uno de ellos.

b) Indicar geométricamente los vectores: $\vec{v} \neq \vec{0} \ \wedge \ f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$, especificando los correspondientes valores de "λ".

4) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & k & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz asociada, expresada en la base canónica, a una transformación lineal "f", se pide:

a) Determinar los autovalores y sus correspondientes autovectores, para $k = 2$, ¿Existe A^{-1}, por qué? Escribir la relación que existe entre los autovalores y $det(A)$ y $tr(A)$. ¿Cuánto valen los autovalores de A^4 y sus autovectores?

b) Justificar que $\forall\, k \in \mathbf{R}$, la matriz A es ortogonalmente diagonalizable.

-.-

U.T.N. F.R.H. – Segundo Parcial de Álgebra y Geometría Analítica – Modelo 4

Ejercicio 1. Indicar si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Justificar claramente cada respuesta. De ser verdadera, demostrarla mencionando las propiedades usadas o una justificación clara. En caso de ser falsa, dar un contraejemplo o una explicación adecuada.

a) Sea $B=\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ un conjunto de vectores no nulos ortogonales de $\mathbf{R}^3$, entonces no existe $\lambda\in\mathbf{R}$ para que el conjunto $C=\{\vec{u}+\vec{v};3\vec{v}\times\vec{w};\lambda\vec{u}\}$ sea linealmente independiente.

b) Sea $S\subset\mathbf{R}^3$ un subespacio de dimensión 2 y f: $\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ la transformación lineal correspondiente a la proyección ortogonal sobre S, $f(\vec{x})=proy_S(\vec{x})$. Se conoce que $\vec{a}=(1,-2,1)$ es invariante frente a f, y que $\vec{b}=(0,1,2)$ es autovector de autovalor 0. La información dada es suficiente para hallar S y $f(\vec{x})$.

Ejercicio 2. Sea $f:\mathbf{R}^{2\times 2}\to\mathbf{R}^{2\times 1}$ una transformación lineal tal que

$$f\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};f\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

a) Dar la forma explícita de *f*, la matriz asociada A.

b) Calcular los subespacios núcleo e imagen de *f*, indicar la dimensión y una base para cada uno de ellos.

c) Hallar el subespacio complemento ortogonal del núcleo de *f*.

Ejercicio 3. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&-1&2\\1&2&h\end{pmatrix}$.

a) Analizar para los distintos valores de $h\in\mathbf{R}$, la dimensión del subespacio S generado por las filas de A.

b) Para algún valor de h que la dimensión de S sea lo más chica posible, hallar las condiciones de pertenencia a S y dar una base ortogonal de S.

Ejercicio 4. Observar la figura anexa en la página siguiente.

a) Proponer una T.L. *f* que transforme (I) en (II). Dar la forma explícita, la forma descriptiva y la matriz asociada correspondiente a *f*.

b) Proponer una T.L. g que transforme (II) en (III). Dar la forma explícita, la forma descriptiva y la matriz asociada correspondiente a g.

c) Proponer una T.L. h que transforme (III) en (IV). Dar la forma explícita, la forma descriptiva y la matriz asociada correspondiente a h.

d) Dar la forma explícita y la matriz asociada a una transformación lineal p que transforme directamente (I) en (III).