

Problemas sobre distancias y ángulos

1 Calcular la distancia del punto $P(2, 4, 1)$ a la recta $r : (x, y, z) = (1, 0, 2) + \lambda(1, -1, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Resp. $d(P, r) = \sqrt{27/2}$

2 Hallar un punto P cuya distancia a la recta $r : (x, y, z) = (1, 2, 2) + \lambda(1, -1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ sea 2.

Resp. e.g., $P(1, 2 + \sqrt{6}, 2)$

(Sugerencia: dado que $P_r(1, 2, 2) \in r$ proponer un punto de la forma $P(1, b, 2)$ y hallar b para que $d(P, r) = 2$)

3 La distancia de un punto P a una recta r está dada por la fórmula

$$d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{PP_r} \times \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}, \text{ donde } P_r \in r$$

Probar que el cociente de normas en el lado derecho no depende del punto $P_r \in r$ elegido. Si elegimos otro punto $Q_r \in r$ tal que $Q_r \neq P_r$, entonces

$$\frac{\|\overrightarrow{PP_r} \times \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{\|\overrightarrow{PQ_r} \times \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}$$

4 Consideremos la recta $r : (x, y, z) = (1, 1, 2) + \lambda(2, 1, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Calcular la distancia del origen O a r .

b) Hallar una recta s cuya distancia a r sea 2.

Resp. a) $d(O, r) = \sqrt{21/5}$

b) e.g., $s : (x, y, z) = (1, 1 + \sqrt{5}, 2) + \mu(2, 1, 0)$, $\mu \in \mathbb{R}$

(Sugerencia: dado que $P_r(1, 2, 2) \in r$ proponer un punto de la forma $P_s(1, b, 2) \in s$ y hallar b para que $d(P_s, r) = 2$)

5 Calcular la distancia del punto $P(2, 4, 1)$ al plano $\pi : 2x + y + z + 1 = 0$.

Resp. $d(P, \pi) = 10/\sqrt{6}$

6 Hallar un punto P cuya distancia al plano $\pi : x - 2y + z - 1 = 0$ sea 2.

Resp. e.g., $P(1, 1 + \sqrt{6}, 2)$

7 La distancia de un punto P a un plano π está dada por la fórmula

$$d(P, \pi) = \frac{|\overrightarrow{PP_\pi} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}, \text{ donde } P_\pi \in \pi$$

Probar que el cociente de valor absoluto y norma en el lado derecho no depende del punto $P_\pi \in \pi$ elegido. Si elegimos otro punto $Q_\pi \in \pi$ tal que $Q_\pi \neq P_\pi$, entonces

$$\frac{|\overrightarrow{PP_\pi} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|\overrightarrow{PQ_\pi} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

8 Consideremos el plano $\pi : 2x + y + z - 4 = 0$.

- a) Calcular la distancia del origen O a π .
- b) Hallar una recta r cuya distancia a π sea $\sqrt{6}$.

Resp. a) $d(O, \pi) = 4/\sqrt{6}$

b) e.g., $r : (x, y, z) = (1, 7, 1) + \lambda(-1, 1, 1), \lambda \in \mathbb{R}$

9 Probar que la recta $r : (x, y, z) = (1, 2, 1) + \lambda(-1, -1, 1), \lambda \in \mathbb{R}$ y el plano $\pi : 2x + y - z + 1 = 0$ son secantes.

- a) Hallar el punto I tal que $r \cap \pi = \{I\}$.
- b) Calcular el ángulo $\angle(r, \pi)$.

Resp. a) $I(0, 1, 2)$ **b)** $\angle(r, \pi) = \arcsin(4/\sqrt{18}) \approx 70, 52^\circ$

10 Probar que la recta $r : (x, y, z) = (1, 1, 4) + \lambda(1, -1, 1), \lambda \in \mathbb{R}$ está incluida en el plano $\pi : 2x + y - z + 1 = 0$.

11 Probar que la recta $r : (x, y, z) = (1, 2, 1) + \lambda(1, -1, 1), \lambda \in \mathbb{R}$ y el plano $\pi : 2x + y - z + 1 = 0$ son disjuntos ($r \cap \pi = \emptyset$). Calcular la distancia de r a π .

Resp. $d(r, \pi) = 4/\sqrt{6}$

12 Probar que las rectas $r_1 : (x, y, z) = (1, 2, 0) + \lambda_1(-1, 1, 0), \lambda_1 \in \mathbb{R}$ y $r_2 : (x, y, z) = (3, 2, -2) + \lambda_2(1, 0, -1), \lambda_2 \in \mathbb{R}$ son secantes.

- a) Hallar el punto I tal que $r_1 \cap r_2 = \{I\}$.
- b) Calcular el ángulo $\angle(r_1, r_2)$.

Resp. a) $I(1, 2, 0)$ **b)** $\angle(r_1, r_2) = \arccos(1/2) = 60^\circ$

13 Probar que las rectas $r_1 : (x, y, z) = (1, 2, 0) + \lambda_1(-2, 1, 0)$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ y $r_2 : (x, y, z) = (3, 2, 3) + \lambda_2(1, 1, -1)$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ son alabeadas.

a) Calcular el ángulo $\angle(r_1, r_2)$.

b) Calcular la distancia $d(r_1, r_2)$.

Resp. a) $\angle(r_1, r_2) = \arccos(1/\sqrt{15}) \approx 75,03^\circ$ **b)** $d(r_1, r_2) = 11/\sqrt{14}$.

14 ¿Existe algún valor de a para el cual los planos $\pi_1 : ax - 2y + z - 1 = 0$ y $\pi_2 : ax + ay + z + 1$ son perpendiculares? En caso afirmativo, hallar la recta r tal que $\pi_1 \cap \pi_2 = r$.

Resp. r : $(x, y, z) = (-1/3, -2/3, 0) + \lambda(-3, 0, 3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

15 Probar que los planos $\pi_1 : 2x - y + z - 1 = 0$ y $\pi_2 : x + 2y - z + 1 = 0$ son secantes.

a) Hallar la recta s tal que $\pi_1 \cap \pi_2 = s$.

b) Calcular el ángulo $\angle(\pi_1, \pi_2)$.

Resp. a) $s : (x, y, z) = (1/5, -3/5, 0) + \mu(-1, 3, 5)$, $\mu \in \mathbb{R}$

b) $\angle(\pi_1, \pi_2) = \arccos(1/6) \approx 80,40^\circ$

16 Consideremos el plano $\pi : 2x + 2y + z - 5 = 0$. Hallar los planos β cuyas distancias a π sean 2.

Resp. $\beta_1 : 2x + 2y + z - 11 = 0$ y $\beta_2 : 2x + 2y + z + 1 = 0$