

LINEAS DE INFLUENCIA

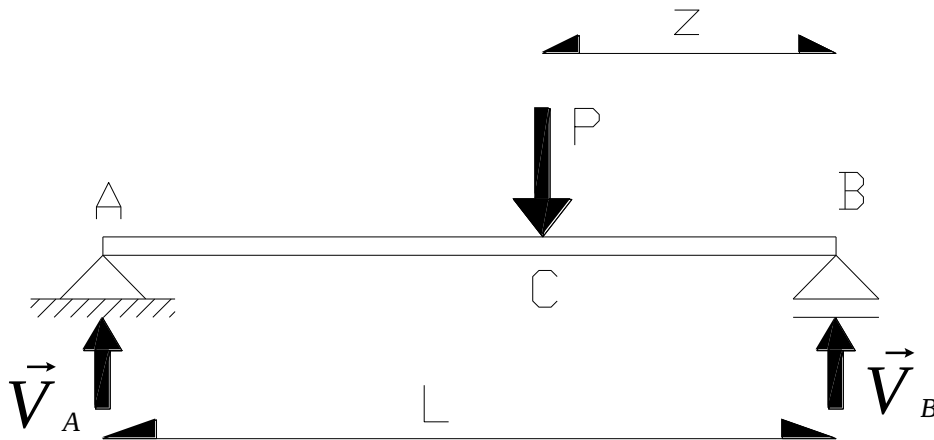
INTRODUCCIÓN

Hasta el momento se han estudiado el equilibrio de sistemas planos sometidos a cargas estáticas, pudiendo ser estas, cargas concentradas o bien, cargas distribuidas. En los mismos, nos fue sencillo determinar en una cierta sección del sistema ya sea reacciones de vínculo, como valores de esfuerzos característicos como ser esfuerzos cortantes, momentos flectores, o, esfuerzos normales correspondientes a la misma.

Sea, por ejemplo, la figura n^o 1, una viga simplemente sustentada sometida a una carga concentrada **P** ubicada a una distancia **z** del apoyo **B**. La reacción vincular **V_A** queda definida por:

$$V_A = \frac{P \cdot z}{L} \quad \text{expresión 1}$$

figura n^o 1



Luego, cuando la carga **P** cambia su posición a lo largo de la viga, los sucesivos valores de la reacción **V_A**, que es la incógnita en estudio, cambiarán con la variación de la distancia **z**.

Interesa conocer el valor de la incógnita cuando la carga varía su posición en la longitud de la viga. A su vez, nos interesará conocer diagramas que informen de los valores de incógnitas cuando las cargas se desplazan en el sistema en estudio. A estas cargas las denominaremos cargas móviles, y los diagramas mencionados se denominan **líneas de influencia**.

El estudio de las líneas de influencia es de vital importancia para la ingeniería mecánica debido a que se encuentran gran parte los componentes que conforman los mecanismos sujetos a cargas móviles, por ejemplo: puentes grúas; las fuerzas normales a las generatrices de los pistones en el desplazamiento de los pistones dentro de los cilindros de un motor; en el proceso de torneado de una pieza, el desplazamiento de la herramienta provoca sobre la pieza a mecanizar una fuerza de corte móvil sobre la misma, como infinidad de ejemplos se pueden mencionar en este respecto.

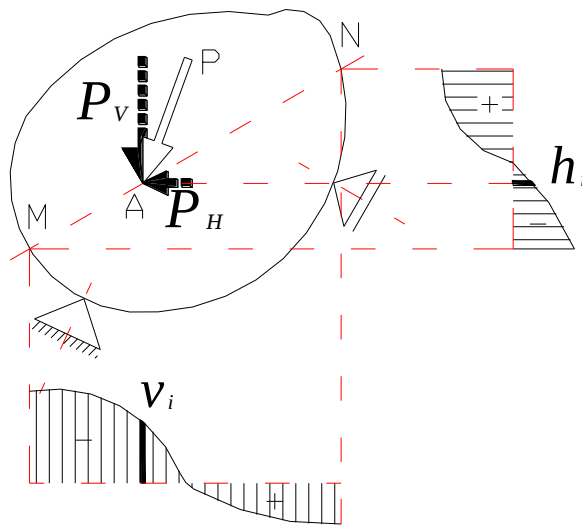
DESARROLLO TEÓRICO

Definición: “líneas de influencia de una incógnita en una determinada dirección, es un diagrama cuyas ordenadas miden, en una cierta escala, el valor de la misma cuando una fuerza unitaria y positiva se desplaza sobre una línea del sistema, manteniéndose paralela a dicha dirección”.

Coefficiente de influencia $i = \frac{X}{P}$: Es el valor de la incógnita para una carga unitaria, en otras palabras, es la ordenada de la línea de influencia de la incógnita **X**.

Considérese un sistema como lo indica la figura n ° 2, con una carga **P** desplazándose paralelamente a sí misma siguiendo la recta **m-n**.

figura n ° 2



De la figura n ° 2 se deduce que por superposición de los efectos se obtiene:

$$X = P_v \cdot v_i + P_h \cdot h_i \quad \text{expresión 2}$$

Siendo v_i y h_i los coeficientes de influencia vertical y horizontal respectivamente, para la fuerza **P** aplicada en **A**. Debido a que para cada posición de **P** varía el valor de la

incógnita, los valores v_1 y h_i variarán. Para construir las líneas de influencia horizontales y verticales, se llevan los valores de las ordenadas en correspondencia con los puntos de aplicación de la carga P , obteniéndose la línea de influencia vertical. De forma análoga se obtiene la línea de influencia horizontal. Con la expresión 2 se deduce que para determinar el valor de una incógnita cualquiera de un sistema bajo la acción de cargas P_i , con direcciones e intensidades cualesquiera, es necesario conocer las líneas de influencia de la incógnita en dos direcciones.

3

Obtención analítica de líneas de influencia

Reacción de vínculo externo: Considerando la viga simplemente apoyada de la figura n ° 3, sometida a una carga móvil P . Para determinar la ecuación de la línea de influencia, ponemos en evidencia la incógnita, reemplazándola por una fuerza generalizada X . Luego, realizando una sumatoria de momentos estáticos respecto del punto B , se obtiene:

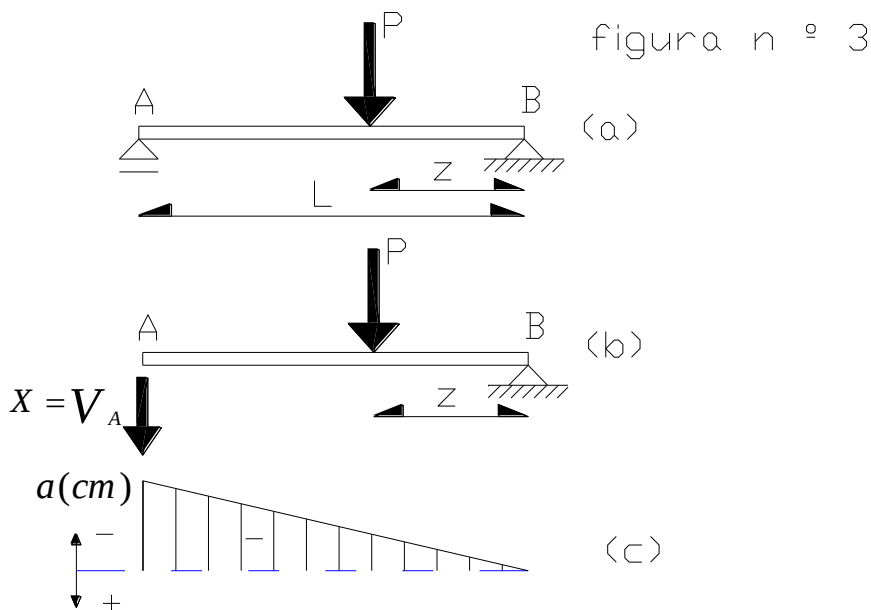
$$\sum M^B = 0 = -V_A \cdot L - P \cdot z \quad \text{expresión 3}$$

De la expresión 3, es sencillo deducir:

$$V_A = -P \cdot \frac{z}{L} \quad \text{expresión 4}$$

Siendo el coeficiente de influencia:

$$v_A = \frac{V_A}{P} = -\frac{z}{L} \quad \text{expresión 5}$$



De la figura n ° 3c, y con la expresión 5 se obtiene que el coeficiente de influencia sigue una ley lineal. De la expresión 5 se extrae:

$$\begin{cases} z = 0 \rightarrow V_A = 0 \\ z = L \rightarrow V_A = -1 \end{cases}$$

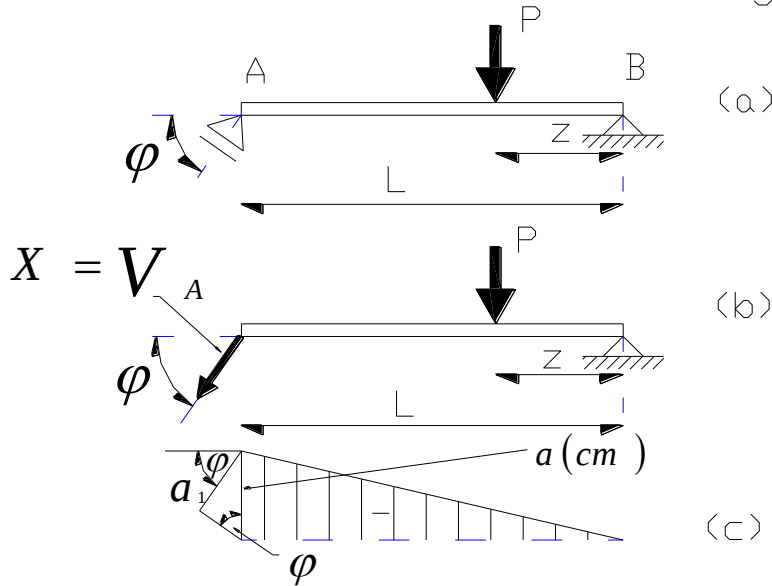
La representación de la línea de influencia que se muestra en la figura 3c, indica que la misma se representa a través de un eje de referencia horizontal, considerando la escala:

$$esc = \frac{1}{a(cm)} \quad \text{expresión 6}$$

Considerando, a continuación se analizará la línea de influencia del ejemplo de la figura n° 4 a, en donde la reacción V_A forma un determinado ángulo ϕ con el eje de la viga.

4

figura n° 4



Luego, considerando una sumatoria de momentos respecto de B, se tiene:

$$\sum M^B = 0 = -P \cdot z - V_A \cdot \text{sen } \phi \cdot L \quad \text{expresión 7}$$

Obteniéndose de la expresión 7:

$$V_A = -P \frac{z}{L \cdot \text{sen } \phi} \quad \text{expresión 8}$$

De la expresión 8 se obtiene:

$$\begin{cases} z = 0 \rightarrow V_A = 0 \\ z = L \rightarrow V_A = -\frac{1}{\text{sen } \phi} \end{cases}$$

Destacamos que $a(cm)$ representa en la escala $\frac{1}{\text{sen } \phi}$, por consiguiente:

$$a(cm)_{esc} = \frac{1}{\text{sen } \phi} \quad \text{expresión 9}$$

De la expresión 9 nos queda la escala como:

$$esc = \frac{1}{a(cm).sen \varphi} = \frac{1}{a_1(cm)} \quad \text{expresión 10}$$

Es de notarse, respecto de la escala, que el numerador es la unidad de una magnitud que es la incógnita **X**. En el caso de tratarse de un esfuerzo de corte, esfuerzo normal, o esfuerzo en una viga, serán válidas las expresiones 6 o 10; en cambio, cuando se trata de determinar las líneas de influencia correspondientes a un momento flector, la escala se puede expresar:

$$esc = \frac{1m}{a(cm)} \quad \text{expresión 11}$$

Así, cuando se trate de determinar la línea de influencia de un desplazamiento, la escala puede ser:

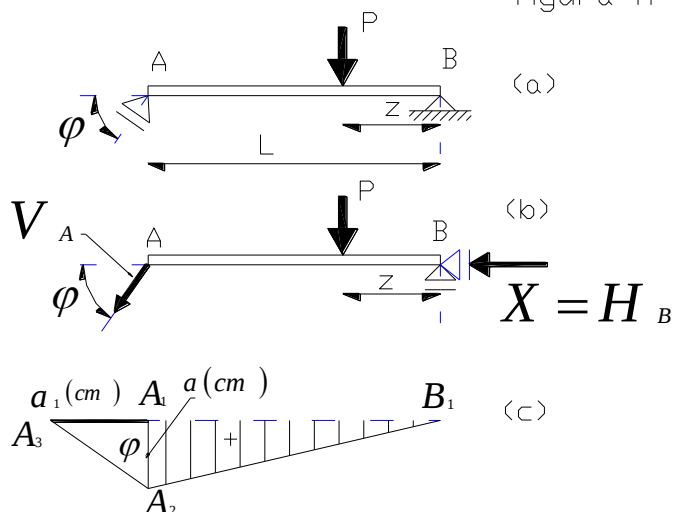
$$esc = \frac{1m.t^{-1}}{a(cm)} \quad \text{expresión 12}$$

De igual forma, para el caso de la línea de influencia correspondiente a una rotación, se podrá expresar:

$$esc = \frac{1t^{-1}}{a(cm)} \quad \text{expresión 13}$$

Continuando con la determinación de líneas de influencia, analizaremos la línea de influencia correspondiente a la reacción horizontal **H_B** del sistema de la figura n ° 4.

figura n ° 5



En la figura n ° 5 se construyó la línea de influencia de la componente horizontal. Para la misma, se lleva, a partir de un eje de referencia horizontal, desde **A₁**, el segmento $\overline{A_1A_2} = a(cm)$, luego, se une el extremo **A₂** con la proyección **B₁** de **B** sobre el eje de referencia horizontal, quedando la recta que define la línea de influencia V_{H_B} buscada.

Seguidamente, en **A₂**, se traza un segmento normal a la dirección de **V_A**, hasta que corte

referencia, que define, con el punto A_1 , el segmento $\overline{A_1 A_3} = a_1(cm)$. El signo positivo del diagrama se demuestra en el siguiente razonamiento:

Mediante una sumatoria de proyecciones en la dirección horizontal, resulta,

$$\sum F_z = 0 = V_A \cdot \cos \varphi + H_B \quad \text{expresión 14}$$

De la expresión 14, se obtiene:

$$H_B = -V_A \cdot \cos \varphi \quad \text{expresión 15}$$

Y, reemplazando en la expresión 15, el valor de V_A obtenido en la expresión 8, resulta:

$$H_B = \frac{P \cdot z}{L \cdot \sin \varphi} \cdot \cos \varphi = \frac{P \cdot z}{L \cdot \tan \varphi} \quad \text{expresión 16}$$

Ahora bien, el coeficiente de influencia de H_B queda,

$$V_{H_B} = \frac{H_B}{P} = \frac{z}{L \cdot \tan \varphi} \quad \text{expresión 17}$$

De la expresión 17 se deduce el signo positivo del diagrama de línea de influencia de H_B . Además, de la expresión 17, se obtiene:

$$\begin{cases} z = 0 \rightarrow V_{H_B} = 0 \\ z = L \rightarrow V_{H_B} = \frac{1}{\tan \varphi} \end{cases}$$

Para determinar la escala, se tendrá en cuenta:

$a(cm)$ representa a: $\frac{1}{\tan \varphi}$ por consiguiente, se deduce,

$$a(cm)_{esc} = \frac{1}{\tan \varphi} \quad \text{de donde: } esc = \frac{1}{a(cm) \cdot \tan \varphi} = \frac{1}{a_1(cm)} \quad \text{expresión 18}$$

pues, $a_1(cm) = a(cm) \cdot \tan \varphi$

Líneas de influencia de esfuerzos característicos

Líneas de influencia de momentos flectores: Sea la viga de la figura n ° 5 sometida a una carga móvil P , y para la sección $C-C$ ubicada a una distancia L_1 del apoyo B , se pretende determinar las ecuaciones de las líneas de influencia, y el diagrama de línea de influencia de momentos flectores. Las reacciones de vínculo correspondientes son:

$$\text{expresiones 19} \left\{ \begin{array}{l} V_A = -P \frac{z}{L} \\ V_B = -P \frac{L-z}{L} \end{array} \right.$$

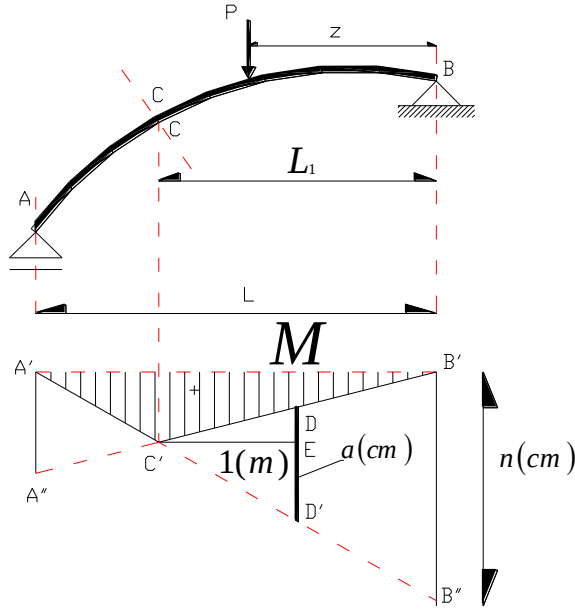
Comenzamos considerando que la fuerza P se desplaza a la izquierda de la sección $C-C$. para una posición arbitraria de la misma z , se tiene la siguiente ecuación de momentos en la sección mencionada:

$$M_C = -V_A \cdot (L - z) - P(z - L_1) \quad \text{expresión 20}$$

Reemplazando el valor de V_A de la expresión 19 en la expresión 20, resultará la expresión 21.

$$M_C = P \frac{z}{L} (L - L_1) - P(z - L_1) = P \left(L_1 - \frac{L_1}{L} z \right) = P \cdot L_1 \left(1 - \frac{z}{L} \right) \quad \text{expresión 21}$$

figura n ° 5



Luego, la expresión 21 se escribirá como indica la expresión 22 para facilitar la comprensión del tema:

$$M_C = P \frac{L_1}{L} (L - z) \quad \text{expresión 22} \quad 0 \leq z \leq L_1$$

Ahora, dividiendo ambos miembros de 22 por P, se tiene:

$$\frac{M_C}{P} = v_M = \frac{L_1}{L} (L - z) \quad \text{expresión 23}$$

Siendo, la expresión 23, la ecuación de una recta de ordenada nula para $z = L$. Esta expresión 23 representa la ecuación de la línea de influencia del momento flector en la sección C-C cuando la carga se desplaza a la izquierda de la sección mencionada.

Seguidamente, analizaremos el caso cuando la carga se desplaza a la derecha de la sección C-C. En este caso, el momento flector en C-C es:

$$M_C = -V_A \cdot (L - L_1) = P(L - L_1) \frac{z}{L} \quad \text{expresión 24}$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación 24 por P, resulta:

$$\frac{M_C}{P} = v_M = (L - L_1) \frac{z}{L} \quad \text{expresión 25}$$

La expresión 25 resulta ser la ecuación de una recta de ordenada nula para $z = 0$, representando esta expresión la ecuación de la línea de influencia del momento flector en la sección **C-C** cuando la carga se desplaza a la derecha de dicha sección.

En $z = L_1$, deberán coincidir las ordenadas v_M de las expresiones 23 y 25, es decir, se deberá cumplir:

$$\frac{L_1}{L}(L - z) = (L - L_1)\frac{z}{L} \quad \text{expresión 26}$$

Obteniéndose, obviamente $z = L_1$ como la abscisa en la sección **C-C** en donde las ordenadas de las líneas de influencia son iguales.

A continuación, se explicará la resolución gráfica con el apoyo de la figura n^o 5. Una vez trazado un eje de referencia, se trazan las proyecciones **A'** y **B'** de los apoyos **A** y **B** respectivamente. Luego, se trazan dos rectas cualesquiera que pasen por los puntos **A'** y **B'**, y que se corten en un punto cualquiera **D'**, constituyendo estas rectas la línea de influencia del momento flector en la sección **C-C**. El signo de la línea de influencia será positivo para este caso, como se indica en las expresiones 23 y 25. Para determinar la escala en que se deben leer las ordenadas, se procede como se indica a continuación: de acuerdo a la expresión 23, cuando $z = 0$, la ordenada $v_M = L_1(\text{cm})$, siendo $\overline{B'B''} = n(\text{cm})$ el segmento representativo en la figura n^o 5. De acuerdo a esto, la escala será:

$$\frac{L_1(m)}{n(\text{cm})} \quad \text{expresión 27}$$

Ahora, por **C'** se traza un segmento (**C'-E**) horizontalmente a una distancia de **1(m)** de longitud, y, normalmente a este segmento, se traza una recta que intercepte con los tramos de la línea de influencia de **M**, se tiene el segmento $\overline{DD'} = a(\text{cm})$. Por semejanza de los triángulos **C'B'B''** y **C'D'D**, resulta:

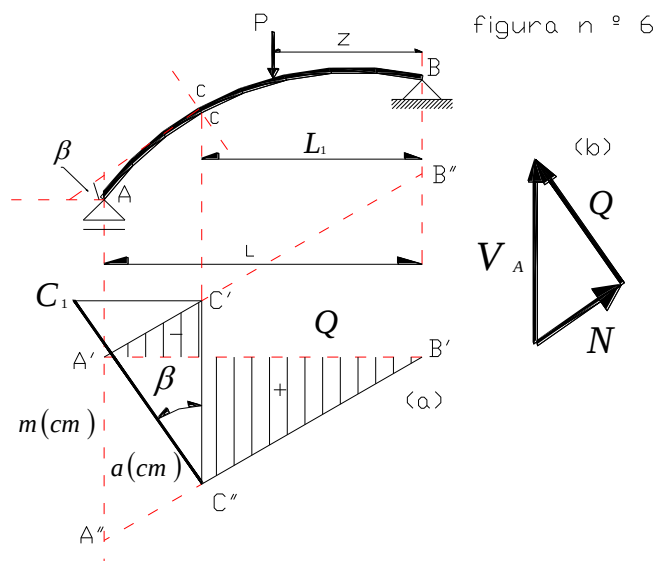
$$\frac{L_1(m)}{n(\text{cm})} = \frac{1(m)}{a(\text{cm})} \quad \text{expresión 28}$$

Siendo que el primer miembro de la expresión 28 corresponde a la escala como se indica en la expresión 27, en consecuencia, la escala tendrá, la siguiente expresión:

$$esc = \frac{1(m)}{a(\text{cm})} \quad \text{expresión 29}$$

Línea de influencia del esfuerzo cortante: Para analizar este punto, consideramos la figura

n^o 6 en donde se observa una carga puntual y vertical **P** desplazándose a lo largo del tramo **AB** de la viga, y se quiere determinar la línea de influencia del esfuerzo cortante en la sección **C-C**.



En la figura n° 6, llamamos β al ángulo que forma la normal a la sección **C-C** con el eje horizontal que pasa por **A**. Comenzaremos el análisis considerando que la carga se desplaza en el tramo **AC**, es decir, a la izquierda de la sección **C-C**. El esfuerzo de corte en la sección es:

$$Q_C = (V_A - P) \cos \beta \quad \text{expresión 30}$$

Reemplazando la primera de las expresiones 19 en la expresión 30, se tiene:

$$Q_C = \left(P \cdot \frac{z}{L} - P \right) \cos \beta = P \frac{z-L}{L} \cos \beta = -P \frac{L-z}{L} \cos \beta \quad \text{expresión 31}$$

De la expresión 31 surge:

$$\frac{Q_C}{P} = V_Q = -\frac{L-z}{L} \cos \beta \quad \text{expresión 32}$$

La expresión 32 representa la ecuación de la línea de influencia del esfuerzo cortante en la sección **C-C** cuando la carga actúa a la izquierda de la sección considerada. La expresión 32 es la ecuación de una recta, siendo nula su ordenada para $z = L$, como es de esperarse.

Seguidamente, consideramos el caso en que la carga **P** actúa a la derecha de la sección **C-C**, es decir, entre la sección **C-C** y el apoyo **B**. En este caso, la ordenada de la línea de influencia está dado en su intensidad y su signo por la proyección de la reacción V_A . O sea:

$$Q_C = V_A \cdot \cos \beta \quad \text{expresión 33}$$

Ahora, reemplazando la expresión la primera de las expresiones 19 en la expresión 33, resulta:

$$Q_C = P \frac{z}{L} \cos \beta \quad \text{expresión 34}$$

De donde se obtiene, dividiendo ambos miembros por **P**, la ecuación de la línea de influencia correspondiente:

$$\frac{Q_C}{P} = V_Q = \frac{z}{L} \cos \beta \quad \text{expresión 35}$$

La expresión 35 será nula para $z = 0$. De acuerdo a esta expresión, se tiene que las ordenadas de la línea de influencia son positivas cuando la carga actúa en el tramo **CB** de la viga, mientras que la expresión 32 indica que las mismas son negativas cuando **P** actúe en el tramo **AC** de esta viga. Cabe destacar que las expresiones 32 y 35 representantes de la línea de influencia del esfuerzo cortante en **C-C**, son las ecuaciones de dos rectas paralelas de pendiente $\frac{\cos \beta}{L}$.

Para resolver gráficamente el trazado de la línea de influencia, se elige un eje de referencia horizontal como indica la figura 6 a, luego del cual, se grafican dos rectas paralelas de cualquier pendiente por los extremos **A'** y **B'** respectivamente, limitando a estas rectas, la vertical de la sección **C-C**. En cuanto al signo de la línea de influencia, el mismo será negativo cuando **P** se desplaza entre **A** y **C**, es decir, en el segmento $\overline{A'C'}$, y, positivo en el segmento $\overline{B'C''}$. Seguidamente, se determinará la escala en que se leerán las ordenadas de la línea de influencia. De la expresión 35 se deduce que en $z = L$, la ordenada de la línea de influencia es: $V_Q = \cos \beta$, geoméricamente representada por el segmento $\overline{A'A''} = \overline{C'C''} = m(\text{cm})$. Por lo tanto, la escala es:

$$\text{esc} = \frac{\cos \beta}{m(\text{cm})} \quad \text{expresión 36}$$

Luego, por el extremo **C''** se traza una recta paralela a la sección **C-C**, y, como consecuencia de la intercepción de esta con el segmento horizontal $\overline{C'C_1}$, se tiene definido el segmento $\overline{C''C_1} = a(\text{cm})$. De aquí surge:

$$\overline{C''C_1} = \frac{\overline{C'C''}}{\cos \beta} = \frac{m(\text{cm})}{\cos \beta} \quad \text{expresión 37}$$

Ahora, reemplazando en la expresión 37 $\overline{C''C_1} = a(\text{cm})$, se tiene directamente la escala,

$$a(\text{cm}) = \frac{\cos \beta}{m(\text{cm})} \quad \text{de donde la escala queda} \quad \text{esc} = \frac{1}{a(\text{cm})} = \frac{m(\text{cm})}{\cos \beta} \quad \text{expresión 38}$$

Línea de influencia del esfuerzo normal: Se analiza este punto considerando la carga puntual **P** que se desplaza en la viga **AB** de la figura n^o 7. Se estudiará el comportamiento de la línea de influencia del esfuerzo normal en la sección **C-C**.

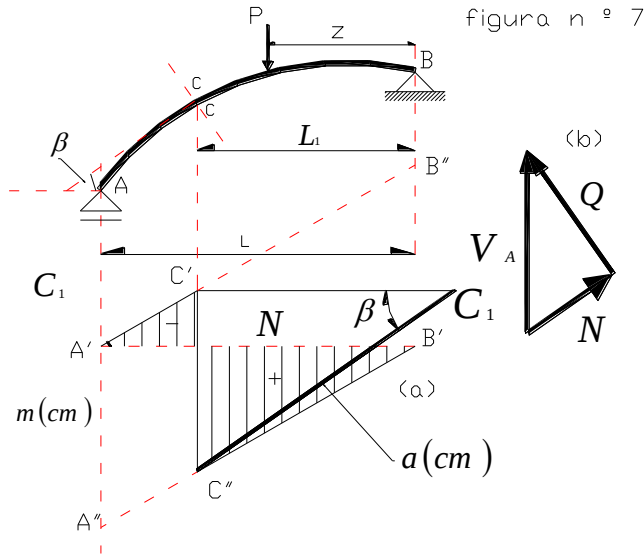
Para esto, comenzaremos analizando cuando la carga actúa a la izquierda de la sección considerada. Para este caso, el esfuerzo normal es:

$$N = (V_A - P) \sen \beta \quad \text{expresión 39}$$

Pero, $V_A = P \cdot \frac{z}{L}$ expresión 40

Y, reemplazando la expresión 40 en la 39, se tiene:

$$N = P \left(\frac{z - L}{L} \right) \sen \beta \quad \text{expresión 41}$$



En la expresión 41, teniéndose en cuenta que, cuando la carga actúa a la izquierda de la sección C-C, el esfuerzo es de tracción, se deberá afectar dicha expresión por el signo menos, en consecuencia, la expresión queda transformada en:

$$N = P \left(\frac{L - z}{L} \right) \sen \beta \quad \text{expresión 42}$$

La expresión 42 es la ecuación de una recta cuya pendiente es $-\frac{\sen \beta}{L}$ y ordenada nula para $z = L$. Luego, dividiendo ambos miembros de la expresión 42 por P, se tiene la ecuación de la línea de influencia de los esfuerzos normales entre A y C, como indica la expresión 43.

$$\frac{N}{P} = v_N = \left(\frac{L - z}{L} \right) \sen \beta \quad \text{expresión 43}$$

Cuando la carga se desplaza entre las secciones C y B, es decir, a la derecha de la sección considerada, la expresión del esfuerzo normal es:

$$N = V_A \cdot \sen \beta \quad \text{expresión 44}$$

Considerando que cuando **P** actúa a la derecha de **C-C**, existe un esfuerzo de compresión en la sección considerada, y, reemplazando V_A en la expresión 44, luego de afectar la expresión por el signo negativo, se tiene la expresión 45.

$$N = -P \cdot \frac{z}{L} \operatorname{sen} \beta \quad \text{expresión 45}$$

Que, dividiendo ambos miembros de 45 por **P**, se tiene la expresión 46, indicadora de la ecuación de la línea de influencia del esfuerzo normal en la sección **C-C** cuando **P** actúa a la derecha de la misma.

$$\frac{N}{P} = V_N = -\frac{z}{L} \operatorname{sen} \beta \quad \text{expresión 46}$$

La expresión 46 es la ecuación de una recta de pendiente $-\frac{\operatorname{sen} \beta}{L}$, de ordenada nula para

$z = 0$. Para determinar la escala, se observa en la figura n.º 7, que, cuando $z = L$, la ordenada de la línea de influencia del esfuerzo normal en **C-C** es $v_N = -\operatorname{sen} \beta$, cuyo

segmento representativo es $\overline{A'A''} = m(\text{cm})$, resultando la escala: $\frac{\operatorname{sen} \beta}{m(\text{cm})}$. Luego, si

trazamos por el punto **C''** una recta paralela a la normal de la sección en **C**, y, trazando una recta horizontal por **C'** que corte a la anterior en **C₁**, queda conformado un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el segmento $\overline{C''C_1} = a(\text{cm})$, resultante de la desproyección del segmento $\overline{C'C''}$.

Luego, por relación de triángulos semejantes, se tiene:

$$\overline{C'C''} = m(\text{cm}) = a(\text{cm}) \operatorname{sen} \beta \quad \text{expresión 47}$$

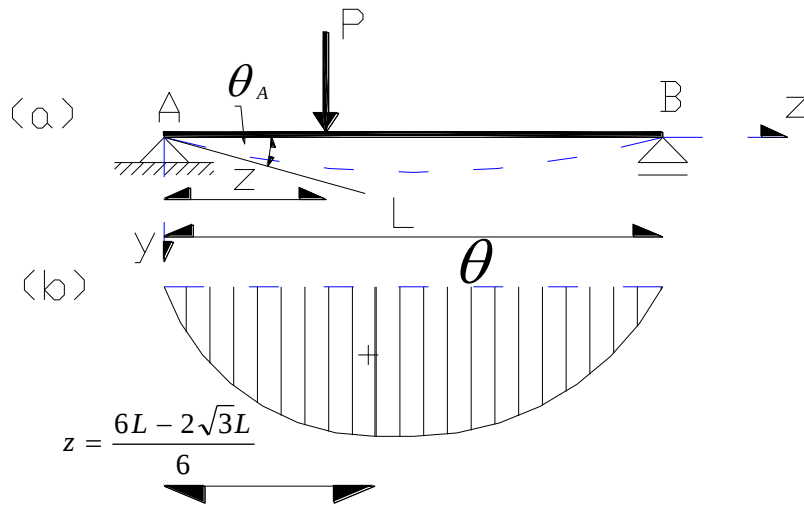
De la expresión 47 surge la escala de la línea de influencia de los esfuerzos normales, como lo indica la expresión 48.

$$\text{escala} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{m(\text{cm})} = \frac{1}{a(\text{cm})} \quad \text{expresión 48}$$

Línea de influencia del ángulo de deformación en un apoyo de una viga simplemente

apoyada: Para describir este punto, nos será de utilidad la figura n.º 8, en donde se muestra una viga de eje recto con una carga móvil **P**, y, se pretende determinar la línea de influencia del ángulo de la deformada θ_A en el apoyo **A**.

figura n ° 8



De la tabla de deformaciones en vigas, del capítulo de sistemas hiperestáticos se obtiene que el ángulo de deformación correspondiente al apoyo **A**, para una posición arbitraria **z** de la carga **P**, viene expresado por la siguiente expresión:

$$\theta_A = \frac{P}{E.J} \frac{z}{L} (2L - z)(L - z) \quad \text{expresión 49}$$

La expresión 49 se puede escribir como:

$$\theta_A = \frac{P}{6.L.E.J} (2L^2 z - 3L.z^2 + z^3) \quad \text{expresión 50}$$

Entonces, la ecuación de la línea de influencia del ángulo de deformación en **A** es:

$$v_\theta = \frac{\theta}{P} = \frac{1}{6L.E.J} (2L^2 z - 3L.z^2 + z^3) \quad \text{expresión 51}$$

Obteniéndose para $z = 0$, ordenada $v_\theta = 0$, así como para $z = L$, se obtiene también una ordenada nula del ángulo de deformación. En la figura n ° 8b, se muestra el diagrama representativo de la línea de influencia de los correspondientes ángulos de deformaciones en **A** de la viga para una carga móvil **P**.

También, se podrá determinar la posición de **P** para la cual es máximo este ángulo de deformaciones θ . Para esto, derivamos la expresión 51 respecto de **z**, luego maximizamos la expresión resultante, quedándonos:

$$\frac{d v_\theta}{dz} = 0 = \frac{1}{6L.E.J} (2L^2 - 6.L.z + 3z^2) \quad \text{expresión 52}$$

De la expresión 53, se determinan los siguientes valores de **z**:

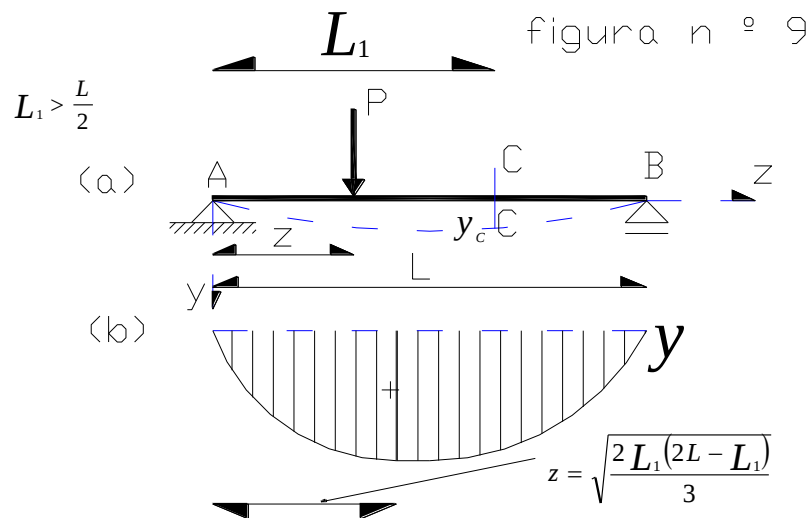
$$\text{expresiones 53} \left\{ \begin{array}{l} z_1 = \frac{L(3+\sqrt{3})}{3} \\ z_2 = \frac{L(3-\sqrt{3})}{3} \end{array} \right.$$

De las expresiones 53 se desecha el valor z_1 por encontrarse fuera de los límites de la viga, considerando válido la raíz z_2 .

Luego, reemplazando este valor en la expresión 51 se determina el máximo valor del ángulo de deformación en **A** para dicha posición de **P**, la misma es:

$$V_\theta = \frac{L^2}{27E.J} (12 - 5\sqrt{3}) \quad \text{expresión 54}$$

Línea de influencia de la deformación en una sección de una viga simplemente apoyada sometida a una carga móvil P: Para desarrollar este punto, nos guiaremos por la viga de la figura n° 9, y, se pretende determinar la línea de influencia de la deformación para la sección **C-C** ubicada a una distancia L_1 del apoyo derecho **A**, siendo $L_1 > L/2$.



Comenzamos analizando la sección que se encuentra a la izquierda de **C-C**, es decir, el tramo **AC**. Para la misma, de la tabla de deformaciones en vigas, se obtiene para esta, la siguiente ecuación:

$$y = \frac{P.z}{6L.E.J} (L - L_1) [L_1(2L - L_1) - z^2] \quad 0 \leq z \leq L_1 \quad \text{expresión 55}$$

Luego, dividiendo ambos miembros por la carga **P**, se tiene la ecuación de la línea de influencia para $0 \leq z \leq L_1$:

$$V_y = \frac{y}{P} = \frac{z}{6L.E.J} (L - L_1) [L_1(2L - L_1) - z^2] \quad 0 \leq z \leq L_1 \quad \text{expresión 56}$$

La expresión 56 nos informa que cuando **P** está en $z = 0$, la ordenada de la línea de influencia es nula, como era de esperarse. En cuanto la carga se encuentre entre el tramo **CA**, es decir, a la derecha de la sección **C-C**, la ecuación de deformaciones asociada a la misma es:

$$y = \frac{P \cdot L_1}{6L.E.J} (L - z) \left(2L.z - z^2 - L_1^2 \right) \quad L_1 \leq z \leq L \quad \text{expresión 57}$$

Ahora, si dividimos ambos miembros de la expresión 57 por **P**, se tiene la ecuación de la línea de influencia, válida para $L_1 \leq z \leq L$:

$$V_y = \frac{y}{P} = \frac{L_1}{6L.E.J} (L - z) \left(2L.z - z^2 - L_1^2 \right) \quad L_1 \leq z \leq L \quad \text{expresión 58}$$

La misma se anula cuando la carga **P** se encuentra en $z = L$. La representación gráfica de la línea de influencia correspondiente se muestra en la figura n^o 9b.

A continuación, se determinará la posición que corresponde a una máxima deformación en la viga. Para esto, debido a que $L_1 > \frac{L}{2}$, corresponde maximizar la expresión 56 y determinar la posición para la máxima deformación en la viga. Resultando:

$$\frac{dy}{dz} = 0 = \frac{(L - L_1)}{6E.J.L} \left[-z^2 + 2L_1(2L - L_1)z \right] \quad \text{expresión 59}$$

De la expresión 59 surge el siguiente valor **z**:

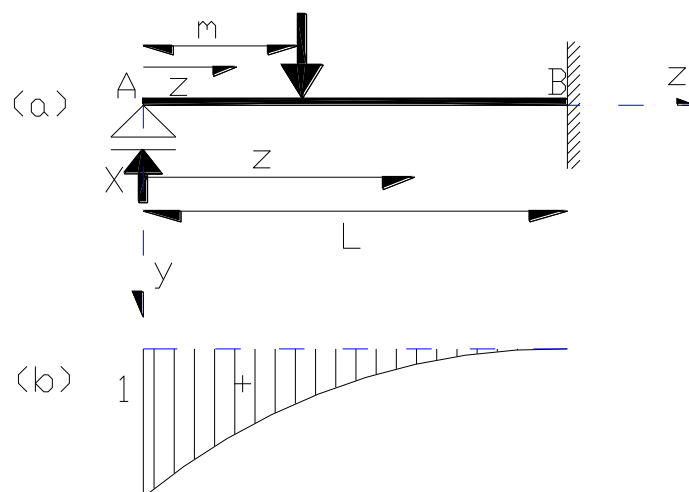
$$z = \sqrt{\frac{2L_1(2L - L_1)}{3}} \quad \text{expresión 60}$$

Luego, reemplazando la expresión 60 en la expresión 56, se tiene el máximo valor de la deformación en la viga correspondiente a esta posición, según se indica en la expresión 61.

$$V_{y_máx} = \frac{L - L_1}{6L.E.J} \sqrt{2 \left[\frac{L_1(2L - L_1)}{3} \right]^3} \quad \text{expresión 61}$$

Línea de influencia de una reacción hiperestática en un apoyo móvil: Para analizar este punto, se considera la viga hiperestática sometida a una carga móvil **P**, de la figura n^o 10, con sección constante, un extremo empotrado, y el extremo **A**, para el que se quiere determinar la ecuación de la línea de influencia, simplemente apoyado.

figura n ° 10



Luego, ubicamos la carga en una posición arbitraria m , suprimimos el apoyo móvil A, reemplazándolo por una fuerza hiperestática desconocida X , y formulamos las ecuaciones de momentos para los siguientes intervalos:

$$\text{expresiones 62} \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq z \leq m \rightarrow M_x = X \cdot z ; \frac{\partial M_x}{\partial X} = z \\ m \leq z \leq L \rightarrow M_x = X \cdot z - P(z - m) ; \frac{\partial M_x}{\partial X} = z \end{array} \right.$$

Seguidamente, aplicando el principio de Menabrea-Castigliano, obteniéndose:

$$\frac{1}{E \cdot J} \left[\int_0^m M_x \cdot \frac{\partial M_x}{\partial X} dz + \int_m^L M_x \cdot \frac{\partial M_x}{\partial X} dz \right] = 0 \quad \text{expresión 63}$$

Reemplazando las expresiones 62 en la expresión 63, resulta:

$$\int_0^m X \cdot z^2 dz + \int_m^L [X \cdot z - P(z - m)] z dz = 0 \quad \text{expresión 64}$$

De la integración de la expresión 64 se obtiene:

$$X \cdot \frac{m^3}{3} + \frac{X}{3} (L^3 - m^3) - \frac{P}{3} (L^3 - m^3) + \frac{P \cdot m}{2} (L^2 - m^2) = 0 \quad \text{expresión 65}$$

De la expresión 65 es sencillo obtener la siguiente expresión 66:

$$X = \frac{1}{2} P \frac{m^3}{L^3} - \frac{3}{2} P \frac{m}{L} + P \quad \text{expresión 66}$$

Y, finalmente, dividiendo ambos miembros de la expresión 66 por P , se obtiene la ecuación de la línea de influencia de la reacción hiperestática X solicitada, quedando la expresión 67 siguiente:

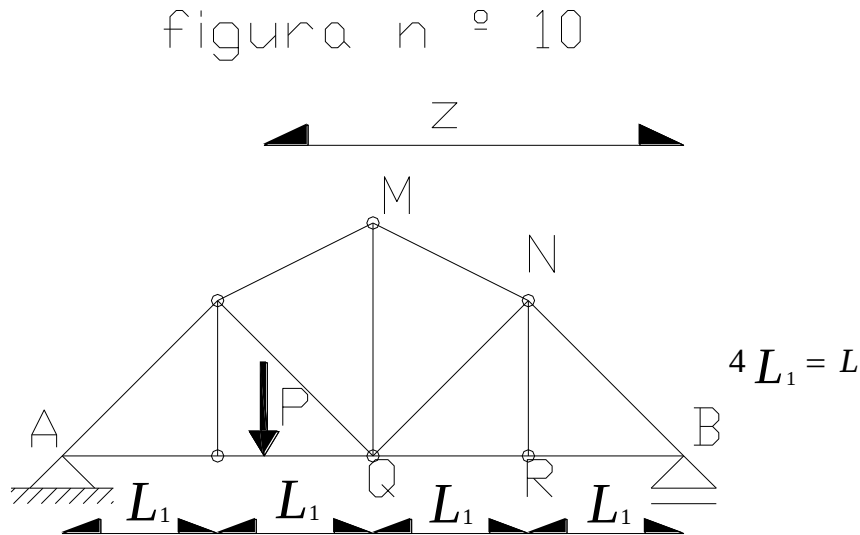
$$V_x = \frac{X}{P} = \frac{1}{2} \frac{m^3}{L^3} - \frac{3}{2} \frac{m}{L} + 1 \quad \text{expresión 67}$$

En la expresión 67, se tiene que cuando la abscisa $m = 0$, entonces la ordenada de la línea de influencia es 1, y, la reacción hiperestática es igual a la carga P ; en cambio, cuando $m = L$, dicha ordenada es nula, en consecuencia, la reacción hiperestática es nula, coincidiendo con los valores obtenidos en el caso de cargas aplicadas estáticamente.

En la figura n ° 10b se observa la gráfica de la línea de influencia correspondiente.

Línea de influencia de esfuerzos en barras de estructuras reticuladas

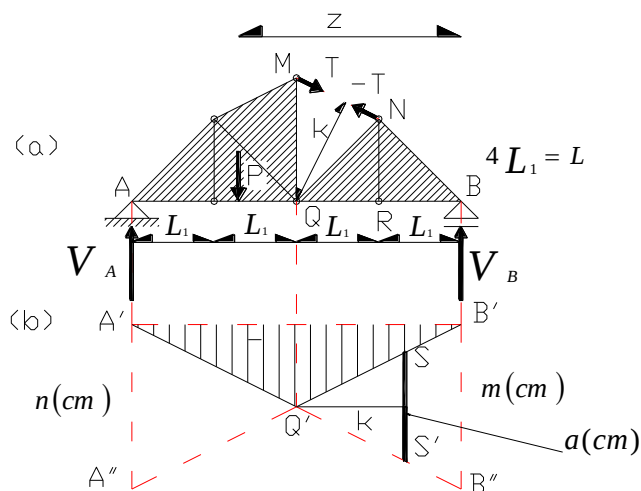
Se iniciará el análisis de las líneas de influencia en la estructura de la figura n ° 11, estudiando el comportamiento de las mismas en tres barras: cordón superior, cordón inferior, y barra montante.



La carga móvil P actúa sobre el cordón inferior, a una distancia z del apoyo B . Se analizarán las líneas de los esfuerzos en las barras MN , QR , y NQ , respectivamente.

Línea de influencia de la barra superior MN : Comenzamos sustituyendo la barra MN por dos fuerzas opuestas T y $-T$ en la dirección de la misma como indica la figura n ° 11 a. Luego de esto, la armadura, inicialmente de una chapa, queda transformado en una cadena cinemática de dos chapas articuladas por medio de una rótula en Q .

figura n ° 11



Las reacciones de vínculo externas correspondientes son:

$$\text{expresiones 68} \left\{ \begin{array}{l} V_A = P \cdot \frac{z}{L} \\ V_B = P - P \cdot \frac{z}{L} = P \frac{L-z}{L} \end{array} \right.$$

Se comenzará analizando cuando la carga **P** actúa en el tramo **AQ**, es decir, a la izquierda de la articulación. Para la misma, planteando una ecuación de equilibrio relativo de la chapa izquierda respecto de la articulación en **Q**, quedándonos:

$$\sum M_Q^{izq} = 0 = V_A \cdot 2L_1 - P \cdot (z - 2L_1) + T \cdot k \quad \text{expresión 69}$$

Reemplazando en la expresión 69 el valor de V_A , y, despejando **T**, se obtiene:

$$T = - \frac{2P \cdot \frac{z}{4L_1} L_1 - P \cdot z + 2P \cdot L_1}{k} = - \frac{P(4L_1 - z)}{2k} \quad \text{expresión 70}$$

Debido a que $L = 4L_1$ resulta mayor que **z**, en consecuencia, la expresión 70 resulta de signo negativo, por consiguiente, el sentido de **T** deberá ser contrario al asignado, materializando un esfuerzo de compresión en la barra **MN**. Cuando $z = L = 4L_1$, el esfuerzo **T** = 0. Dividiendo ambos miembros de la expresión 70 por **P**, se obtiene la ecuación de la línea de influencia del esfuerzo **T** entre **A** y **Q**, siendo esta:

$$V_T = \frac{T}{P} = - \frac{4L_1 - z}{2k} \quad 4L_1 \leq z \leq 2L_1 \quad \text{expresión 71}$$

La expresión 71, representa la ecuación de una recta de pendiente $\frac{1}{2k}$, de ordenada

nula para $z = L$, y, de ordenada $\frac{L_1}{k}$ para $z = 2L_1$.

Seguidamente, analizaremos el caso en que la carga **P** actúa en el tramo entre **Q** y **B**, es decir, a la derecha de la articulación. Entonces, planteando una ecuación de sumatoria de momentos de la chapa derecha con respecto de **Q**, se tiene:

$$\sum M_Q^{der} = 0 = V_B \cdot 2L_1 + T \cdot k - P \cdot (2L_1 - z) \quad \text{expresión 72}$$

Reemplazando el valor de **V_B** correspondiente en la expresión 68, y, despejando **T** en la expresión 72, resulta:

$$T = -P \frac{z}{2k} \quad \text{expresión 73}$$

Ahora, si dividimos ambos miembros de la expresión 73 por **P**, tenemos la ecuación de la línea de influencia del esfuerzo **T** cuando la carga **P** actúa entre **Q** y **B**, quedándonos esto:

$$V_T = \frac{T}{P} = -\frac{z}{2k} \quad 0 \leq z \leq 2L_1 \quad \text{expresión 74}$$

Se deduce, de la ecuación 74, que cuando **z = 0**, la ordenada de la línea de influencia es nula, como era de esperarse. La expresión 74 es la ecuación de una recta de pendiente $-\frac{1}{2k}$. Al igual que en el caso en donde la carga **P** actuaba a la izquierda de la articulación, el signo negativo de la expresión 74 indica que el sentido de **T** es opuesto al asignado, materializándose un esfuerzo de compresión en la barra.

Ambas rectas correspondientes a la línea de influencia se cortan en un punto. En dicho punto las ordenadas de las líneas de influencias son iguales, y para determinar la abcisa correspondiente a este punto, se deberán igualar las expresiones 71 y 74, resultando de realizar la misma:

$$\frac{z - 4L_1}{2k} = -\frac{z}{2k} \quad \text{expresión 75}$$

De la expresión 75 se obtiene $z = 2L_1$. En la figura n.º 11b se muestra la gráfica de la línea de influencia del esfuerzo **T** en la barra **MN**.

En cuanto a la construcción de la gráfica de la línea de influencia, se elige un eje de referencia **A'B'**, que resultan de la proyección de **A** y **B** sobre el mismo, luego, se traza un segmento **B'B'' = m(cm)** normal al eje de referencia. Este segmento **m(cm)** representa el valor de la ordenada de la línea de influencia cuando en la ecuación 71 se

hace **z = 0**, representando el mismo en escala $\frac{2L_1}{k}$. Entonces, uniendo **B''** con **A'**, se obtiene la recta que representa la función de la expresión 71. Ahora, si proyectamos la articulación **Q** sobre esta recta, tenemos **Q'**, y, uniendo **Q'** con **B'**, se tiene la recta representativa de la función correspondiente a la expresión 74. Quedando definida la línea de influencia del esfuerzo en **MN** por medio de la poligonal **A'Q'B'A'**, siendo el signo negativo, debido a que las expresiones 71 y 74 son negativas sea cualquier valor **z**.

Luego, el segmento $A'A'' = n(cm)$ representa en la escala, la ordenada de la línea de influencia cuando $z = L = 4 L_1$ correspondiente a la expresión 74, siendo este valor:

$\frac{2L_1}{k}$, Coincidiendo, en este ejemplo, con el correspondiente valor de $B'B''$. En cuanto a la escala, se tiene en cuenta:

$$m(cm).escala = \frac{2L_1}{k} \quad \text{expresión 76}$$

de la expresión 76 surge:

$$escala = \frac{2L_1}{k.m(cm)} \quad \text{expresión 77}$$

La expresión 77 se podía expresar también como:

$$escala = \frac{2L_1}{k.n(cm)} \quad \text{expresión 78}$$

La escala, se determinará, también, de la siguiente forma: llevando horizontalmente, a partir de Q' un segmento de longitud k , y, en su extremo trazamos un segmento normal SS' , nos quedan formados dos triángulos semejantes $Q'SS'$, y $Q'B'B''$. De estos triángulos semejantes, se determina la siguiente proporción:

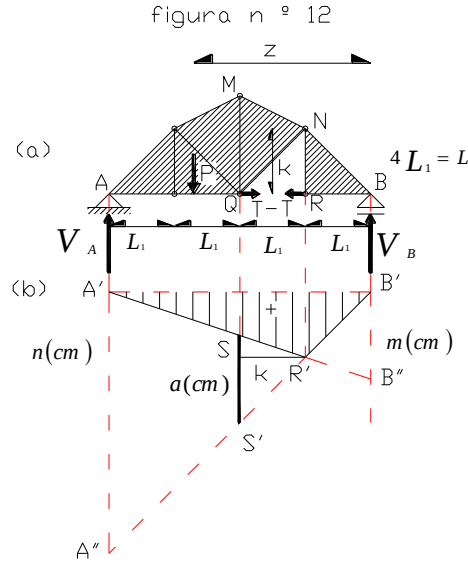
$$\frac{k}{a(cm)} = \frac{2L_1}{m(cm)} \quad \text{expresión 79}$$

surgiendo la escala a utilizar de la expresión 79,

$$escala = \frac{1}{a(cm)} = \frac{2L_1}{k.m(cm)} \quad \text{expresión 80}$$

A continuación, se analizará la línea de influencia del esfuerzo en una barra del cordón inferior, considerando la carga P actuante sobre cordón inferior de la estructura.

Para ello, el gráfico de la figura n^o 12 nos ayudará para el análisis del tema en cuestión, en donde se estudiará la línea de influencia del esfuerzo en la barra de cordón inferior QR .



Comenzamos por suprimir la barra **QR** reemplazándola por dos fuerzas iguales y opuestas **T** y **-T**, actuantes en los nudos **Q** y **R** respectivamente como se indica en la figura 12 a. Luego, procediendo en forma análoga a la determinación del esfuerzo que en la barra **MN**, queda determinada una cadena cinemática de dos chapas articuladas en **N**.

Empezamos el análisis, considerando que la carga **P** se desplaza en el tramo **AQ**, es decir, a la izquierda de **N**. Para ello, realizamos una ecuación de sumatoria de momentos de equilibrio relativo en esta chapa con respecto a la articulación en **N**, y, siendo **k** el brazo de palanca de **T** respecto de la articulación se obtiene:

$$\sum M_N^{izq} = 0 = V_A \cdot 3L_1 - P \cdot (z - L_1) - T \cdot k \quad \text{expresión 81}$$

Reemplazando el valor V_A , y despejando **T** se obtiene:

$$T = \frac{P \cdot \frac{z}{L} \cdot 3L_1 - P(z - L_1)}{k} = \frac{P(4L_1 - z)}{4k} \quad \text{expresión 82}$$

Dividiendo ambos miembros de la expresión 82 por **P**, se obtiene la ecuación de la línea de influencia de **QR** entre **A** y **Q**, como se indica a continuación:

$$V_T = \frac{T}{P} = \frac{4L_1 - z}{4k} \quad \text{expresión 83}$$

Como es de esperarse, cuando $z = L = 4L_1$ se tiene $v_T = 0$. En cuanto al sentido de **T**, se corresponde con el asignado, y el mismo indica un esfuerzo de tracción cuando la carga actúa en **AQ** debido a que $L > z$. La expresión 83 responde a la ecuación de una recta de pendiente negativa $-\frac{1}{4k}$.

A continuación, analizamos cuando la carga actúa en el tramo **RB**, es decir, a la derecha de **N**, y, realizando una sumatoria de momentos de la chapa derecha respecto de la articulación, resultando la expresión 83.

$$\sum M_N^{der} = 0 = -T.k - P.(L_1 - z) + V_B.L_1 \quad \text{expresión 84}$$

Reemplazando V_B en la expresión 83, y, despejando T resulta:

$$T = \frac{P \cdot \frac{(4L_1 - z)}{4L_1} \cdot L_1 - P(L_1 - z)}{k} = \frac{3}{4} P \cdot \frac{z}{k} \quad \text{expresión 85}$$

Cuando $z = 0$, se tiene $T = 0$. El signo de T es coincidente con el asignado, por consiguiente, la barra **QR** estará sometida a tracción. Ahora, dividiendo ambos miembros de la expresión 85 por P , se obtiene la ecuación de la línea de influencia entre **R** y **B**, como se indica,

$$V_T = \frac{T}{P} = \frac{3}{4} \frac{z}{k} \quad \text{expresión 86}$$

La expresión 86 representa la ecuación de una recta de pendiente positiva $\frac{3}{4k}$.

La figura n^o 12b muestra la línea de influencia del esfuerzo en la barra **QR**. Para la construcción de la misma, se sigue un procedimiento análogo al explicado para la determinación de la línea de influencia de la barra **MN**. Se traza una recta de referencia **A'B'** resultantes de las respectivas proyecciones de los puntos **A** y **B** en la armadura. Luego, normal a **B'** se traza un segmento arbitrario **B'B'' = m(cm)**, representando el mismo, el valor de la ordenada de la línea de influencia cuando $z = 0$, siendo este valor $\frac{L_1}{k}$ de acuerdo a expresión 83. Ahora, uniendo **B''** con **A'** se obtiene la recta que define la línea de influencia del esfuerzo **QR** entre **A** y **Q**. Luego, proyectando la articulación **R** sobre esta recta, se obtiene **R'**, y, uniendo **R'** con **B'** se obtiene la recta que define la línea de influencia del esfuerzo en la barra **QR** entre **R** y **B**. La ordenada **A'A'' = n(cm)** representa en la escala el valor de la ordenada de la línea de influencia cuando

$z = L$, es decir $\frac{3}{4} \frac{L_1}{k}$, según se indica en la ecuación 86. Deberá tenerse presente, que entre **Q** y **R** la transmisión de carga se efectúa en forma indirecta, por lo que se debe realizar una corrección en el diagrama de línea de influencia para este tramo, como se analizará en los problemas presentados oportunamente.

En cuanto a la escala de la misma, se tiene en cuenta que:

$$m(cm).escala = \frac{L_1}{k} \quad \text{expresión 87}$$

De la ecuación 87 se obtiene:

$$escala = \frac{L_1}{k.m(cm)} \quad \text{expresión 88}$$

También se puede obtener la escala de la siguiente forma: en el diagrama de línea de influencia, se traza a partir de **R'** un segmento horizontal igual al brazo de palanca **k**, luego, en extremo opuesto a **R'** se traza un segmento **SS'** normal al mismo tal que **SS' = a(cm)**, y, por relación de triángulos semejantes **SS'R' ~ A'R'A''** se tiene la siguiente proporción:

$$\frac{k}{a(cm)} = \frac{L_1}{m(cm)} \quad \text{expresión 89}$$

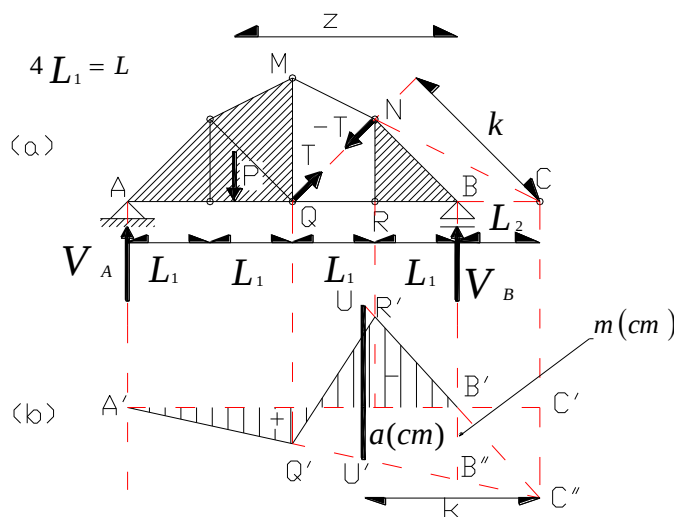
Obteniéndose la escala de la expresión 89, quedando definida la expresión 90 de la misma.

$$\text{escala} = \frac{1}{a(cm)} = \frac{L_1}{k.m(cm)} \quad \text{expresión 90}$$

Seguidamente, se determinará la línea de influencia de la barra diagonal **QN**. Para analizar la línea de influencia correspondiente, reemplazamos la barra **QN** por dos fuerzas opuestas **T** y

-**T** actuantes en los nudos **Q** y **N** respectivamente como se indica en la figura n ° 13. Con esto, la armadura queda conformada en una cadena cinemática de dos chapas **AMQ** y **NRB** unidas por las bielas **MN** y **QR** respectivamente, con una articulación ficticia en **C**, coincidente con la intercepción de las direcciones de las bielas mencionadas.

figura n ° 13



En la figura n ° 13, llamamos **k** al brazo de palanca de **T** respecto de **C**, **L2**, la distancia desde el apoyo en **B** hasta la articulación **C**. Se considera el eje de referencia ubicado en el apoyo **B**. De esta forma, comenzamos el análisis cuando **P** se desplaza en el tramo **AQ** de la chapa izquierda, para la cual, por medio de una ecuación de equilibrio relativo de la chapa izquierda respecto de la articulación **C**, se tiene:

$$\sum M_C^{izq} = 0 = V_A \cdot (L + L_2) - P(z + L_2) + T \cdot k \quad \text{expresión 91}$$

Reemplazando V_A , y despejando T de la expresión 91, resulta:

$$T.k + P.\frac{z}{L}(L + L_2) - P(z + L_2) = 0 \quad \text{de donde} \quad T = P \frac{L_2(L - z)}{k.L} \quad \text{expresión 92}$$

Dividiendo ambos miembros de la expresión 92 por P , se obtiene la ecuación de la línea de influencia del esfuerzo en la barra **QN** entre **A** y **Q**.

$$V_T = \frac{T}{P} = \frac{L_2(L - z)}{k.L} \quad \text{expresión 93}$$

La expresión 93 indica que la ordenada de la línea de influencia es nula para $z = L$, y,

la misma es la ecuación de una recta de pendiente $-\frac{L_2}{k.L}$. Debido a que L es siempre mayor que z en la expresión 93, las ordenadas v_T son positivas, entonces, el esfuerzo de la barra **QN** cuando **P** actúa entre **A** y **Q** es de tracción.

Seguidamente, analizamos cuando **P** actúa en el tramo **RB**, en la chapa derecha. Para esto, una ecuación de equilibrio relativo de la parte derecha de la cadena cinemática respecto de la articulación **C**, obteniéndose:

$$\sum M_C^{der} = 0 = -V_B.L_2 + T.k + P(z + L_2) \quad \text{expresión 94}$$

Reemplazando el valor de V_B , y despejando T de L expresión 94, resulta:

$$-P \frac{L - z}{L}.L_2 + T.k + P(z + L_2) = 0 \quad \text{de donde} \quad T = -P \frac{z(L_2 + L)}{k.L} \quad \text{expresión 95}$$

Dividendo miembro a miembro la expresión 95 por P , se obtiene la ecuación de la línea de influencia del esfuerzo en **QN** cuando **P** actúa entre **R** y **B**.

$$V_T = \frac{T}{P} = -\frac{z(L_2 + L)}{k.L} \quad \text{expresión 96}$$

En cuanto a la expresión 96, la misma nos informa que las ordenadas son negativas en cualquier valor de z , salvo en el apoyo **B**, en donde la ordenada es nula, por consiguiente, la barra está sometida a compresión cuando la carga actúa entre **R** y **B**. La

expresión 96 es la ecuación de una recta de pendiente $-\frac{L + L_2}{k.L}$.

Ahora, debemos determinar en que abscisa son iguales las ordenadas de las expresiones 93 y 96. Para ello igualamos las mismas, como se indica a continuación:

$$\frac{L_2(L - z)}{k.L} = -z \frac{L_2 + L}{k.L} \quad \text{expresión 97}$$

De la expresión 97 se obtiene:

$$L_2.L - L_2.z = -z.L_2 - z.L \rightarrow z = -L_2$$

lo que indica que ambas ecuaciones se igualan en la articulación **C** a la derecha de la referencia **B** para la cual se consideró $z = 0$.

Para el trazado de la línea de influencia, se indica un eje de referencia horizontal **A'B'**, proyecciones de **A** y **B** respectivamente, luego del cual, se proyecta **C** en **C'**. A

continuación, se traza un segmento $\overline{C'C''}$ normal al eje de referencia. Desde C'' se trazan dos rectas: a) $C''A'$ correspondiente a la línea de influencia del esfuerzo en QN cuando P se desplaza entre A y Q , por consiguiente, esta recta será válida entre A' y Q' ; y, b) $C''B'$ correspondiente a la línea de influencia del esfuerzo QN cuando P se desplaza entre R y B , en consecuencia, esta recta tendrá validez entre B' y R' . Entre Q y R , la variación de la línea de influencia será lineal, y se obtiene uniendo Q' con R' .

Las ordenadas de la línea de influencia serán positivas entre A' y Q' , y negativas entre R' y B' . A continuación, se determinará la escala. Para esto, cuando $z = 0$, la expresión 93 es:

$$V_T = \frac{L_2}{k} \quad \text{expresión 98}$$

La expresión 98 se representa en la figura n.º 13b por el segmento $B'B'' = m(\text{cm})$. Por esto, la escala es:

$$\text{escala} = \frac{L_2}{k \cdot m(\text{cm})} \quad \text{expresión 99}$$

Ahora, trazando desde C'' un segmento horizontal igual al brazo de palancas k , y seguidamente un segmento normal al anterior, nos queda definido en el diagrama el segmento $\overline{UU'} = a(\text{cm})$.

Luego, por relación de los triángulos semejantes $B'B''C''$ y $UU'C''$, se tiene la siguiente proporción:

$$\frac{k}{a(\text{cm})} = \frac{L_2}{m(\text{cm})} \quad \text{expresión 100}$$

De la expresión 100 se obtiene otra forma de indicar la escala con la expresión 101,

$$\text{escala} = \frac{L_2}{k \cdot m(\text{cm})} = \frac{1}{a(\text{cm})} \quad \text{expresión 101}$$

En la sección de problemas resueltos de este capítulo se analizarán una serie de ejemplos que ayudarán a clarificar el tema.

Método cinemático del trazado de líneas de influencia de magnitudes estáticas

El método cinemático para el trazado de las líneas de influencia, está basado en el principio de los trabajos virtuales, cuyo enunciado expresa: **“Es condición necesaria y suficiente para que un sistema de puntos materiales, sujeto a vínculos determinados, se encuentre en equilibrio en una determinada posición bajo la acción de un sistema de fuerzas cualesquiera, que el trabajo desarrollado por las mismas, para cualquier desplazamiento virtual del sistema de puntos materiales, dado a partir de una posición sea nulo(para desplazamientos reversibles como son los desplazamientos compatibles con los vínculos que son bilaterales)”**.

Dado un sistema cualquiera isostáticamente sustentado sujeto a una carga **P** cualquiera, de determinada dirección, al poner en evidencia una incógnita **X** (es decir, eliminando el vínculo que lo materializa), se le confiere al sistema un grado de libertad, por consiguiente, se transforma en un sistema cinemáticamente variable, es decir, es un mecanismo cinemático que puede sufrir un desplazamiento.

Como se estudió en el capítulo de trabajos virtuales, al darle al sistema en estudio un desplazamiento virtual, durante este desplazamiento, la fuerza **P** y la incógnita **X** realizan un trabajo. Luego, por el principio de los trabajos virtuales, la suma de los trabajos virtuales deberá ser nula, es decir:

$$P \cdot \eta_P + X \cdot a = 0 \quad \text{expresión 102}$$

Siendo η_P y **a** los desplazamientos virtuales de **P** y de la incógnita **X** respectivamente. Entonces, de la expresión 102 se obtiene:

$$v_X = \frac{X}{P} = -\frac{\eta_P}{a} \quad \text{expresión 103}$$

En la expresión 103 se puede observar que el diagrama de corrimientos (η_P) de la dirección de **P** corresponde, salvo escala y signo, a las ordenadas de v_X para esa dirección.

En cuanto a la escala, esta es “ $\text{escala} = \frac{1}{a}$ ”, siendo **a**, el desplazamiento del punto de aplicación de la incógnita proyectada en la dirección de sí misma, y se denominará, desplazamiento correspondiente a la incógnita.

En la tabla n ° 1 se describen los desplazamientos correspondientes a cada tipo de incógnita.

Tabla n ° 1- desplazamientos correspondientes a las incógnitas

X (naturaleza de la incógnita)	a(desplazamiento)
Fuerza (componentes reactivas)	Corrimiento en su dirección
Dos fuerzas opuestas	Corrimiento relativo según la dirección de las dos fuerzas. Variación de distancia
Par	Rotación absoluta
Par de pares	Rotación relativa

En cuanto al signo se refiere, el mismo está definido por la expresión 103. “A la parte positiva del diagrama de corrimientos corresponde signo contrario al del desplazamiento correspondiente a la incógnita”.

Procedimiento a seguir:

- 1 °) Se pone en evidencia la incógnita, dándole al sistema un grado de libertad.

- 2 º) Se determinan los polos del mecanismo cinemático y se le confiere un desplazamiento virtual.
- 3 º) Se traza el diagrama de corrimientos (η_P) de la dirección que se desea.
- 4 º) Se determina la escala y el signo correspondiente.

Aclarado el procedimiento a seguir, pasamos a explicar la determinación de las líneas de influencia de características estáticas.

Línea de influencia de una reacción de vínculo externa

27

Para desarrollar el tema, nos apoyamos en la figura n º 14, en la cual se deberá determinar la línea de influencia del apoyo móvil **A**, sustituyendo al mismo por una fuerza incógnita **VA**.

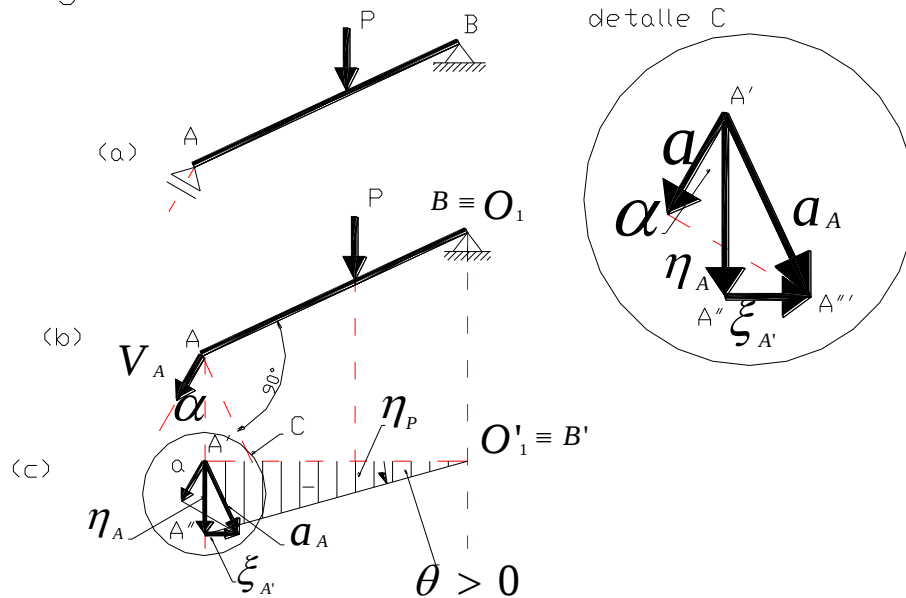
El polo de la chapa coincide con el apoyo fijo **B**. Luego, cuando se le confiere al sistema un giro $\theta > 0$, y se traza un diagrama de corrimientos verticales de la chapa como lo indica la figura n º 14b, el mismo muestra los corrimientos η , y, el diagrama de correspondiente será una recta con ordenada nula en el polo **B'**. La ecuación de los trabajos virtuales será:

$$P \cdot \eta_P + V_A \cdot a = 0 \quad \text{expresión 104}$$

Obteniéndose de la expresión 104,

$$V_{VA} = \frac{V_A}{P} = -\frac{\eta_P}{a} \quad \text{expresión 105}$$

figura n º 14



De acuerdo a la figura n º 14c, para determinar el corrimiento de la incógnita, trazamos una paralela por **A'** a la dirección del corrimiento efectivo en **A**, siendo este, normal a

O₁-A. Luego, trazada una recta de referencia **A'B'**, se marca un segmento **A'A''** normal al segmento **A'B'** representativo del desplazamiento vertical de **V_A**. Ahora, desproyectando el punto **A''** en **A'''**, vector **a_A**, representativo del corrimiento efectivo de **A**. Seguidamente, se proyecta este vector **a_A** sobre la dirección de **V_A**, obteniéndose el vector **a** representativo del corrimiento correspondiente a la incógnita, que en este caso es positivo, por ser positiva su proyección sobre eje **z**.

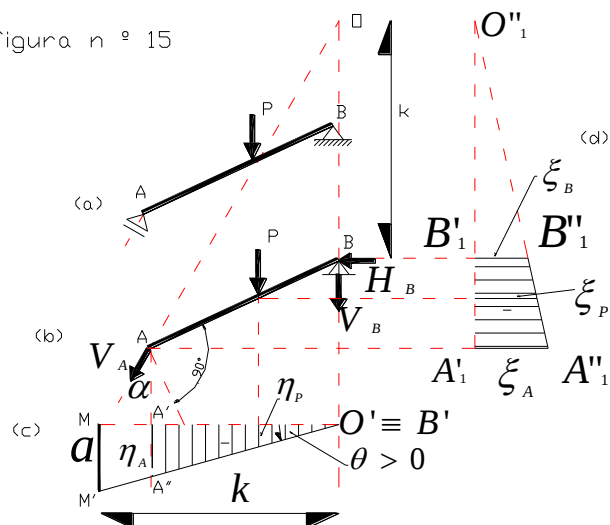
A continuación, la escala de la línea de influencia será: $escala = \frac{1}{a(cm)}$ y su signo positivo por corresponderse con el signo negativo de las ordenadas del diagrama de corrimientos verticales, y, de acuerdo a la expresión 104, se le debe asignar signo contrario a las mismas.

Seguidamente, se determinará la línea de influencia de la componente horizontal de la reacción en **B** correspondiente a la viga de la figura n.º 14(a). Para ello, se pone en evidencia la reacción horizontal **H_B**, reemplazándola por una fuerza horizontal como lo indica la figura n.º 15b. Luego, el sistema queda cinemáticamente variable con dos apoyos móviles en **A** y en **B**. Comenzamos ubicando el polo **O** de rotación. El mismo se halla en la intersección de las verticales a los apoyos móviles **A** y **B**. Comenzamos eligiendo un eje de referencia horizontal **A'B'**, en donde **B'** coincide con la proyección **O'** del polo **O**. Luego, damos una rotación $\theta > 0$ a partir del punto fijo **O**, y se representa el diagrama de corrimientos verticales de la viga en la figura n.º 15c. Este diagrama será una función lineal. Entonces, trazamos un segmento vertical **A'A''** que será representativo del corrimiento vertical η_A de **V_A**. En cuanto al segmento representativo del corrimiento vertical de **H_B**, el mismo será nulo por coincidir en este diagrama la proyección **O'** de **O** con la proyección **B'** de **B**.

En cuanto a la escala, la misma no resulta sencilla en su determinación, pues la proyección de **B** y **O** son coincidentes en el eje de referencia, no permitiendo la determinación de la misma en este diagrama. Por esta razón, se construye un diagrama de corrimientos horizontales, eligiendo un eje de referencia vertical **A'₁B'₁** limitada por las proyecciones de **A** y **B** respectivamente, como el indicado en la figura n.º 15d. Al igual que en el diagrama anterior, se traza el segmento **A'₁A''₁** representativo del desplazamiento horizontal de **V_A**, y, ubicando la proyección de **O**, **O''₁** sobre esta referencia, se une **A''₁** con esta proyección **O''₁**. Luego, queda delimitado el desplazamiento horizontal con la abscisa ξ_B , que al ser **H_B** horizontal, será a su vez representativa del corrimiento del mismo, igual al corrimiento **a**. En consecuencia, la

escala de la línea de influencia será: $escala = \frac{1}{a(cm)}$.

figura n ° 15



Entonces, al ser $a > 0$, a la parte de línea de influencia le corresponde signo contrario al de a , por consiguiente el signo de la línea de influencia es negativo.

Luego, el corrimiento efectivo de a , puede expresarse:

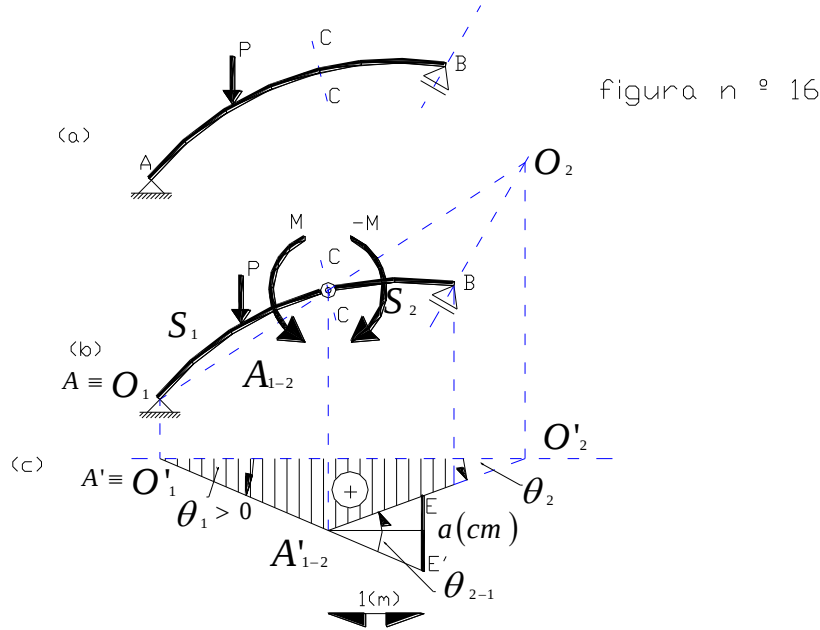
$$a = \theta \cdot k \quad \text{expresión 106}$$

donde k es brazo de palanca, y distancia $\overline{B'_1 O''_1} = \overline{O_1 M}$

Definiendo esto, el segmento $\overline{M'M} = a(cm)$ la escala de la línea de influencia.

Línea de influencia de momentos flectores

Para desarrollar este punto, consideramos la viga isostáticamente sustentada de la figura n ° 16 sometida a una carga móvil P , y se pretende determinar la línea de influencia del momento flector de la sección C-C.



En la figura n ° 16b se ha introducido en la sección **C-C** una articulación, con lo cual se transformó la viga **AB** en un arco de tres articulaciones, transformándose en un sistema estáticamente variable con un grado de libertad. Para restituir el equilibrio, se colocan dos momentos **M₁** y **-M₁** a la izquierda y a la derecha de la sección **C-C** respectivamente. El conjunto materializa el momento flector en la sección mencionada.

Como se estudió en el capítulo de trabajos virtuales, una vez determinada la ubicación de los polos **O₁** y **O₂**, se le confiere a la chapa **S₁** un desplazamiento virtual de forma tal que las chapas experimenten las rotaciones respectivas **θ₁** y **θ₂**. Entonces, las fuerzas aplicadas realizarán un trabajo cuya suma será nula de acuerdo al principio de los trabajos virtuales. El trabajo realizado por las fuerzas será:

$$P \cdot \eta_p - M \cdot \theta_1 + M \theta_2 = 0 \quad \text{expresión 107}$$

La expresión 107 se puede indicar,

$$P \cdot \eta_p + M(\theta_2 - \theta_1) = 0 \quad \text{expresión 108}$$

pero, siendo $\theta_2 - \theta_1 = \theta_{2-1}$, de la expresión 108 se deduce:

$$V_M = \frac{M}{P} = -\frac{\eta_p}{\theta_{2-1}} \quad \text{expresión 109}$$

Entonces, el diagrama de corrimientos verticales de compone de dos rectas de ordenada nula en correspondencia con las proyecciones de los polos **O₁** y **O₂** respectivamente.

Ambas rectas coinciden con la ordenada de **A₁₋₂**.

Según se puede deducir de la figura n ° 16c, en el caso del momento flector, la inversa de la rotación relativa **θ₂₋₁**, es la escala de la línea de influencia. Para determinar la escala, se traza horizontalmente por **A'₁₋₂** un segmento horizontal en la escala de

longitudes equivalente a $1(m)$, y, seguidamente, se traza un segmento normal al anterior $\overline{E'E}$ resultante de la intercepción con las rectas representantes de la línea de influencia. Este segmento resulta ser $\overline{E'E} = a(cm)$, que a continuación se determina:

$$\theta_{2-1} \cdot 1(m) = a(cm) \quad \text{expresión 110}$$

Surgiendo de la expresión 110, la correspondiente escala, a saber:

$$\text{escala} = \frac{1}{\theta_{2-1}} = \frac{1}{a(cm)} \quad \text{expresión 111}$$

De acuerdo a la expresión 109, siendo la rotación correspondiente a la incógnita θ_{2-1} negativa, a la parte positiva del diagrama de línea de influencia le deberá corresponder signo contrario al de dicha rotación, resultando, en consecuencia, en este caso, ordenadas positivas del diagrama.

Línea de influencia del esfuerzo cortante

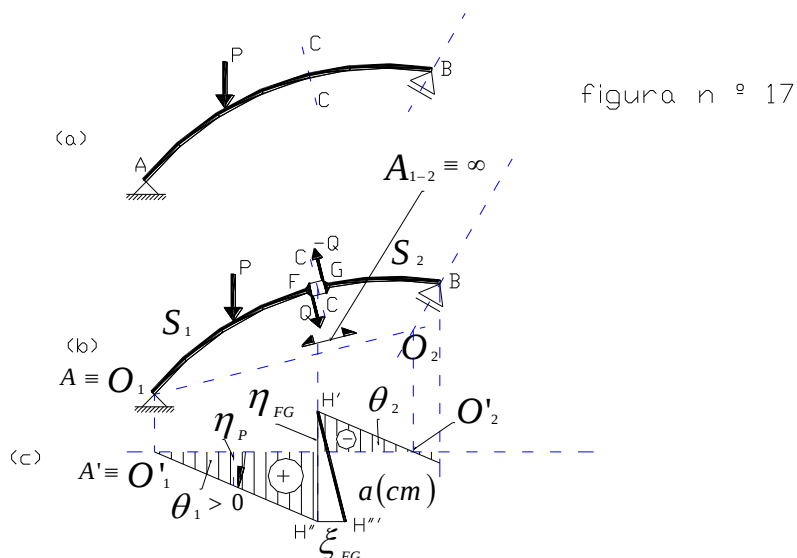
Se analizará la línea de influencia del esfuerzo cortante en la sección **C-C** de la viga isostáticamente sustentada sometida a carga móvil **P** de la figura n.º 17 a. Para ello, según se estudió en el capítulo de trabajos virtuales, se transforma el sistema en un arco a tres articulaciones, colocando, para este caso, dos bielas paralelas y en la dirección del eje de la viga en la forma indicada en la figura n.º 17b. La articulación **A₁₋₂** será impropia, luego, según el principio de los trabajos virtuales para esta configuración se tiene:

$$P \cdot \eta_p + Q \cdot a = 0 \quad \text{expresión 112}$$

Despejando **Q**, y dividiendo ambos miembros de la expresión 112 por **P** se tiene:

$$V_Q = \frac{Q}{P} = -\frac{\eta_p}{a} \quad \text{expresión 113}$$

Debido a que se tiene que restablecer el equilibrio en la sección **C-C** con dos fuerzas opuestas **Q** y **-Q** aplicadas en las chapas **S₁** y **S₂** respectivamente, la fuerza actuante sobre **S₂** será la que materializa el esfuerzo cortante en **C-C**. En cuanto al corrimiento **a** de la incógnita **Q** en su propia dirección, el mismo resultará de la desproyección correspondiente al desplazamiento relativo virtual η_{FG} entre las secciones **F** y **G** de las chapas **S₁** y **S₂** respectivamente.



Según la figura n ° 17b, el diagrama de corrimientos verticales se compone de dos rectas paralelas debido a que A_{1-2} es impropia, cuyas ordenadas η son nulas en correspondencia con las proyecciones de los polos O'_1 y O'_2 . La ordenada η_{FG} representa el corrimiento relativo vertical de F respecto de G . Entonces, el desplazamiento relativo efectivo de F respecto de G será definido en la dirección del esfuerzo cortante Q , siendo este desplazamiento $a(\text{cm})$ indicado en la figura n ° 17c. Para determinar este desplazamiento, conocido el desplazamiento vertical η_{FG} , representado por el segmento $\overline{H'H''} = \eta_{FG}$ del diagrama de los corrimientos verticales, se traza por H' una recta paralela a la dirección de Q , y por H'' un segmento horizontal $\overline{H''H'''} = \xi_{FG}$ representativo del desplazamiento horizontal relativo de F respecto de G . Luego, desproyectando el segmento $\overline{H'H''}$ en la dirección de Q , se obtiene el segmento $\overline{H'H'''} = a(\text{cm})$ representativo del corrimiento relativo efectivo de F respecto de G . Consecuentemente, la escala vendrá expresada como:

$$\text{escala} = \frac{1}{a(\text{cm})} \text{ expresión 114}$$

Pudiéndose deducir esta de la expresión 113. Para determinar el signo de esta, se tiene en cuenta que a es negativo por ser negativa la proyección de la misma sobre el eje z , por consiguiente, debido a la expresión 113, las ordenadas del diagrama debajo del eje de referencia serán positivas.

Línea de influencia del esfuerzo normal

Desarrollaremos este punto considerando la viga simplemente apoyada de la figura n ° 18 a sometida a una carga móvil P , y pretendemos determinar la línea de influencia del esfuerzo normal en la sección $C-C$. En realidad, el proceso a seguir es análogo a la

determinación de la línea de influencia del esfuerzo cortante, con la diferencia que, para poner en evidencia el esfuerzo normal en la sección, se transforma la viga en un arco a tres articulaciones colocando un mecanismo de dos bielas paralelas normales al eje de la viga en cuestión. Luego, se restablece el equilibrio colocando dos fuerzas normales a la sección **N** y **-N** en las secciones **F** y **G** de las chapas **S**₁ y **S**₂ respectivamente.

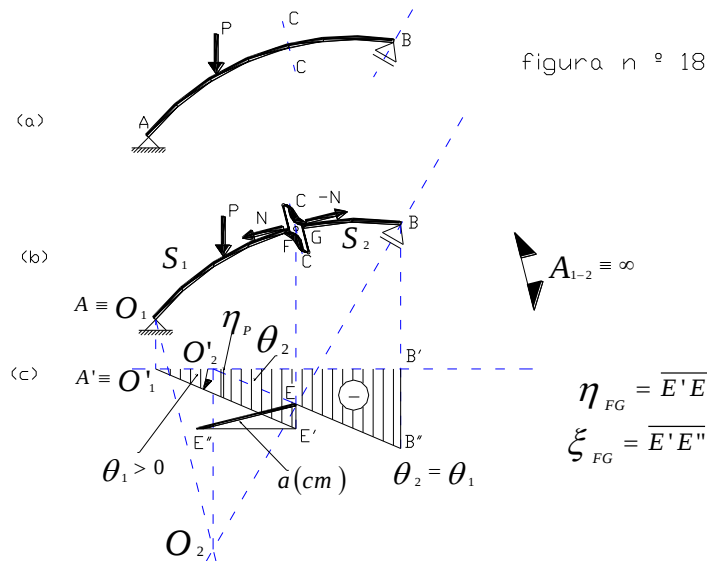
Por el principio de los trabajos virtuales se tiene:

$$P \cdot \eta_P + N \cdot a = 0 \quad \text{expresión 115}$$

Siendo **a** el corrimiento relativo de la incógnita **N**. De la expresión 115 se deduce:

$$V_N = \frac{N}{P} = -\frac{\eta_P}{a} \quad \text{expresión 116}$$

Para construir la línea de influencia, ubicado el polo **O**₁ de **S**₁, y, siendo impropia **A**₁₋₂, se traza por **O**₁ una recta paralela a la dirección de las bielas, obteniéndose el polo **O**₂ de **S**₂ en la intersección de esta recta con la dirección del apoyo móvil **B**, como se indica en la figura n ° 18b.



De la figura n ° 18c, se observa que el corrimiento relativo vertical de **N** es η_{FG} cuyo segmento representativo es el segmento $\overline{E'E} = \eta_{FG}$. Luego el corrimiento relativo horizontal de **N** está representado por el segmento $\overline{E'E''} = \xi_{FG}$. Al ser la articulación impropia, la línea de influencia del esfuerzo normal en **C-C** está constituida por dos rectas paralelas limitadas por los segmentos $\overline{A'E'}$ y $\overline{EB''}$. El corrimiento de **N** en su propia dirección está indicado por el vector **a**, por lo que la escala de líneas de influencia es:

$$\text{escala} = \frac{1}{a(\text{cm})} \quad \text{expresión 117}$$

De acuerdo a la expresión 116, al ser **a** positivo por corresponderse en signo con el eje **z** positivo, las ordenadas de línea de influencia deberán tener signo contrario al vector **a**, en consecuencia, el signo de las ordenadas debajo de la referencia **A'B'** son negativas.

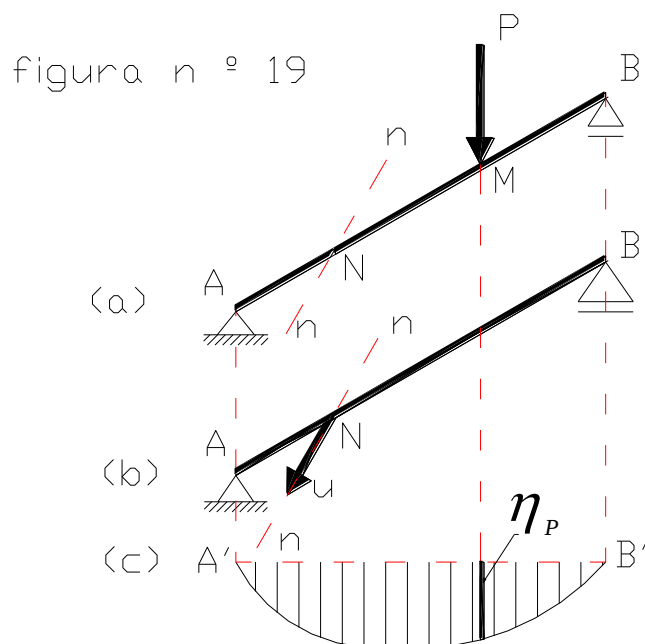
Líneas de influencia de magnitudes elásticas

Considérese un sistema isostático cualquiera como el de la figura n ° 19 a sobre el que actúa una fuerza móvil **P** (paralelamente a su propia dirección), originándose para cada posición de **P** una determinada deformación. Llamando **a** al desplazamiento debido a su deformación (proyección sobre una dirección del desplazamiento de un punto del sistema, rotación de una sección de alma llena, o, rotación relativa de dos secciones).

Seguidamente, hallaremos la línea de influencia de **a**, para ello, suponemos $a = a_N^{nn}$ (proyección en la dirección **n-n** del desplazamiento experimentado por el punto **N**). Suponiendo que **P** está aplicada en un punto **M**, en consecuencia, la ordenada correspondiente de la línea de influencia de **a** es:

$$V_a = \frac{a}{P} \quad \text{expresión 118}$$

Ahora, si aplicamos al sistema descargado el esfuerzo auxiliar que denominaremos **u** de la magnitud elástica **a** (factor complementario en la expresión de trabajo de esa magnitud elástica: **u. a**), y luego trazamos la elástica de la dirección de **P** debido a la deformación que origina **u**. Sea η la ordenada de la elástica trazada correspondiente a **P**, o sea que es el desplazamiento que la fuerza **u** origina en la dirección de la fuerza **P**.



Entonces, siendo **a** el desplazamiento que la fuerza **P** origina según la dirección **u**, será por la ley de Betti:

$$u.a = P.\eta_p \text{ expresión 119}$$

obteniéndose de la expresión 119,

$$v_a = \frac{a}{P} = \frac{1}{u}.\eta_p \text{ expresión 120}$$

Lo que implica que las ordenadas η_p de la elástica obtenida multiplicadas por la constante $\frac{1}{u}$ dan las ordenadas v_a de la línea de influencia del desplazamiento a .

Enunciado de la ley de Betti: “ En un sistema elástico, el producto escalar resultante de las fuerzas de un sistema por los desplazamientos experimentados por sus puntos de aplicación durante la deformación debida a otro sistema, es igual al producto escalar resultante de las fuerzas de este último sistema por los desplazamientos que sus puntos de aplicación experimentan durante la deformación debida al primero”.

“La línea de influencia para cargas de una dirección determinada de un desplazamiento cualquiera a , está dada, en cierta escala, por la elástica de dicha dirección correspondiente a la deformación que en el sistema produce el esfuerzo auxiliar del desplazamiento a ”.

Entonces, siendo E la escala en que se trazó la elástica, si $\eta(\text{cm})$ es una ordenada del dibujo en cm, se tiene que:

$$\eta = \eta(\text{cm}).E \text{ expresión 121}$$

y, además se tiene:

$$v_a = \eta(\text{cm}).E.\frac{1}{u} \text{ expresión 122}$$

Luego, la escala de la línea de influencia será:

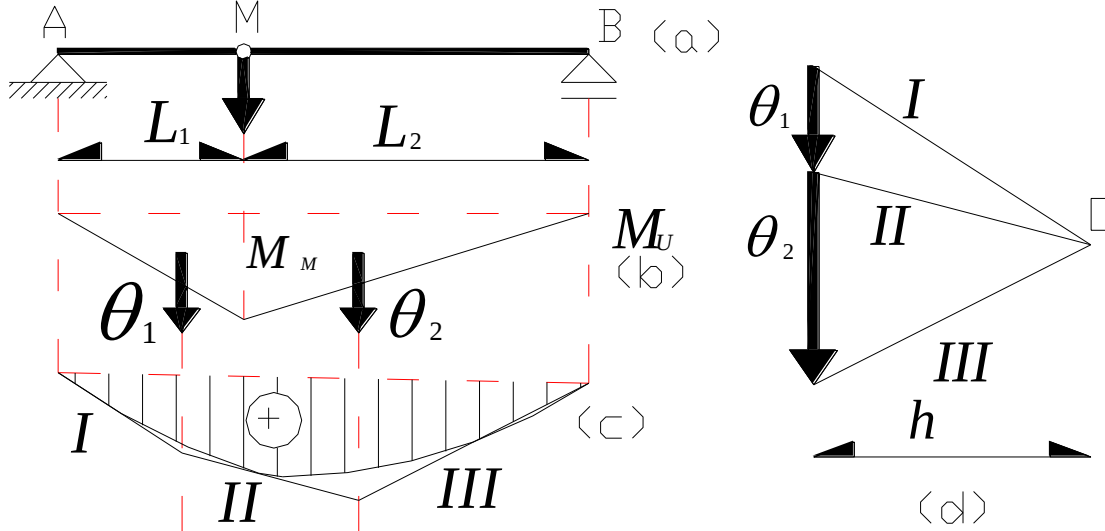
$$\text{escala} = \frac{1}{u}.E \text{ expresión 123}$$

Si se considera siempre el esfuerzo auxiliar u positivo, entonces, los signos de la línea de influencia y los de la elástica coinciden.

Trazado de la línea de influencia del ángulo de deformación correspondiente a un punto M.

Para el desarrollo de este punto, nos será de utilidad la figura n^o 20 a en la cual se indica una viga simplemente apoyada con una fuerza unitaria $U = 1 \text{ ton}$ (pudiendo ser también Kg. lb., etc.), ubicada en una posición M en cuya sección se determinará la línea de influencia de los desplazamientos.

figura n ° 20



Siguiendo el gráfico de la figura n ° 20, el procedimiento es el siguiente:

- a) se coloca el mecanismo de rótula en la sección **M** transformando al sistema en isostático según indica la figura n ° 20 a.
- b) se traza el diagrama de momentos M_u como indica la figura n ° 20 b, que, siendo este formado por dos funciones lineales, quedan determinados dos triángulos rectángulos de altura M_M ;
- c) En el baricentro de cada uno de estos triángulos rectángulos, se indican las magnitudes vectoriales θ_1 y θ_2 proporcionales a las áreas de los triángulos mencionados anteriormente. Las magnitudes θ_1 y θ_2 son representativas de los ángulos de deformación en la sección **M** a la izquierda y a la derecha respectivamente de la viga transformada. Estas magnitudes se expresan por las

expresiones 124, siendo las mismas: expresiones 124

$$\left\{ \begin{aligned} \theta_1 &= \frac{1}{2} \frac{M_M \cdot L_1}{E \cdot J} \\ \theta_2 &= \frac{1}{2} \frac{M_M \cdot L_2}{E \cdot J} \end{aligned} \right.$$

- d) Con las expresiones 124 se realiza en escala, la construcción del polígono funicular con polo en **O** y distancia polar **h**, llevando segmentos proporcionales a θ_1 y θ_2 (figura n ° 20d) y, concluyendo la gráfica de la línea de influencia según los conceptos estudiados de estabilidad I en las construcciones gráficas de los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores en vigas. Esta gráfica se muestra en la figura n ° 20c. La escala del gráfico dependerá de la distancia polar **h(m)**, pues, si consideramos la escala de θ a: $escala = \frac{\alpha}{cm}$, entonces, la escala de línea de influencia de desplazamientos deberá ser afectada por **h(m)** en

la siguiente forma: $E = \frac{\alpha}{cm} \cdot h(m)$, que reemplazada en la expresión 123, resulta en la escala de línea de influencia de los desplazamientos como:

$$escala = \frac{\alpha}{cm} \cdot h(m) \cdot \frac{1}{U(t)} = \frac{\alpha \cdot m \cdot t^{-1}}{cm} \quad \text{expresión 124}$$

Diagramas envolventes

Debido a que se están tratando cargas móviles, el valor de las características estáticas en una determinada sección será variable, incluso podrá cambiar de signo según la posición de la carga en un determinado instante.

Luego, cuando se dimensionan las secciones de las piezas, es necesario conocer para la totalidad de la pieza, y / o para una determinada sección de la pieza, el máximo valor del esfuerzo característico que puedan originar las cargas actuantes.

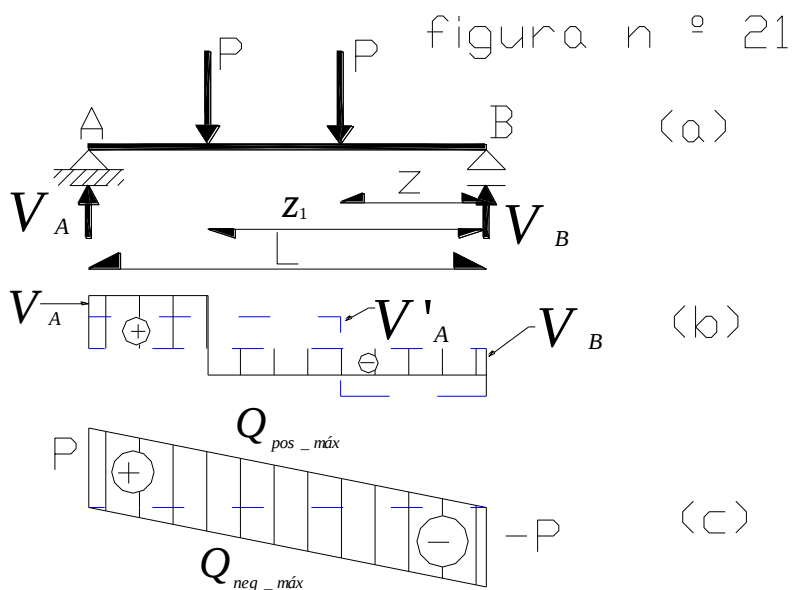
Ahora, si se determina el máximo valor que una determinada característica estática puede alcanzar en cada una de las secciones, debidas a un sistema de cargas móviles, y, representando a partir de un eje de referencia, para cada una de las secciones las ordenadas correspondientes a los valores máximos de dicha característica en estudio, el lugar geométrico de los extremos de estas ordenadas correspondientes a valores máximos constituye el diagrama envolvente de la característica estática en estudio.

Se distinguen las siguientes clases de cargas:

- a) cargas permanentes: son cargas que podrán ser tanto concentradas como distribuidas con una posición invariable e intensidad y dirección constante.
- b) cargas móviles: son cargas concentradas de intensidad y dirección constante que pueden ocupar diferentes posiciones en la estructura.
- c) cargas útiles: Son cargas distribuidas de intensidad constante, cuya longitud cargada puede variar, ocupando cualquier posición en la estructura.

Diagrama envolvente de esfuerzos cortantes

Considerando la viga simplemente apoyada de la figura n ° 21 a con una carga móvil **P** normal al eje de la misma, quedando definida su posición por la abcisa **z**.



En la figura n ° 21 b se representa el esfuerzo cortante de la viga para una posición z de la ubicación de P en la misma. Si la carga se encuentra en una posición z_1 , el diagrama cambia, aunque seguirá manteniendo ordenadas negativas a la derecha de P , y en consecuencia, positivas a la izquierda de la misma, pero manteniéndose constante entre ambos lados de P .

De acuerdo a lo expresado anteriormente, las ordenadas del esfuerzo cortante son iguales a V_A y V_B dependientes de z en la forma indicada en las expresiones 125.

$$\text{exp resiones 125} \left\{ \begin{array}{l} V_A = P \cdot \frac{z}{L} \\ V_B = P \cdot \frac{L-z}{L} \end{array} \right.$$

La primera de las expresiones 125 se anula para $z = 0$, en tanto que la segunda lo hace para

$z = L$. En tanto que, ambas expresiones de V_A y V_B son iguales a la carga P en las abscisas

$z = L$ y $z = 0$ respectivamente. Ahora, los valores dados en las expresiones 126 son los esfuerzos cortantes a ambos lados del punto de aplicación de P , siendo estos:

$$\text{exp resiones 126} \left\{ \begin{array}{l} Q_{\text{pos}} = V_A = P \cdot \frac{z}{L} \\ Q_{\text{neg}} = -V_B = -P \cdot \frac{L-z}{L} \end{array} \right.$$

Siendo los valores de las expresiones 126 los máximos que puedan ocurrir, entonces, la primera de las expresiones 126 admite su máximo valor para $z = L$, es decir:

$$Q_{pos_m\acute{a}x} = P \quad \text{expresi3n 127}$$

En tanto que la segunda de las expresiones 126 admite su máximo valor en $z = 0$, siendo este:

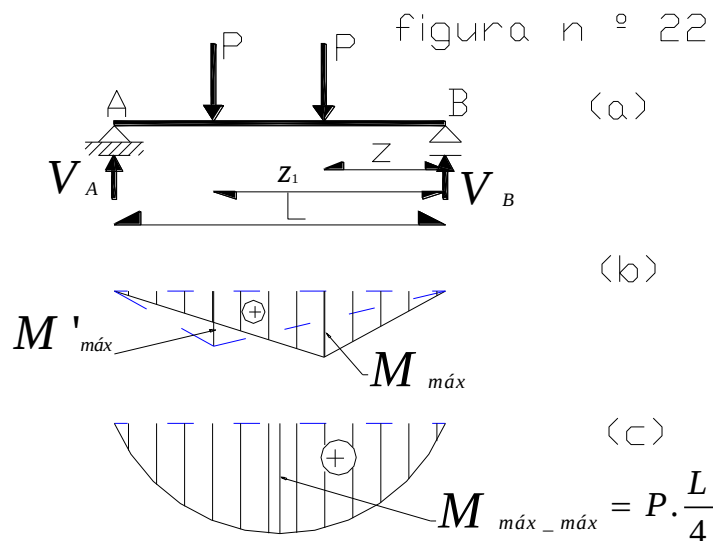
$$Q_{neg_m\acute{a}x} = -P \quad \text{expresi3n 128}$$

Las ecuaciones 126 representan las ecuaciones de rectas paralelas de pendiente $\frac{P}{L}$. La representaci3n gráfica del diagrama envolvente se muestra en la figura n  21 c.

39

Diagrama envolvente de momentos flectores

Para analizar este punto, se tendrá en cuenta la viga simplemente apoyada con una carga m3vil P de la figura n  22.



Entonces, para una posici3n z de la carga, el diagrama de momentos flectores es triangular, siendo las ordenadas del mismo nulas en los apoyos. Obviamente, cuando la carga se encuentra en otra posici3n z_1 , el diagrama de momentos flectores mantiene su forma triangular aunque cambiando la posici3n máxima del momento flector. De aquí, el momento flector correspondiente a una distancia z será:

$$M_z = V_A \cdot (L - z) = P \frac{L - z}{L} \cdot z \quad \text{expresi3n 129}$$

La ecuaci3n 129 representa la expresi3n del diagrama envolvente de momentos flectores para una carga m3vil P . Como se puede observar en la expresi3n 129, esta ecuaci3n es la ecuaci3n de una parábola de ordenadas nulas en $z = 0$ y $z = L$. El valor de z correspondiente al máximo momento flector se obtiene derivando la expresi3n 129 respecto de z , como indica la expresi3n 130.

$$\frac{dM_z}{dz} = 0 = L - 2z \quad \text{expresión 130}$$

de la expresión 130 se obtiene:

$$z = \frac{L}{2} \quad \text{expresión 131}$$

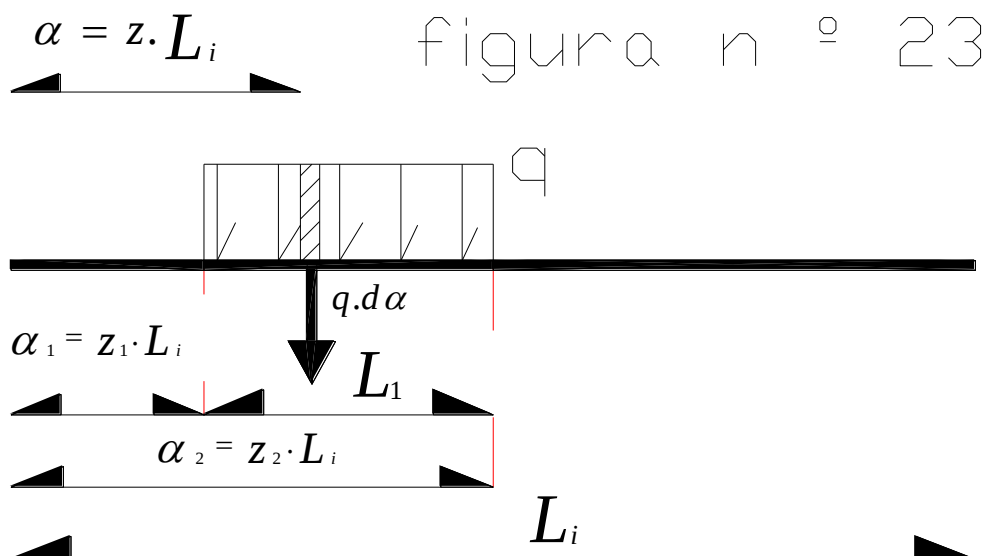
La expresión 131 indica que el máximo valor del momento flector para carga móvil ocurre en el centro de la viga. Luego, reemplazando la expresión 131 en la expresión 129 permite obtener el valor del máximo momento flector en la viga, siendo el mismo:

$$M_{\text{máx_máx}} = P \cdot \frac{L}{4} \quad \text{expresión 132}$$

En la figura n ° 22 c se observa el diagrama evolvente de momentos flectores.

Líneas de influencias debidas a una carga distribuida q

Consideremos el tramo de la viga de longitud L_i de la figura n ° 23, en la cual, una carga uniformemente repartida de intensidad q y longitud L_1 se desplaza longitudinalmente sobre la viga.



En la figura n ° 23 se tienen las distancias α , α_1 , α_2 , expresadas en función del producto de la abscisa z por la longitud de tramo L_i . Siendo así, por ejemplo, la expresión $\alpha = z \cdot L_i$, representa la distancia de la carga elemental $q \cdot d\alpha$ al extremo izquierdo, y η , la ordenada de línea de influencia vertical para la abscisa de la misma.

Como se estudió anteriormente, las líneas de influencia son elásticas de deformación originadas por fuerzas concentradas unitarias aplicadas en la dirección que se trate respectivamente. Recordando de resistencia de los materiales que la ecuación de

elástica de deformación correspondiente a una carga concentrada es polinómica de tercer orden. Por consiguiente, la ecuación de momentos flectores para la misma será lineal. De esta forma, la ecuación de la elástica vertical vendrá expresada en forma general por:

$$\eta = B_0(C_3 \cdot z^3 + C_2 \cdot z^2 + C_1 \cdot z + C_0) \quad \text{expresión 133}$$

En la expresión 133, los coeficientes C_0 , C_1 , C_2 , y C_3 , se determinan en función de las disposiciones de cargas y apoyos de la viga, resolviendo la ecuación de la elástica, y, B_0 un coeficiente constante de proporcionalidad que se puede extraer de la solución de la ecuación de la elástica. Entonces, expresaremos la expresión 133 en una forma más conveniente para nuestros propósitos.

$$\eta = B_0 \sum_{i=0}^3 C_i \cdot z^i \quad \text{expresión 134}$$

Ahora, según se estudió anteriormente, el valor de una incógnita en una determinada sección está dado por:

$$X = \eta \cdot P \quad \text{expresión 135}$$

En nuestro caso, para el elemento diferencial de carga $q \cdot d\alpha$, se tendrá un diferencial del valor de incógnita dX , correspondiéndose con:

$$dX = \eta \cdot q \cdot d\alpha \quad \text{expresión 136}$$

Pero $d\alpha = L_i \cdot dz$, pues L_i es una magnitud constante, y reemplazando esta última expresión en la expresión 136, resulta:

$$dX = \eta \cdot q \cdot L_i \cdot dz \quad \text{expresión 137}$$

Luego, por simple reemplazo de la expresión 134 en la expresión 137, y extrayendo los factores constantes de la sumatoria, tenemos:

$$dX = q \cdot L_i \cdot B_0 \cdot \sum_{i=0}^3 C_i \cdot z^i \cdot dz \quad \text{expresión 138}$$

De donde, la intensidad total de la incógnita X vendrá expresada por la integral de la expresión 138, entre los límites z_1 y z_2 para el eje de abscisa, quedándonos:

$$X = \int_{z_1}^{z_2} dX = q \cdot L_i \cdot B_0 \int_{z_1}^{z_2} \sum_{i=0}^3 C_i \cdot z^i \cdot dz \quad \text{expresión 139}$$

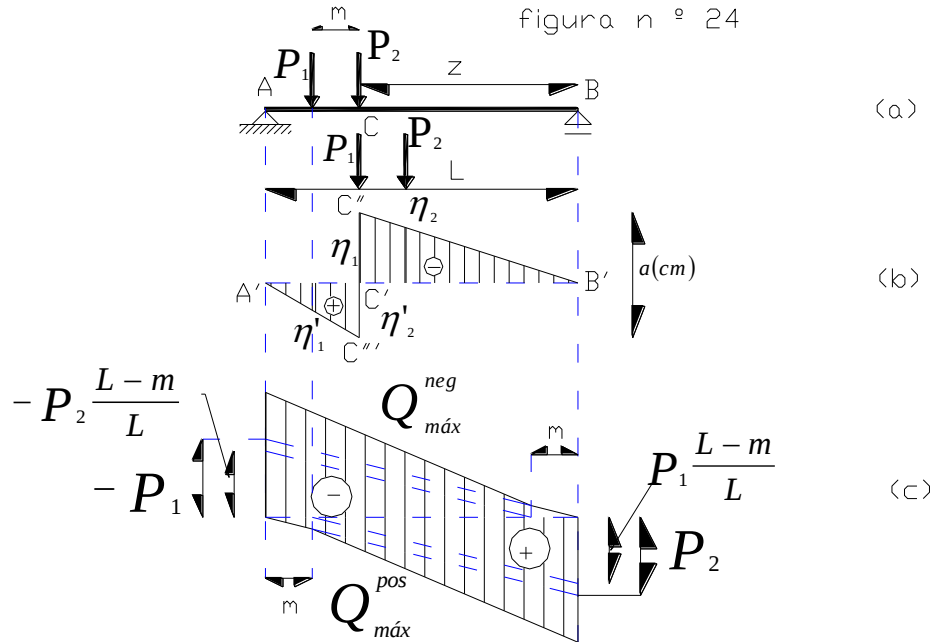
Cuya integración conduce a la expresión 140

$$X = q \cdot L_i \cdot B_0 \sum_{i=0}^3 C_i \left[\frac{z_2^{i+1} - z_1^{i+1}}{i+1} \right] \quad \text{expresión 140}$$

La expresión 140 permite determinar la intensidad de la incógnita X para una carga uniforme q . Cabe destacar que el mismo problema se puede obtener para cargas de diferente distribución, como por ejemplo, una carga linealmente distribuida, o trapezoidal. Esta solución se mostrará en los problemas resueltos. Así mismo, también se podría haber resuelto el problema considerando otras variables independientes como se mostrará en los problemas resueltos.

Línea de influencia de dos cargas concentradas móviles

Para el desarrollo de este punto, utilizamos la figura n º 24 como figura de análisis. En la misma se consideran dos cargas móviles P_1 y P_2 separadas por una distancia m , y se supondrá que $P_2 > P_1$.



Comenzaremos analizando el esfuerzo cortante en una sección cualquiera ubicada a una distancia z del extremo B . Para esto, en la figura n º 24 a se representa la línea de influencia del esfuerzo cortante en z . En la figura n º 24 a se observa que el diagrama de línea de influencia tiene diferentes signos a la izquierda o derecha de z .

Primeramente, analizamos cuando la carga P_2 se encuentra un infinitésimo posterior a la sección en z , y, llamando η_1 y η_2 a los desplazamientos virtuales de P_1 y P_2 respectivamente, resulta:

$$Q_z = -(P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2) \frac{1}{a(cm)} \quad \text{expresión 141}$$

Luego, por relación de los triángulos semejantes $A'C''C' \approx B'C'C''$, se tiene:

$$\frac{\eta_2}{z-m} = \frac{\eta_1}{z} \quad \text{expresión 142}$$

Obteniéndose de esta última expresión:

$$\eta_2 = \eta_1 \frac{z-m}{z} \quad \text{expresión 143}$$

A su vez, se puede obtener la siguiente relación:

$$\frac{a(cm)}{\eta_1} = \frac{L}{z} \quad \text{expresión 144}$$

Y, de la expresión 144 se obtiene:

$$\eta_1 = a(cm) \frac{z}{L} \quad \text{expresión 145}$$

Reemplazando la expresión 145 en la expresión 143 se tiene:

$$\eta_2 = a(cm) \frac{z}{L} \frac{z-m}{z} = a(cm) \frac{z-m}{L} \quad \text{expresión 146}$$

Luego, reemplazando la expresión 141 los factores $\frac{\eta_1}{a(cm)}$ y $\frac{\eta_2}{a(cm)}$ de las expresiones 144 y 146 respectivamente, se obtiene la siguiente expresión:

$$Q_z = -P_1 \frac{z}{L} - P_2 \frac{z-m}{L} \quad \text{expresión 147}$$

Los términos de la expresión 147 representan las ecuaciones de dos rectas. La recta correspondiente al primer término se anula para $z = 0$, y es máxima para $z = L$; mientras que la recta correspondiente al segundo término se anula para $z = m$, y es máxima para $z = L$.

A continuación, analizaremos el tramo **AC**, es decir, a la izquierda de la sección. Llamando η'_1 y η'_2 las ordenadas de línea de influencia de P_1 y P_2 respectivamente, se tiene la expresión 148.

$$Q_z = (P_1 \cdot \eta'_1 + P_2 \cdot \eta'_2) \frac{1}{a(cm)} \quad \text{expresión 148}$$

Análogamente al caso anterior, por relaciones de triángulos semejantes, se tiene:

$$\frac{\eta'_1}{\eta'_2} = \frac{L-z-m}{L-z} \quad \text{expresión 149} \quad \text{de donde} \quad \eta'_1 = \eta'_2 \frac{L-z-m}{L-z} \quad \text{expresión 150}$$

Además, se tiene la siguiente relación de triángulos semejantes, que se puede deducir de la figura n ° 24b:

$$\frac{\eta'_2}{a(cm)} = \frac{L-z}{L} \quad \text{expresión 151}$$

Operando algebraicamente con la expresión 148, y considerando la expresión 151, resulta:

$$Q_z = P_1 \cdot \frac{\eta'_1}{a(cm)} + P_2 \frac{L-z}{L} \quad \text{expresión 152}$$

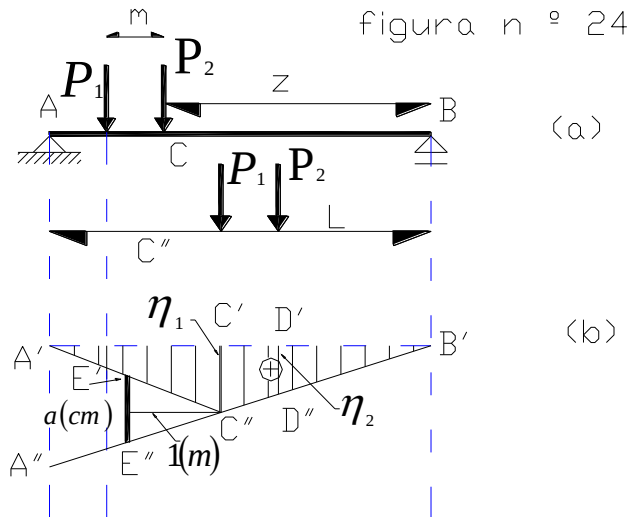
Y, dividiendo miembro a miembro por $a(cm)$ la ecuación 150, luego, reemplazando la expresión 151 en la misma, y finalmente se reemplaza la expresión resultante en la expresión 152 quedando la expresión 153.

$$Q_z = P_1 \frac{L-z-m}{L} + P_2 \frac{L-z}{L} \quad \text{expresión 153}$$

Esta última expresión nos indica que la línea de influencia del esfuerzo cortante está compuesta por la suma dos términos que indican ecuaciones de dos rectas. La recta correspondiente al primer término se anula para $z = L - m$, y alcanza su máximo para $z = 0$, mientras que la recta correspondiente al segundo término se anula para $z = L$, alcanzando su valor máximo en $z = 0$.

La figura n° 24c representa las rectas según los términos de las expresiones 147 y 153, además de graficar las evolventes correspondientes.

Seguidamente, se analizarán las líneas de influencia de los momentos flectores para una sección cualquiera z en las mismas condiciones que se han analizado para el esfuerzo cortante en dicha sección. Para esto, utilizamos la figura de análisis n° 25.



De la figura n° 25, para una posición z , y siendo η_1 y η_2 las correspondientes ordenadas de los desplazamientos virtuales verticales de P_1 y P_2 respectivamente, se obtiene la siguiente ecuación de momentos flectores:

$$M_z = (P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2) \frac{1(m)}{a(cm)} \quad \text{expresión 154, siendo } \frac{1(m)}{a(cm)} \text{ la escala.}$$

Por relación de triángulos semejantes $B'C'C''$ y $B'D'D''$, se obtiene:

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{z}{z-m} \quad \text{expresión 155}$$

de la expresión 155 se obtiene:

$$\eta_2 = \eta_1 \frac{z-m}{z} \quad \text{expresión 156}$$

Considerando la siguiente relación de triángulos semejantes:

$$\frac{\overline{A'A''}}{\eta_1} = \frac{L}{z} \quad \text{expresión 157} \quad \text{surgiendo de esta última expresión,}$$

$$\eta_1 = \overline{A'A''} \frac{z}{L} \quad \text{expresión 158}$$

A su vez, también se tiene la siguiente relación de triángulos semejantes:

$$\frac{\overline{A'A''}}{L-z} = \frac{a(cm)}{\eta_2} \quad \text{expresión 159} \quad \text{surgiendo de esta última} \quad \frac{\eta_2}{a(cm)} = \frac{L-z}{A-A''} \quad \text{expresión 160.}$$

Ahora, reemplazando la expresión 156 en la expresión 154, se obtiene:

$$M_z = \left(P_1 + P_2 \frac{z-m}{z} \right) \eta_1 \frac{1(m)}{a(cm)} \quad \text{expresión 161}$$

De acuerdo a la figura n° 25b, y por relaciones de los triángulos semejantes **C'A'A''**, y **C'E'E''**, se tiene:

$$\frac{\overline{A'A''}}{a(cm)} = \frac{L-z}{1(m)} \quad \text{expresión 162, obteniéndose de esta} \quad \frac{L-z}{1(m)} a(cm) = \overline{A'A''} \quad \text{expresión 163}$$

Reemplazando en la expresión 161 las expresiones 158 y 163, resulta:

$$M_z = \left(P_1 + P_2 \frac{z-m}{z} \right) (L-z) \frac{z}{L} \quad \text{expresión 164}$$

Luego, operando la expresión 164, se tiene:

$$M_z = P_1 \frac{z}{L} (L-z) + P_2 \frac{(z-m)(L-z)}{L} \quad \text{expresión 165}$$

Los términos de la expresión 165 representan las ecuaciones de dos parábolas, la primera de ellas será:

$$M_{z_1} = \frac{P_1}{L} z(L-z) \quad \text{expresión 166}$$

En tanto que la segunda será:

$$M_{z_2} = \frac{P_2}{L} (z-m)(L-z) \quad \text{expresión 167}$$

Para determinar la posición de máximo momento flector, derivamos la expresión 165, resultando de la misma:

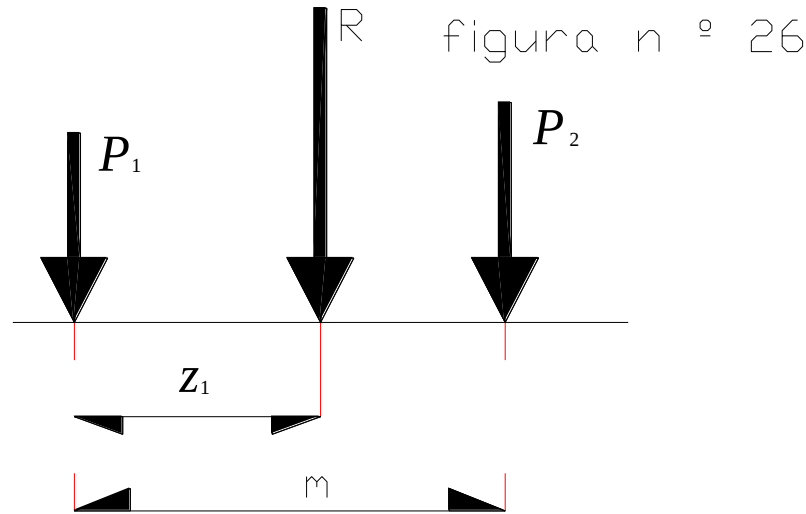
$$\frac{dM_z}{dz} = 0 = \frac{P_1}{L} (L-z-z) + \frac{P_2}{L} [L-z-(z-m)] \quad \text{expresión 168}$$

De la expresión 168 surge el siguiente valor de z para el momento flector máximo:

$$z = \frac{1}{2} \left(L + \frac{P_2 \cdot m}{P_1 + P_2} \right) \quad \text{expresión 169}$$

Es conveniente reemplazar $P_1 + P_2$ por la resultante **R** de ambas, para lo cual consideramos que la distancia de la misma a P_1 es z_1 , como lo indica la figura n° 26. Ahora, si planteamos una ecuación de momentos respecto de la posición de P_1 , resulta:

$P_2 \cdot m = R \cdot Z_1$ de esta última expresión surge: $P_2 = R \frac{Z_1}{m}$ expresión 170



Reemplazando en la expresión 169 la suma de las fuerzas por R , y P_2 por la expresión 170, se tiene:

$$z = \frac{1}{2} \left(L + R \cdot \frac{Z_1}{m} \right) = \frac{L + Z_1}{2} \text{ expresión 171}$$

Siendo este valor de z la posición para la cual se produce el máximo momento flector en la viga. Ahora, si reemplazamos este valor de z en la expresión 164, resulta el máximo maximórum de los momentos flectores, siendo este:

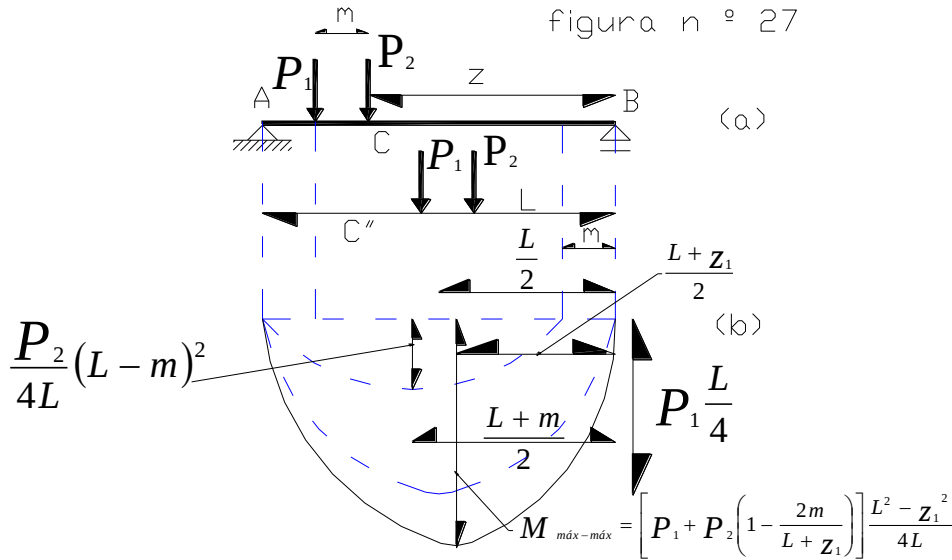
$$M_{\text{máx-máx}} = \left(P_1 + P_2 \frac{\frac{L + Z_1}{2} - m}{\frac{L + Z_1}{2}} \right) \frac{L + Z_1}{2L} \left(L - \frac{L + Z_1}{2} \right) \text{ expresión 172}$$

Por simples transformaciones algebraicas de la expresión 172, resulta:

$$M_{\text{máx-máx}} = \left[P_1 + P_2 \left(1 - \frac{2m}{L + Z_1} \right) \right] \frac{L^2 - Z_1^2}{4L} \text{ expresión 173}$$

Luego, en la figura n ° 27 se representan las líneas de influencia de los momentos flectores, correspondientes a las expresiones 166 y 167.

figura n ° 27



La expresión 166 representa la ecuación de una parábola que se anula en $z = 0$, y $z = L$, y se determina el valor máximo en:

$$\frac{dM_{z-1}}{dz} = 0 = L - 2z \quad \text{de donde } z = \frac{L}{2}$$

Luego, reemplazando este valor en la expresión 166 se obtiene el valor del máximo momento flector para esta abscisa, siendo este:

$$M_{z-1-\text{máx}} = P_1 \frac{\frac{L}{2} \left(L - \frac{L}{2} \right)}{L} = P_1 \cdot \frac{L}{4} \quad \text{expresión 174}$$

Análogamente para el segundo término, para determinar la abscisa del momento flector máximo se tiene:

$$\frac{dM_{z-2}}{dz} = 0 = L - 2z + m \quad \text{obteniéndose } z = \frac{L+m}{2}$$

Luego, reemplazando este valor de z en la expresión 167, se tiene:

$$M_{z-2-\text{máx}} = \frac{P_2}{L} \left(\frac{L+m}{2} - m \right) \left(L - \frac{L+m}{2} \right) = \frac{P_2}{4L} (L-m)^2 \quad \text{expresión 175}$$

Mientras que la expresión 167 se anula para los valores de $z = L$ y $z = m$. Luego, la figura

n ° 27b muestra los respectivos diagramas de líneas de influencia correspondientes a M_{z-1} ,

M_{z-2} en líneas de trazos intermitentes, así como la suma de ambos en línea de trazos lleno, indicando los valores máximos de los mismos, y el valor máximo maximórum con sus respectivas distancias, como se detalla a continuación en las expresiones 176.

$$\text{exp resiones 176} \left\{ \begin{array}{l} M_{z_1\text{-máx}} = P_1 \frac{L}{4} \quad \text{en } z = \frac{L}{2} \\ M_{z_2\text{-máx}} = \frac{P_2}{4L} (L-m)^2 \quad \text{en } z = \frac{L+m}{2} \\ M_{\text{máx_máx}} = \left[P_1 + P_2 \left(1 - \frac{2m}{L+z_1} \right) \right] \frac{L^2 - z_1^2}{4L} \quad \text{en } z = \frac{L+z_1}{2} \end{array} \right.$$