UNIDAD 5

VARIACIÓN DE FUNCIONES

Estudio de funciones: Parte 2

Los siguientes elementos de una función los asociamos al signo de la derivada primera

- ✓ Intervalos de Crecimiento (Derivada primera positiva)
- ✓ Intervalos de Decrecimiento (Derivada primera negativa)
- ✓ Puntos críticos donde tenemos posibles puntos extremos RELATIVOS O LOCALES.

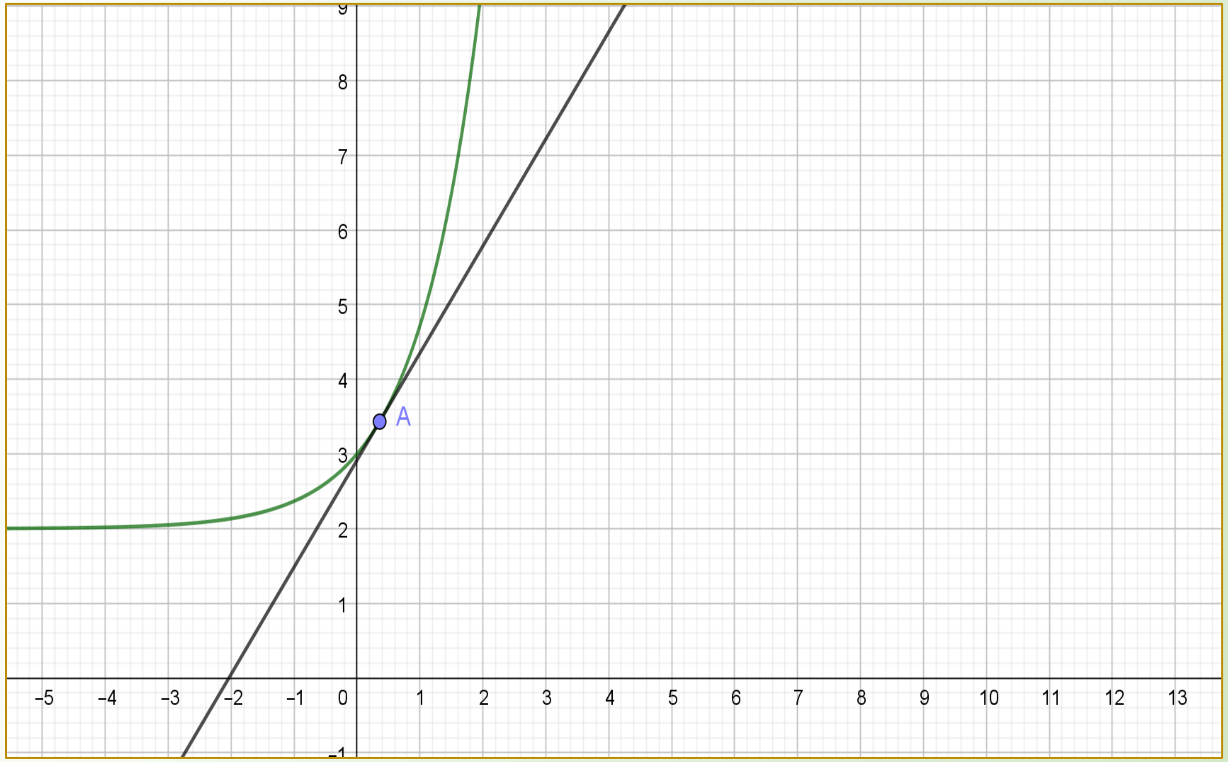
a) Los que anulan la primera derivada: $F'(x)=0$ b) Donde la función no es derivable

En los extremos de un intervalo cerrado si la función está definida en esos puntos puede haber:
Máximos y/o mínimos ABSOLUTOS

➢ Concavidad de una función

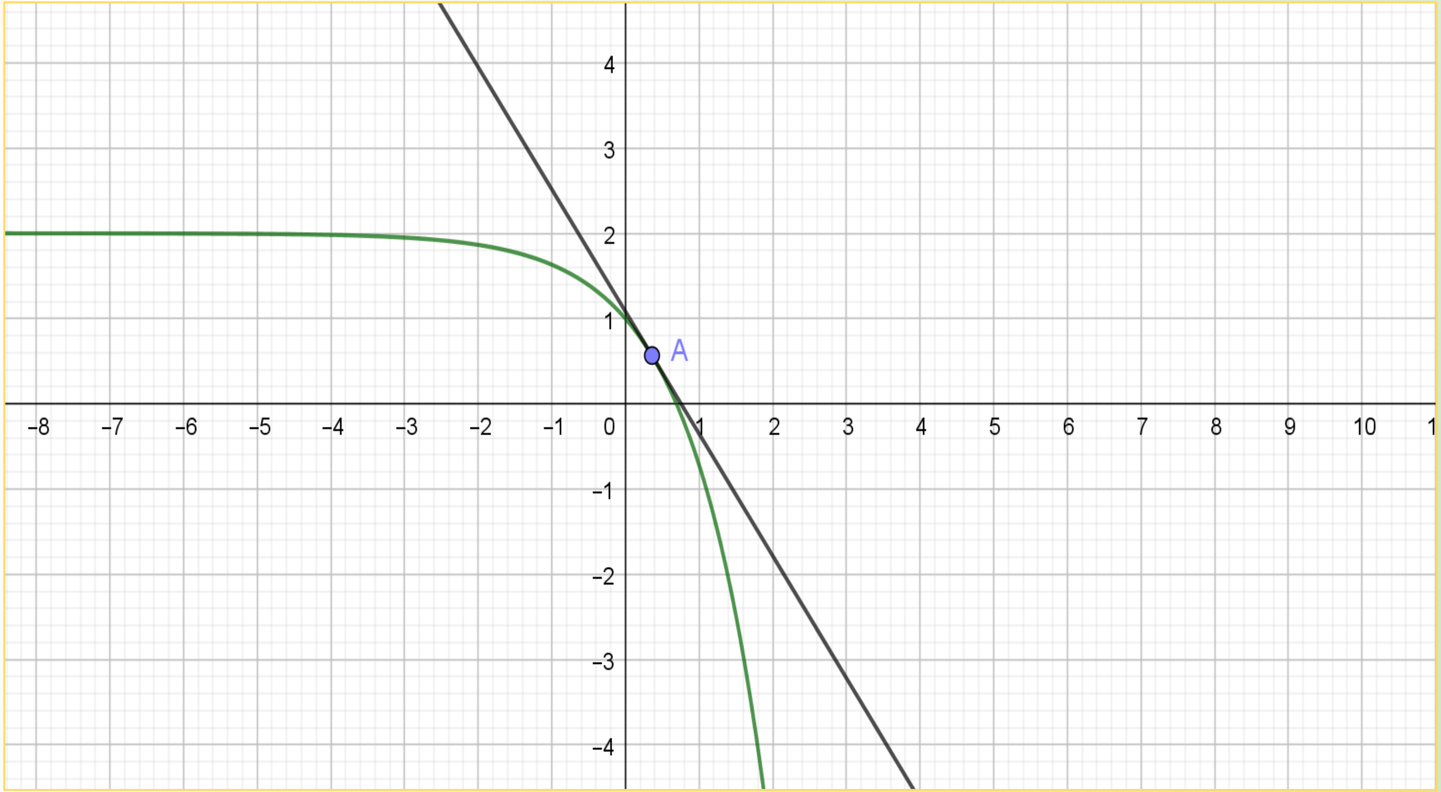
Concavidad positiva o cóncava había arriba o cóncava

La curva correspondiente a una función f derivable es cóncava hacia arriba en el punto (a,f(a)) $\in Df$ si y solo si existe un entorno reducido del punto a donde lo curva está por encima de la recta tangente en dicho punto



Concavidad negativa o cóncava había abajo o convexa

La curva correspondiente a una función f derivable es cóncava hacia abajo en el punto (a; f(a)) $\in Df$ si y solo si existe un entorno reducido del punto a donde lo curva está por debajo de la recta tangente en dicho punto



Una función es cóncava hacia abajo o hacia arriba en un intervalo (a,b) si lo es en cada uno de los puntos interiores a él.

Propiedades

- Si $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \rightarrow$ **f es cóncava hacia arriba en** (a,b)

- **Si** $f''(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b) \rightarrow$ **f es cóncava hacia abajo en** (a,b)

El signo de la derivada segunda lo usamos para estudiar la concavidad de dicha función.

➢ Puntos de inflexión

El punto a $\in Df$ es punto de inflexión de dicha función si y solo si f cambia de concavidad a derecha y a izquierda de dicho punto

Los puntos que pertenecen al dominio de la función y son “candidatos” a ser puntos de inflexión son

a) $f''(a) = 0$

b) $f''(a)$ no existe

Esta condición es necesaria pero no suficiente. Una vez detectados estos puntos hay que verificar si son o no puntos de inflexión

➢ Criterios para determinar puntos de inflexión (Condición suficiente)

1) Criterio del signo de la derivada segunda

El punto (a,f(a)) es punto de inflexión de f si a la izquierda y a la derecha de a la función cambia de concavidad, es decir, la derivada segunda cambia de signo

2) Criterio de la derivada tercera o de orden superior

Si $f''(a) = 0$ y $f'''(a) \neq 0$ decimos que (a,f(a)) es punto de inflexión de f

Nota: Si $f''(a) = 0$ y $f'''(a) = 0$ este criterio no define, es decir, hay que calcular la primera derivada de orden superior distinta de cero. Si esa derivada es de orden impar (a,f(a)) es punto de inflexión; si fuera par no lo es.

La clase pasada trabajamos con un ejemplo de la guía y calculamos intervalos de crecimiento, máximos y mínimos. Ahora vamos a completarlo con intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

Ejemplo 1: 5-18 Guía) d)

$$f(x) = x.e^x$$

$$Df = R$$

1) Asíntotas

Vertical: No tiene

Horizontal

$$\lim_{x \to +\infty} x.e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x.e^x = \infty.0$$ indeterminado

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\frac{1}{e^x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

ASÍNTOTA HORIZONTAL: y=0

3) Intersecciones con los ejes

Eje x

$x.e^x = 0 \quad \rightarrow \; x = 0 \;\text{ó}\; e^x = 0$

$\nexists x$

Intersección con eje x (0,0)

Eje y

f(0)=0

4) Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos

$f(x) = x.e^x$

$f'(x) = 1.e^x + x.e^x$

$f'(x) = e^x(1 + x)$

$0 = e^x(1 + x)$

$1 + x = 0 \;\text{ó}\; e^x = 0 \quad \nexists x$

$x = -1$

f′(x) < 0 | f′(x) > 0

-1

Decrece $\left(-\infty, -1\right)$

Crece $\left(-1, +\infty\right)$

Mínimo (-1,f(-1)=-1.e^{-1})

5) Puntos de inflexión y concavidad

$$f'(x) = e^{x}.(1+x)$$

$$f''(x) = e^{x}.(1+x) + e^{x}.1$$

$$f''(x) = e^{x}.(1+x+1)$$

$$f''(x) = e^{x}.(2+x)$$

$$f''(x) = 0$$

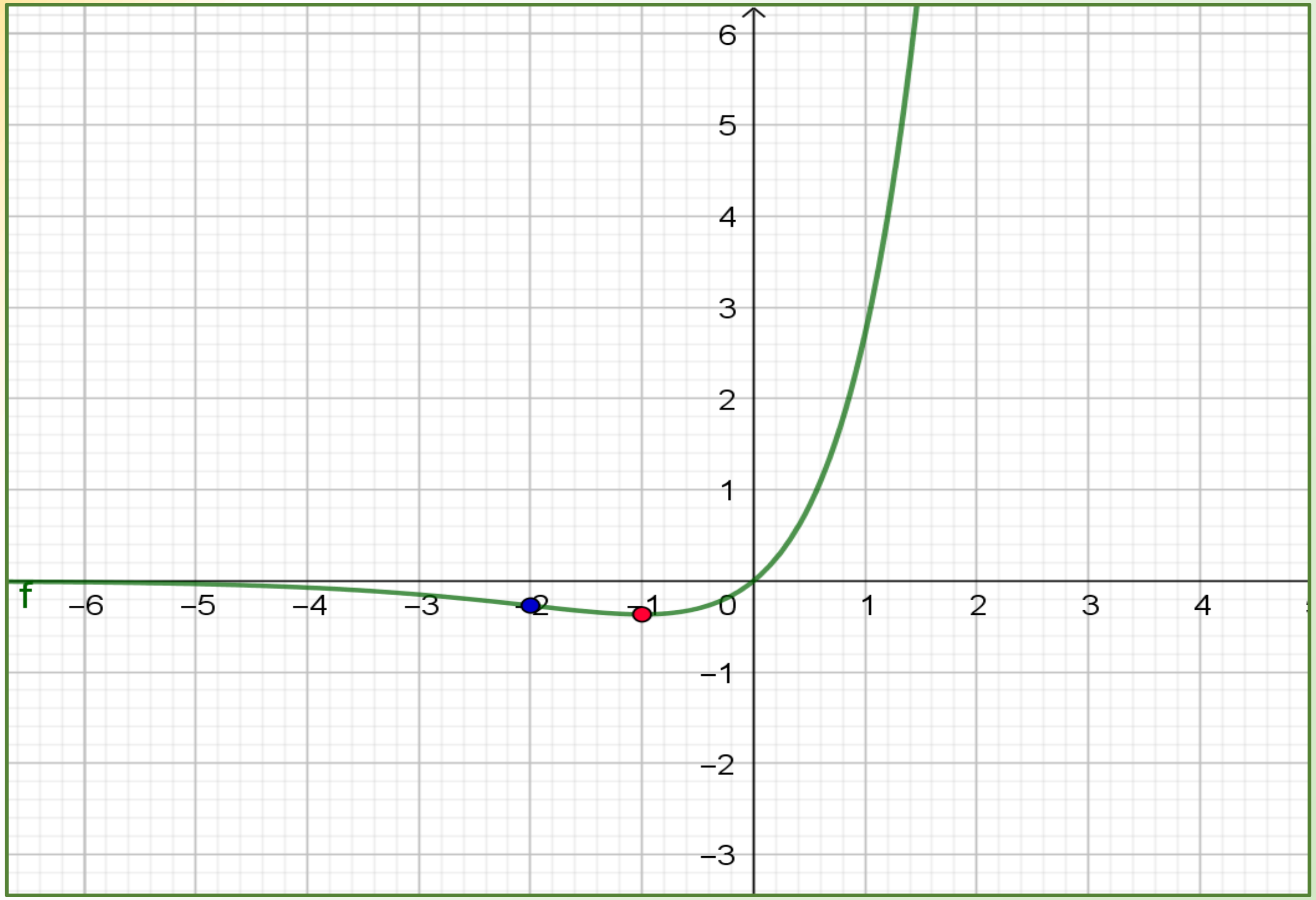
$$x = -2$$

f′′(x) < 0 | f′′(x) > 0

Concavidad negativa -2 Concavidad positiva

Concavidad negativa = (-∞, -2)

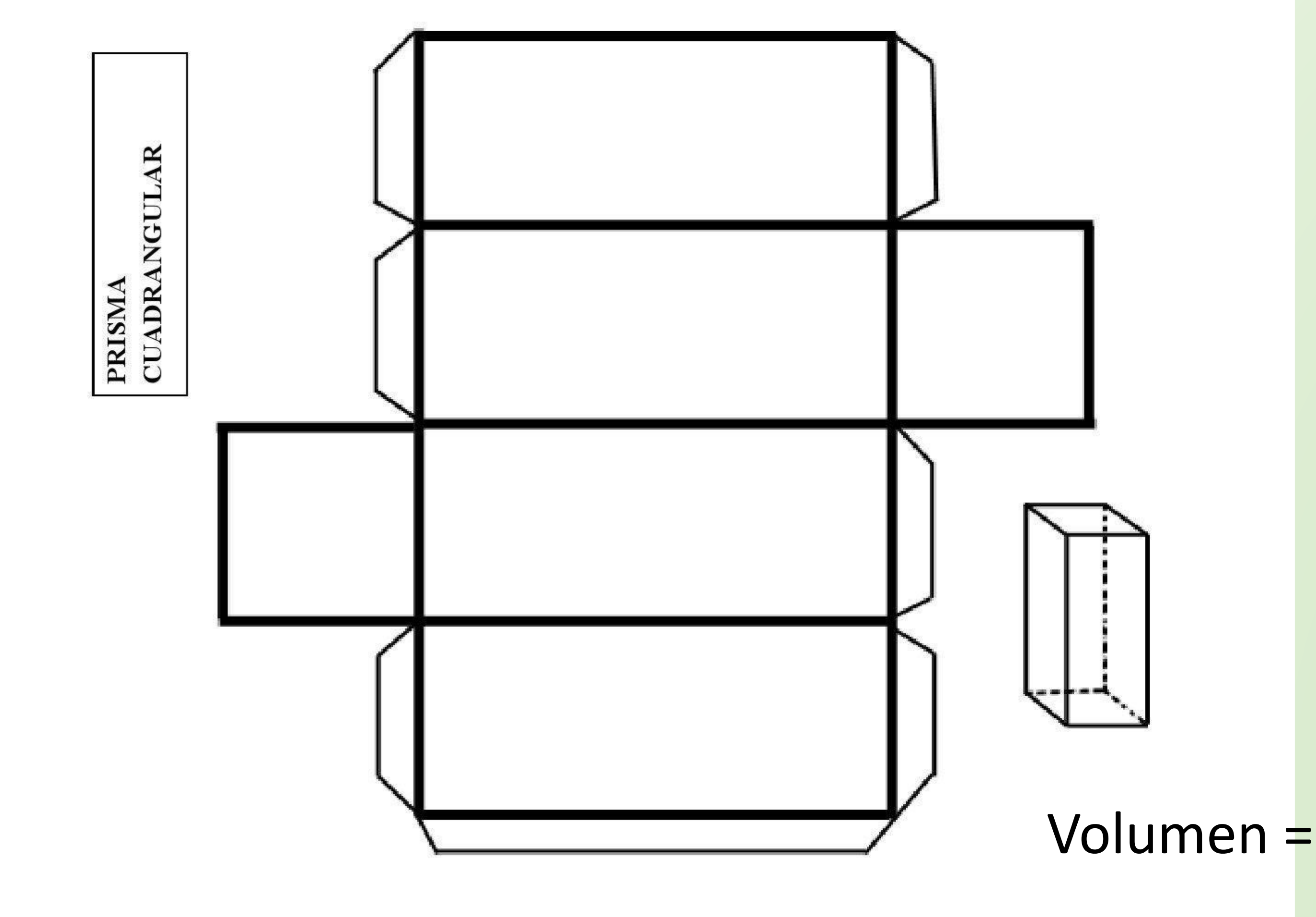
Concavidad positiva = (-2, $+\infty$)

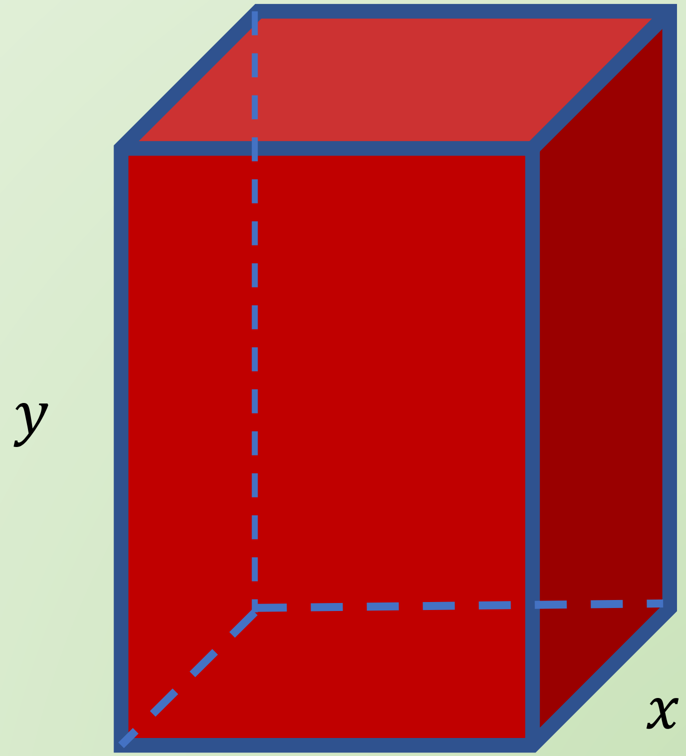


f
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4

Ejemplo 3: 5-29 Guía)

Un depósito de chapa sin tapa, con forma de prisma recto de base cuadrada tiene capacidad para V litros. Hallar las dimensiones del depósito para que en su fabricación se necesite la menor cantidad de chapa posible.





Volumen = área de la base x altura = $x^2 . y = V$

Area= $x.x + 4.x.y = x^2 + 4xy$ EL ÁREA TIENE QUE SER MINIMA

$$y = \frac{V}{x^2}$$

$$A(x) = x^2 + 4x.\frac{V}{x^2}$$

$$A(x) = x^2 + \frac{4V}{x}$$

FUNCIÓN A MINIMIZAR O SEA BUSCAMOS EL VALOR DE X QUE ACOMPAÑA EL VALOR DEL ‘AREA MINIMA

derivamos

$$A'(x) = 2x - \frac{4V}{x^2}$$

$$A'(x) = 0$$

$$2x - \frac{4V}{x^2} = 0$$

$$2x = \frac{4V}{x^2}$$

$$2x^3 = 4V$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{4V}{2}} = \sqrt[3]{2V}$$

PUNTO CRÍTICO

Para verificar que es mínimo usamos criterio de la derivada segunda

$$A'(x) = 2x - \frac{4V}{x^2}$$

$$A''(x) = 2 + \frac{8V}{x^3}$$

$$A''\left(\sqrt[3]{2V}\right) > 0$$

Es mínimo

$$x = \sqrt[3]{2V}$$

$$y = \frac{V}{\left(\sqrt[3]{2v}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$$

Criterio de la segunda derivada

Si la f'' (**a**) > 0 en **a** tenemos un mínimo

Si la f'' (**a**) < 0 en **a** tenemos un máximo