

# TRABAJOS VIRTUALES

## INTRODUCCIÓN

*Cuando analizamos el equilibrio de un cuerpo, se aislaba el mismo, mediante el procedimiento del diagrama de cuerpo libre. En el mismo escribíamos las ecuaciones de equilibrio correspondientes, como la sumatoria de fuerzas en las tres direcciones, la sumatoria de momentos según los tres ejes coordenados, e igualábamos a cero las mismas. Este método se aplica cuando se especifica la posición de equilibrio de los cuerpos, en donde las incógnitas son las fuerzas exteriores.*

*En otros problemas que se componen de cuerpos interrelacionados permitiendo el movimiento relativo de las partes, existiendo varias configuraciones de equilibrio, no resulta el método más conveniente, aunque cabe aclarar que formar ecuaciones de equilibrio sigue siendo válido y adecuado. Es, por consiguiente más práctico aplicar un método basado en el trabajo efectuado por una fuerza. Este método permite desarrollar una visión mas adecuada de los sistemas mecánicos, y examinar la estabilidad de los sistemas en equilibrio.*

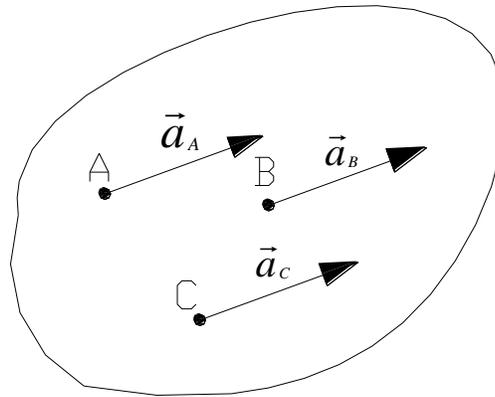
## DESARROLLO TEÓRICO

**Cinemática del cuerpo rígido:** *Los desplazamientos considerados son infinitesimales, es decir, los mismos son pequeños comparados con las dimensiones de los cuerpos estudiados.*

### **Desplazamientos que puede experimentar una chapa en el plano**

**Traslación:** *La figura n ° 1 nos muestra esta situación.*

figura n ° 1

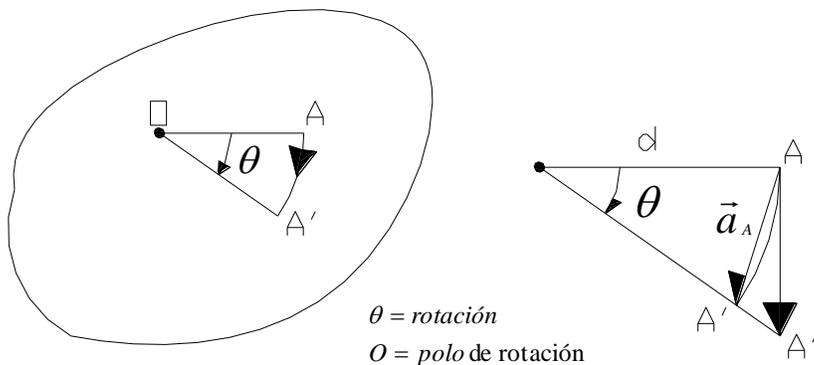


Un cuerpo tiene un desplazamiento de traslación cuando todos sus puntos sufren desplazamientos dados por vectores paralelos, de igual módulo y sentido. De esta forma, siendo los corrimientos  $\vec{a}_A, \vec{a}_B$  y  $\vec{a}_C$ , resulta:  $\vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}_C$

En consecuencia, la traslación queda determinada conociéndose el corrimiento de uno de sus puntos.

**Rotación:** La figura n ° 2 nos muestra una rotación.

figura n ° 2



## Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pégola

Un cuerpo sufre una rotación pura cuando todos sus puntos describen arcos de circunferencia con centro en un punto  $O$  denominado polo de rotación que permanece fijo.

Entonces, deberá ocurrir que, como se indica en la figura n<sup>o</sup> 2,  $\overline{AA'} = \widehat{AA'} = \overline{AA''} = \theta.d$ . Esto último se debe a que los giros son infinitesimales, por consiguiente resulta esta expresión.

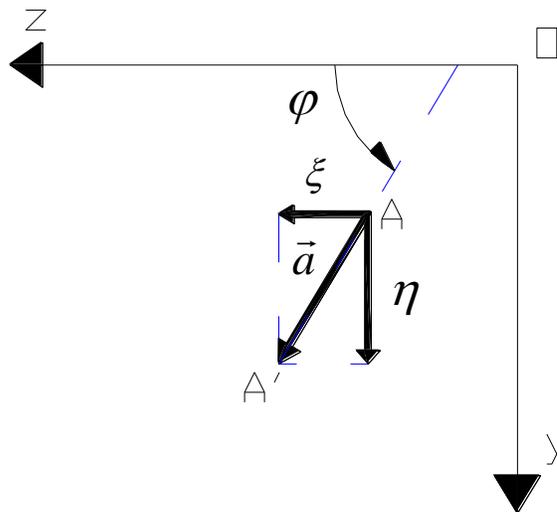
**Componentes del corrimiento:** Eligiendo una terna  $z, y$  como indicamos en la figura n<sup>o</sup> 3, y llamando  $\xi$  y  $\eta$  las componentes de los corrimientos según los ejes  $z$  e  $y$ , entonces, las componentes de los corrimientos de un desplazamiento  $\vec{a}$  según los ejes  $z$  e  $y$  resultan:

$$\text{Ecuaciones 1} \begin{cases} \xi = a \cdot \cos \varphi \\ \eta = a \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

$$\text{resultando } a = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

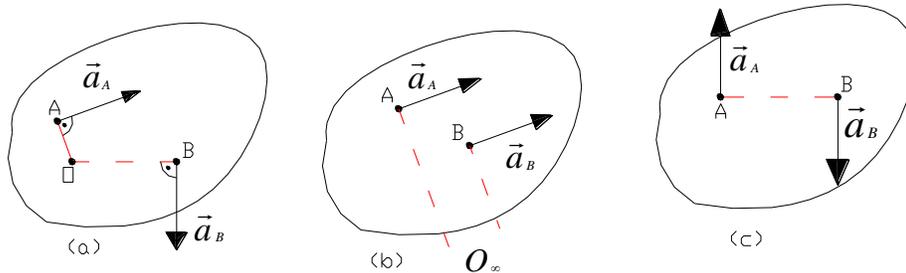
El signo de  $a$  coincide con la proyección sobre el eje  $z$ , salvo para los corrimientos verticales, cuyo signo coincide con el eje  $y$ .

figura n<sup>o</sup> 3



Conociendo los corrimientos de 2 puntos durante la rotación, podemos conocer **el polo**. En la figura n<sup>o</sup> 4 mostramos algunos ejemplos de la determinación del polo de rotación.

figura n ° 4



En el caso a, el polo se encuentra en la intersección de los puntos **A** y **B**, cuyos desplazamientos se conocen.

En el caso b, el polo se encuentra en el punto impropio, por consiguiente el movimiento del cuerpo es una traslación.

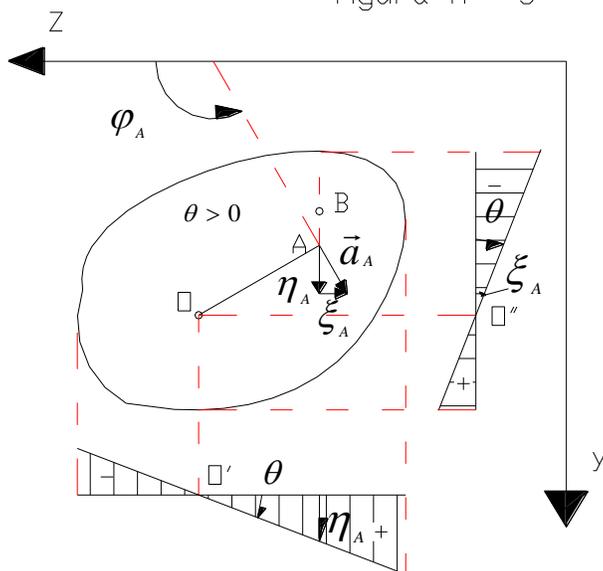
En el caso c, el polo es indeterminado, y habría que conocer el corrimiento de un tercer punto que no este alineado con **A** y **B**.

**Diagramas de corrimientos ( debidos a una rotación )**

Sea una chapa cuyo centro de rotación es **O**, como la indicada en la figura n ° 5, y, en la misma un punto **A** sufre un corrimiento  $\vec{a}_A$  de componentes

$$\xi_A; \eta_A.$$

figura n ° 5

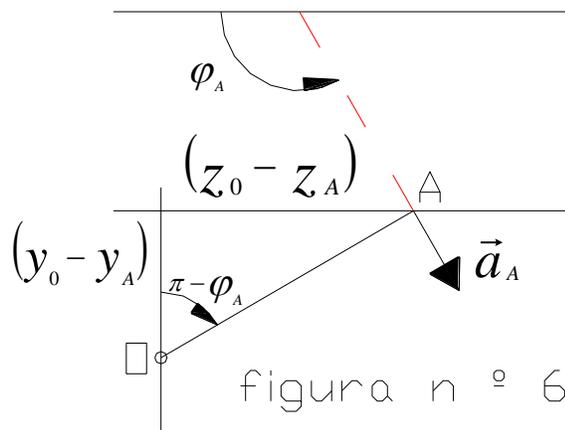


## Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pégola

Considerando que el desplazamiento  $\vec{a}_A$  y sus proyecciones  $\eta_A$  y  $\xi_A$  son:

$$\begin{cases} \vec{a}_A = \theta \cdot \overline{OA} \\ \eta_A = a_A \cdot \text{sen } \varphi_A \\ \xi_A = a_A \cdot \text{cos } \varphi_A \end{cases}$$

y, siendo las coordenadas de los puntos  $O$  y  $A$  ( $Z_0; Y_0$ ) , ( $Z_A; Y_A$ ) respectivamente, de acuerdo a la figura n<sup>o</sup> 6



resulta:

$$\text{Ecuaciones 2} \begin{cases} \eta_A = \theta \cdot \overline{OA} \cdot \text{sen}(\pi - \varphi_A) = \theta \cdot \overline{OA} \cdot \text{sen } \varphi_A = \theta \cdot (z_0 - z_A) \\ \xi_A = \theta \cdot \overline{OA} \cdot \text{cos}(\pi - \varphi_A) = -\theta \cdot \overline{OA} \cdot \text{cos } \varphi_A = -\theta \cdot (y_0 - y_A) \end{cases}$$

Con esto, observamos que:

$\eta_A$  varía linealmente con  $Z_A$

$\xi_A$  varía linealmente con  $Y_A$

Un punto tal como el  $B$  sobre la vertical de  $A$ , tiene abcisa  $z_B = z_A$ , por lo tanto los desplazamientos  $\eta_A$  y  $\eta_B$  serán iguales, tal que,  $\eta_B = \eta_A$ .

Para un punto  $C$  sobre la horizontal de  $A$  resulta  $\xi_C = \xi_A$ .

### Obtención del corrimiento $\vec{a}_A$ conociendo un diagrama

En la figura n<sup>o</sup> 7 observamos la determinación de los corrimientos de un punto  $A$ , conociendo un diagrama cualquiera de corrimiento en una dirección.

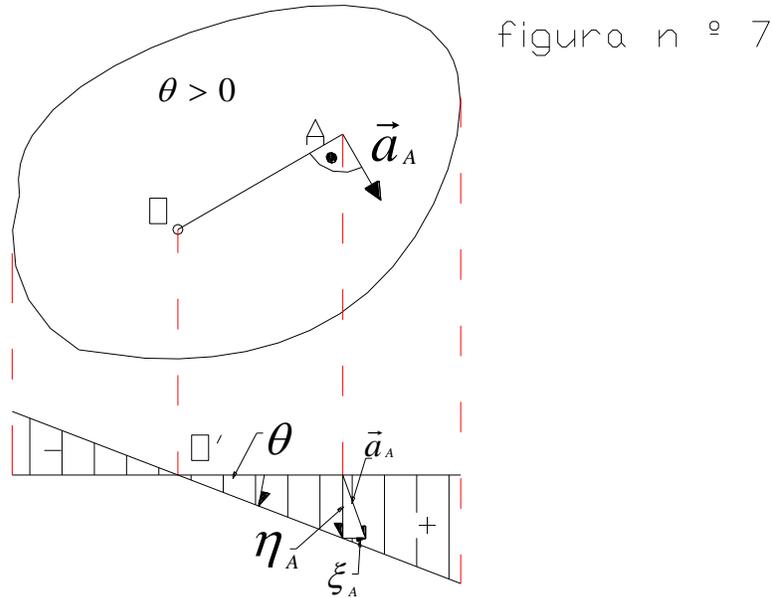
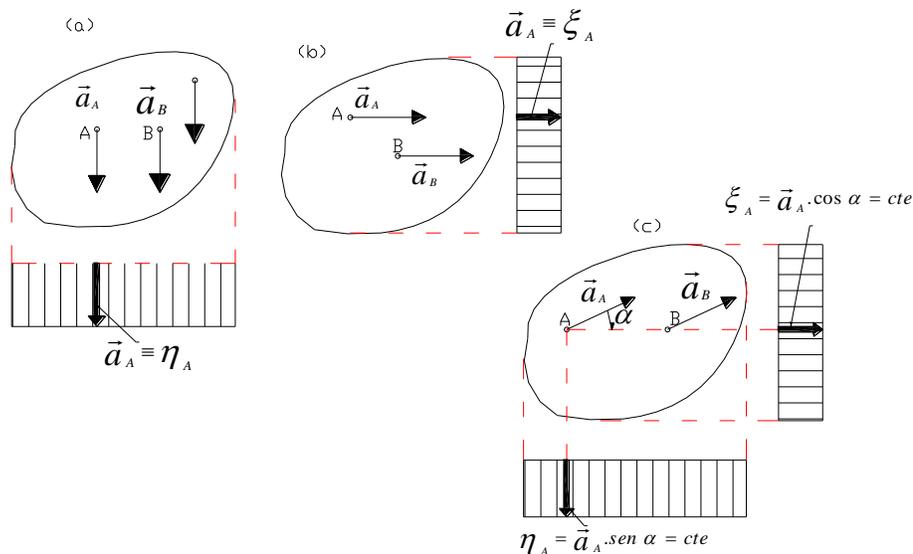


figura n ° 7

En la figura n ° 7, conociendo el diagrama de desplazamientos  $\eta$ , en el mismo es dato la coordenada  $\eta_A$ . Trazando una paralela a la dirección de  $\vec{a}_A$ , en el origen de  $\eta_A$ , y una horizontal por el extremo de este vector, en la intercepción de estos 2 segmentos se tienen, en la escala del diagrama, los módulos y sentidos de  $\vec{a}_A$  y  $\eta_A$ .

En los casos de traslaciones, se obtienen los diagramas mostrados en la figura n ° 8.

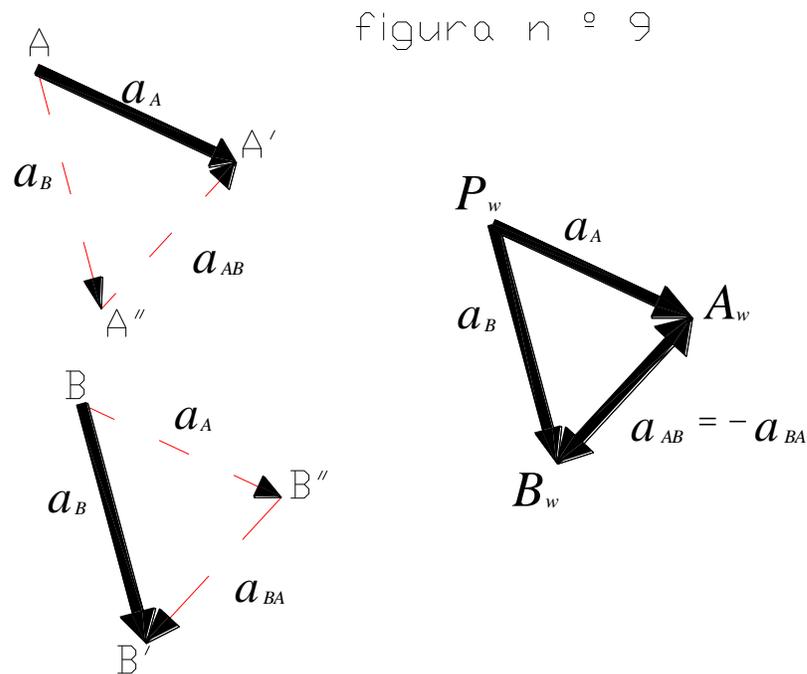
figura n ° 8



**Corrimientos relativos  $\vec{a}_{AB}$** : Sean dos puntos **A** y **B** que pertenezcan a dos chapas distintas, y estos sufren los corrimientos  $\vec{a}_A$  y  $\vec{a}_B$

## Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pégola

respectivamente, consecuentemente los mismos ocuparán las posiciones  $A'$  y  $B'$ . En la figura n<sup>o</sup> 9 mostramos los desplazamientos correspondientes.



Analizando las posiciones relativas, antes y luego de experimentar los corrimientos, observaremos que las mismas difieren. Los puntos efectuarán corrimientos el uno con relación al otro que denominaremos corrimientos relativos.

A partir de un punto  $P_w$  denominado polo del diagrama, llevamos los vectores equipolentes con los corrimientos  $a_A$  y  $a_B$ , cuyos extremos nos definen los puntos  $A_w$  y  $B_w$  respectivamente. El vector dirigido de  $B_w$  a  $A_w$  determina la intensidad, dirección y sentido del corrimiento relativo de A respecto de B, y lo denominaremos  $\vec{a}_{AB}$ ; y, el vector opuesto será  $\vec{a}_{BA}$  que definirá el corrimiento relativo de B respecto de A, y deberá ser  $\vec{a}_{AB} = -\vec{a}_{BA}$ .

Para comprender mas claramente este concepto, suponemos que los puntos A y B están sometidos a una traslación definida por el corrimiento  $\vec{a}_B$ , en consecuencia, el punto A se desplazará paralelamente al B con el mismo corrimiento que este. Entonces, el punto B pasará a ocupar la posición definitiva B', en tanto que el punto A ocupará la posición A''. Para llevar A hacia la posición A' que le corresponde, es necesario un corrimiento A''A', coincidiendo en dirección, intensidad y sentido con el vector  $\vec{a}_{AB}$ , constituyendo este, el corrimiento relativo de A respecto de B.

Considerando primeramente el corrimiento  $\vec{a}_A$  en ambos puntos, el punto A pasaría a la posición definitiva A', en tanto que el punto B

pasaría a la posición  $B''$ , y para llevar al mismo a la posición  $B'$ , es necesario un corrimiento  $B''B'$  que coincida en dirección, intensidad y sentido con el vector  $\vec{a}_{BA}$ , siendo este el corrimiento relativo de  $B$  respecto de  $A$ .

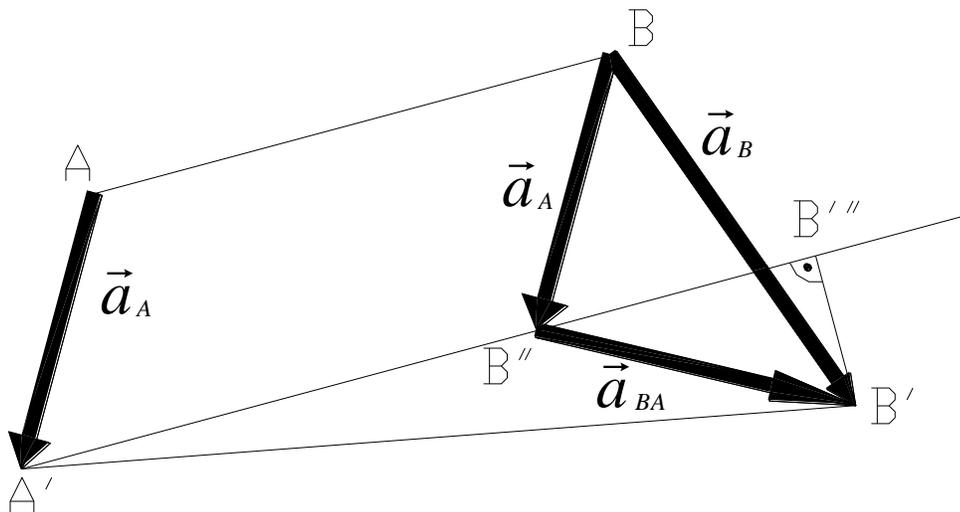
Los corrimientos  $\vec{a}_A$  y  $\vec{a}_B$  se denominan **corrimientos absolutos** de los puntos  $A$  y  $B$  respectivamente.

Los signos de los desplazamientos absolutos como relativos corresponderán al signo de sus proyecciones sobre el eje  $z$ , salvo para corrimientos verticales en donde corresponden con los signos de la proyección sobre el eje  $y$ .

**Variación de distancia**  $\delta_{AB}$ : Consideremos los puntos  $A$  y  $B$  de la figura n<sup>o</sup> 10, que sufren los corrimientos  $\vec{a}_A$  y  $\vec{a}_B$ , ocupando las posiciones respectivas  $A'$  y  $B'$ . En consecuencia, la longitud del segmento  $AB$  que une los mismos puntos sufrirá una variación de distancia que denominaremos  $\delta$ , siendo, entonces  $\delta_{AB}$  la variación de distancia entre los puntos  $A$  y  $B$ .

Para determinar la variación de distancia, trazamos por  $A$  una paralela a  $AB$ , y por el punto  $B$  trazamos una paralela al vector corrimiento  $\vec{a}_A$  ( $AA'$ ). La paralela a  $AB$  será  $A'B'' = AB$ . Entonces, la distancia final entre  $A$  y  $B$  será  $A'B'$ . Prolongando  $A'B''$  y proyectando sobre esta el vector corrimiento relativo  $\vec{a}_{BA}$ , quedando la proyección de este como  $B''B'''$ .

figura n<sup>o</sup> 10



Debido a que la longitud del segmento  $\overline{AB}$  pasó a la longitud final  $\overline{A'B'}$ , entonces tenemos que  $\delta_{AB} = \overline{A'B'} - \overline{AB}$ . También podemos llamar:

$$\begin{cases} \overrightarrow{B''B'''} = \mathbf{a}'_{BA} \\ \overrightarrow{B'''}B' = \mathbf{a}''_{BA} \end{cases}$$

Debido a que el ángulo  $B'\hat{A}B'''$  es infinitesimal por ser  $\vec{a}_{BA}$  un *infinitésimo*, entonces podremos considerar  $\overline{A'B'''} \cong \overline{A'B'}$ . Pero como  $\overline{A'B'''} = \overline{A'B''} + \overline{B''B'''}$  y  $\overline{A'B''} = \overline{AB}$ , reemplazando en  $\delta_{AB}$  resulta:

$$\delta_{AB} = \overline{AB} + \overline{B''B'''} - \overline{AB} = \overline{B''B'''} \quad \text{Ecuación 3}$$

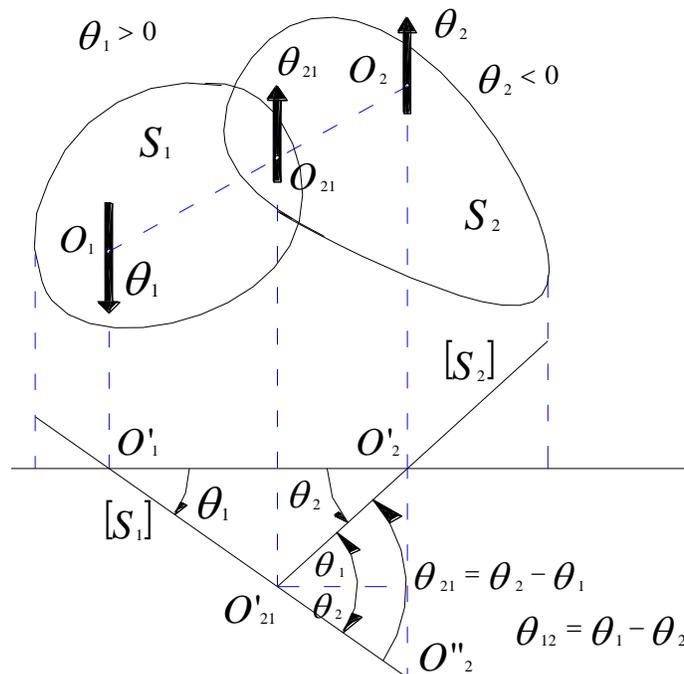
Podemos decir que: La variación de distancia entre dos puntos con corrimientos cualesquiera es la proyección del desplazamiento relativo de uno de sus puntos respecto del otro, sobre la dirección definida por ambos.

La variación de distancia entre dos puntos es una magnitud escalar. En cuanto al signo de esta variación de distancia, será positivo cuando exista un aumento de distancia entre los puntos, o sea cuando los puntos se alejan, y, negativo en caso contrario, o sea, cuando los puntos se acercan, y consecuentemente existe disminución de distancia entre los mismos.

### Desplazamientos relativos entre chapas

Consideremos las chapas  $S_1$  y  $S_2$  de la figura n° 11, en la cual la chapa  $S_1$  experimenta una rotación  $\theta_1 > 0$  alrededor del polo  $O_1$ , y, en consecuencia, la chapa  $S_2$  experimentará una rotación  $\theta_2 < 0$  alrededor del polo  $O_2$ . Hallaremos el desplazamiento relativo de la chapa  $S_2$  respecto de la chapa  $S_1$ .

figura n° 11



La chapa  $S_1$ , con la rotación  $\theta_1$  alrededor de  $O_1$ , pasa a ocupar la posición definitiva  $[S_1]$ . Pero a su vez,  $O_2$  sufrió un corrimiento  $\overline{O'_2 O''_2}$ . Debido a que  $O_2$  es un punto fijo, y por consiguiente su corrimiento deberá ser nulo, entonces, se le deberá efectuar un movimiento a la chapa  $S_2$  para llevar al punto  $O''_2$  a coincidir con el punto  $O'_2$ , y la chapa  $S_2$  pasa a ocupar la posición definitiva  $[S_2]$ .

El ángulo que se deberá girar  $[S_2]$  para llevar el punto  $O''_2$  a la posición  $O'_2$  es  $\theta_{21} = \theta_2 - \theta_1$ .

Podemos observar que la rotación relativa de  $S_1$  respecto de  $S_2$  es opuesta a la rotación relativa de  $S_2$  respecto de  $S_1$ , es decir:

$$\theta_{12} = -\theta_{21}$$

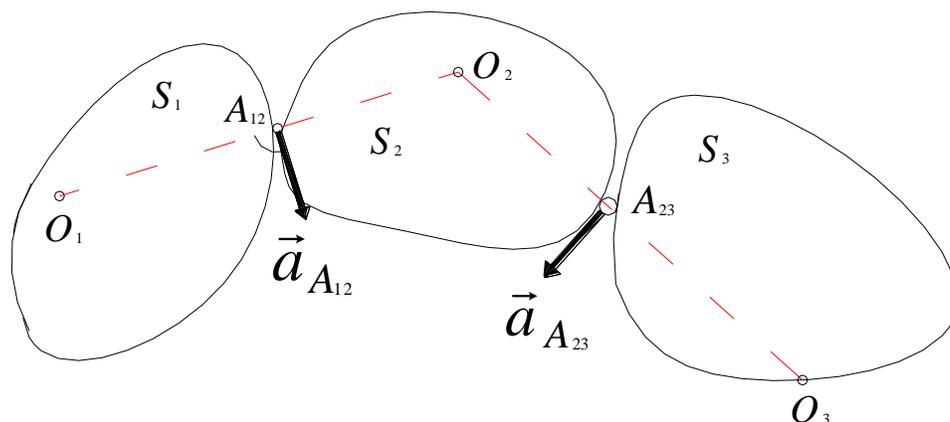
### Determinación de los polos de las cadenas cinemáticas de chapas

En la figura n.º 12 suponemos conocido el polo  $O_1$  de una de las chapas. Si  $A_{12}$  es la articulación relativa entre las chapas  $S_1$  y  $S_2$ , entonces el único movimiento posible de la chapa  $S_1$  es una rotación infinitésima normal a la dirección  $\overline{O_1 A_{12}}$ . Este corrimiento será  $\vec{a}_{A_{12}}$ .

Pero  $A_{12}$  también pertenece a la chapa  $S_2$ , por consiguiente su corrimiento estará impuesto por la chapa  $S_1$ . Esto se interpreta como originado por la chapa  $S_2$ . El polo de esta chapa se encontrará sobre la normal a la dirección del corrimiento trazada por  $A_{12}$ , o sea en la prolongación de  $\overline{O_1 A_{12}}$ .

Esto nos indica que **“en las cadenas cinemáticas con un grado de libertad, los polos de dos chapas consecutivas se encuentran alineados con la articulación relativa.”**

figura n ° 12



La conclusión de la página anterior permite determinar la ubicación del polo de la chapa  $S_2$  conociendo los polos de las chapas no consecutivas  $S_1$  y  $S_3$ . Para aclarar este punto, supongamos conocido el polo  $O_3$  de la chapa  $S_3$ , entonces, por un razonamiento similar al anterior, el polo  $O_2$  de la chapa  $S_2$  deberá encontrarse sobre la prolongación del segmento  $\overline{O_3A_{23}}$ .

Pero también deberá estar sobre el segmento  $\overline{O_1A_{12}}$ . En consecuencia, este polo se encontrará en la intercepción de las prolongaciones de los segmentos  $\overline{O_1A_{12}}$  y  $\overline{O_3A_{23}}$ .

**Conociendo los polos de dos chapas no consecutivas, se podrá determinar el polo de la chapa intermedia.** Es decir, con  $O_1$  y  $O_3$  se determina  $O_2$ .

A continuación, analizaremos diferentes situaciones. Comenzando por una cadena cinemática de cuatro chapas como la mostrada en la figura n ° 13.

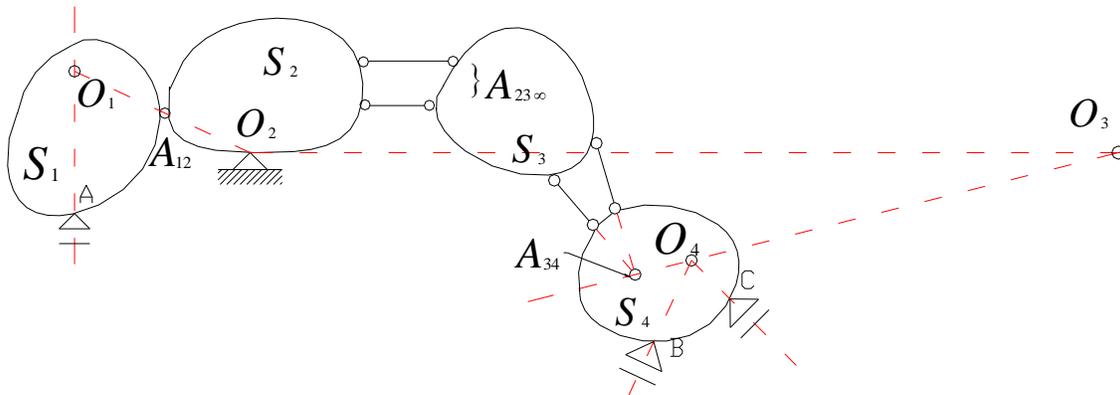
En la figura n ° 13 observamos una cadena cinemática de cuatro chapas cuyos grados de libertad son  $n + 2 = 6$ , y las condiciones de vínculo externo son  $CV = n + 1 = 5$ . Es conocida la posición del polo  $O_2$  de la chapa  $S_2$ , y, puesto que el mismo deberá estar alineado con la articulación  $A_{12}$  y con el polo  $O_1$  de la chapa  $S_1$ , este polo  $O_1$  deberá encontrarse en la intercepción con la normal al apoyo móvil  $A$  y la prolongación del segmento  $\overline{O_2A_{12}}$ .

En cuanto al polo  $O_4$  de la chapa  $S_4$ , el mismo se encuentra en la intercepción de las normales a los apoyos móviles  $B$  y  $C$ . En cuanto a la chapa  $S_3$ , el polo  $O_3$  de la misma deberá estar alineado con el polo  $O_4$  y la articulación  $A_{34}$ . A su vez, deberá estar alineado con el polo  $O_2$  y con la articulación ficticia  $A_{23\infty}$ . En consecuencia, el polo  $O_3$  se encontrará en

## Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pégola

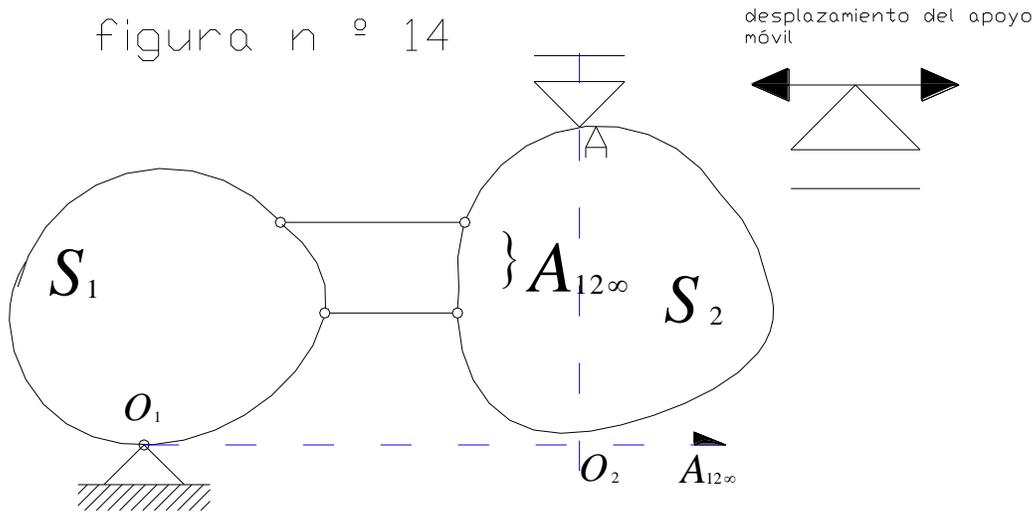
la intersección de las prolongaciones de los segmentos  $\overline{O_2A_{23\infty}}$  y  $\overline{O_4A_{34}}$  respectivamente.

figura n ° 13



Recuérdese que el apoyo móvil solo podrá experimentar corrimientos en la dirección del mismo. Entonces, el polo deberá estar en la normal al apoyo. Consecuentemente, la normal al apoyo A de la chapa  $S_2$  en la figura n ° 14 debe contener al polo  $O_2$  de la misma.

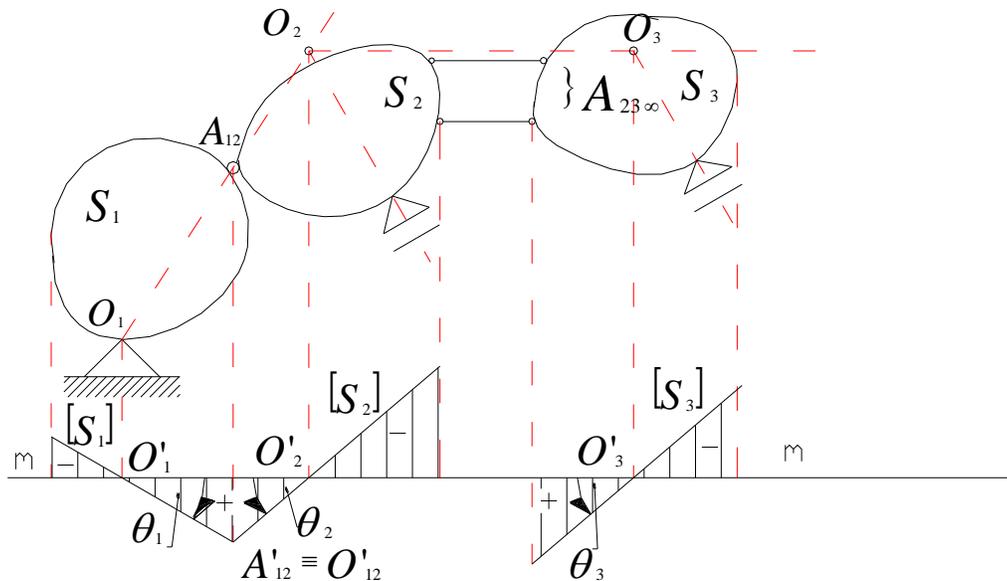
figura n ° 14



**Diagramas de corrimientos para cadenas cinemáticas de un grado de libertad**

Para trazar los diagramas de corrimientos en las cadenas cinemáticas de un grado de libertad se procede en forma análoga que para una chapa. En la figura n ° 15, trazaremos el diagrama de corrimientos verticales a una cadena cinemática en donde a la chapa  $S_1$  se le imprimió una rotación  $\theta_1 > 0$ .

figura n ° 15

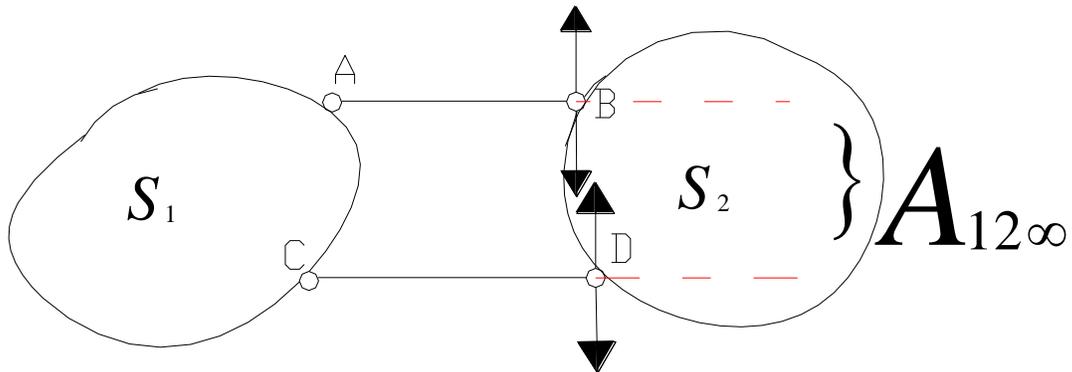


Primeramente, determinamos los polos en la forma conocida. Adoptamos un eje de referencia  $m-m$ , y damos un giro  $\theta_1 > 0$  a  $S_1$ . El polo  $O_1$  tendrá su proyección  $O'_1$ , en  $m-m$ , en consecuencia, la ordenada del diagrama de corrimientos verticales deberá ser nula en  $O'_1$ . La recta  $[S_1]$  será válida para las ordenadas extremas de la chapa  $S_1$ . El corrimiento  $A'_{12}$  de la articulación  $A_{12}$  será común a las chapas  $S_1$  y  $S_2$ , por lo tanto la recta  $[S_2]$  pasará por  $A'_{12}$  y por  $O'_2$ , proyección sobre  $m-m$  del polo  $O_2$ . La recta  $[S_2]$  será válida hasta las ordenadas extremas de  $S_2$ .

El diagrama de corrimientos verticales representativo de  $S_3$ , será una recta paralela a la recta  $[S_2]$  que pasará por  $O'_3$ , proyección de  $O_3$  sobre la recta  $m-m$ . El corrimiento relativo de  $S_3$  respecto de  $S_2$  es una traslación debido a que la articulación relativa  $A_{23\infty}$  es impropia, consecuentemente los corrimientos relativos entre los puntos de las chapas  $S_2$  y  $S_3$  son iguales entre sí, al igual que sus proyecciones.

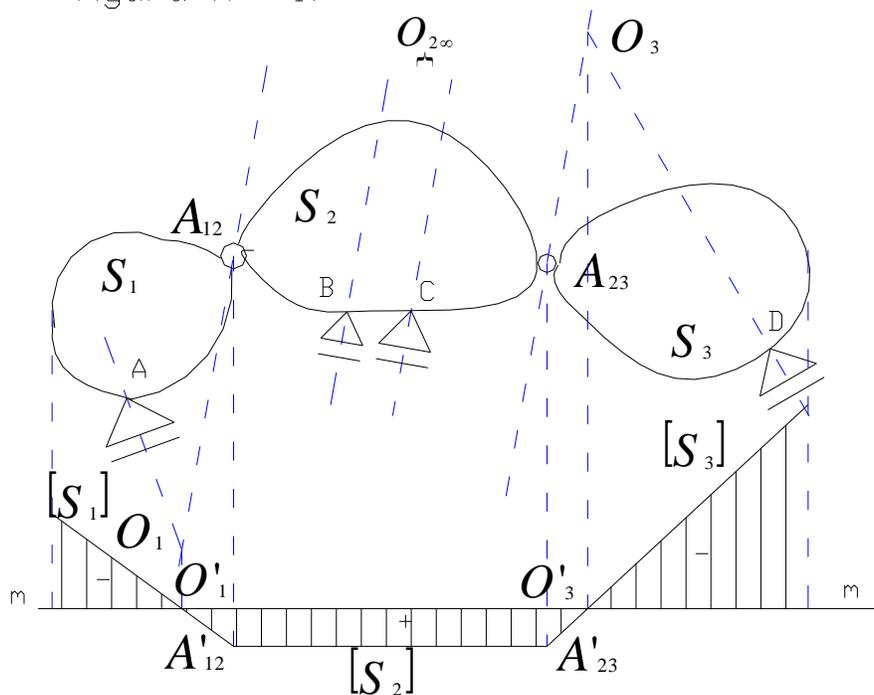
**Nota:** cuando las barras que vinculan dos chapas son paralelas, el desplazamiento relativo entre ambas es una traslación relativa. Como mostramos en la figura n ° 16, si suponemos fija la chapa  $S_1$ , las direcciones de los corrimientos posibles de los puntos  $B$  y  $D$  son paralelos entre sí y normales a las direcciones de las barras  $AB$  y  $CD$ . Pero según lo estudiado anteriormente, cuando dos puntos de una chapa tienen corrimientos iguales y paralelos, el desplazamiento relativo de la misma es una traslación. Consecuentemente el desplazamiento relativo de la chapa  $S_2$  respecto de  $S_1$  es una traslación relativa, siendo la articulación  $A_{12}$  impropia, y el punto impropio se encuentra en la dirección de las barras  $AB$  y  $CD$ .

figura n ° 16



A continuación, estudiaremos el caso en que se tiene una cadena cinemática de tres chapas, y una de ellas posee dos apoyos móviles de direcciones paralelas, en consecuencia, el polo de la misma se encuentra en un punto impropio como se indica en la figura n ° 17.

figura n ° 17



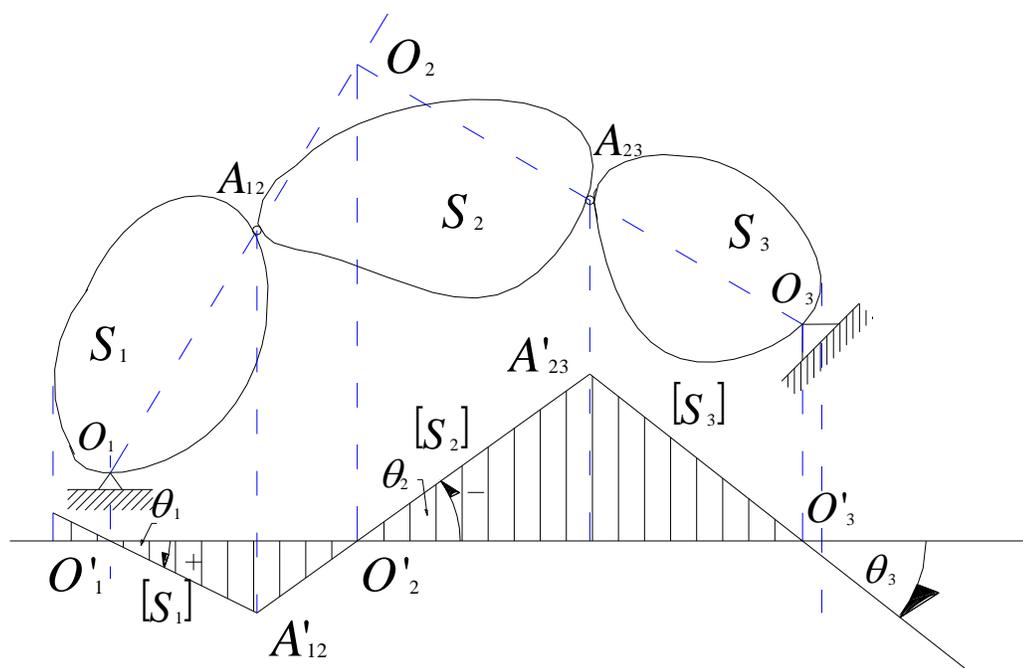
Cuando una de las chapas de la cadena cinemática posee una vinculación compuesta de dos apoyos móviles paralelos, el diagrama de corrimientos

cualquiera sea la dirección de los apoyos móviles es una recta paralela al eje de referencia  $m-m$ .

En el caso de la figura n<sup>o</sup> 17, los apoyos móviles  $B$  y  $C$  de la chapa  $S_2$  son paralelos. Conocida la ubicación de los polos, el polo de la chapa  $S_2$  es el punto impropio en la dirección de los apoyos, consecuentemente, los desplazamientos de la chapa  $S_2$  solo podrán ser traslaciones. Siendo para las traslaciones, los corrimientos relativos de todos los puntos de la chapa iguales, entonces, el diagrama correspondiente a  $S_2$  deberá ser una recta paralela al eje de referencia  $m-m$ . La recta paralela a  $m-m$  estará limitada por las verticales correspondientes a las articulaciones relativas  $A_{12}$  y  $A_{23}$ , que resultan ser  $A'_{12}$  y  $A'_{23}$  respectivamente, correspondiendo a las verticales trazadas por las articulaciones mencionadas. Luego, uniendo  $A'_{12}$  con la vertical de  $O_1$ ,  $O'_1$ , obtenemos el diagrama de corrimientos verticales de  $S_1$ . Además, uniendo  $A'_{23}$  con la vertical trazada de  $O_3$ ,  $O'_3$ , obtenemos el diagrama de corrimientos verticales correspondiente de  $S_3$ .

A continuación, analizaremos una cadena cinemática de tres chapas con un grado de libertad, con dos apoyos fijos, uno de ellos en  $S_1$  y el restante en  $S_3$  como se indica en la figura n<sup>o</sup> 18.

figura n<sup>o</sup> 18



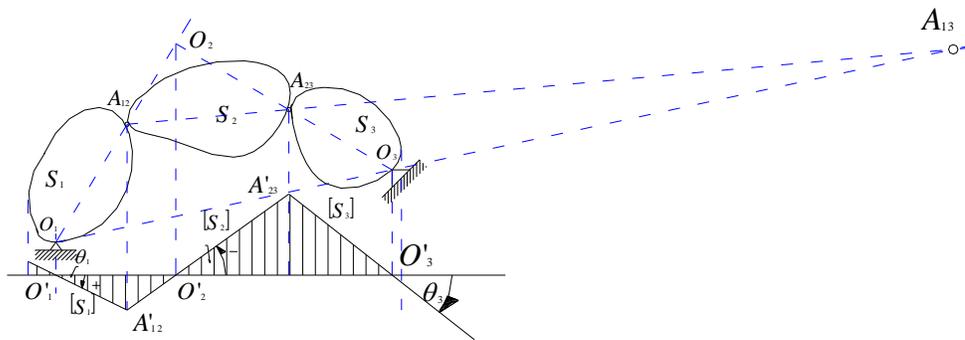
Si damos un giro infinitésimo  $\theta_1$  a  $S_1$ , siendo nula la ordenada  $O'_1$ , debido a que  $O_1$  es un punto fijo en  $S_1$ . La chapa  $S_3$  se encuentra vinculada a  $S_1$ , por medio de  $S_2$ , que cinemáticamente se comporta como una biela de dirección  $A_{12}A_{23}$ . Pero, al estar las chapas  $S_1$  y  $S_3$  unidas a tierra en los puntos fijos  $O_1$  y  $O_3$ , respectivamente, que cinemáticamente se comportan como una biela de dirección  $O_1O_3$ . Consecuentemente las chapas  $S_1$  y  $S_3$  están vinculadas por las bielas  $A_{12}A_{23}$  y  $O_1O_3$  equivaliendo esto a una articulación ficticia en la intercepción de ambas bielas como indica la figura n<sup>o</sup> 19.

# Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pégola

De aquí podemos concluir que la articulación relativa entre dos chapas no consecutivas se encuentra alineada con los polos de las mismas y las articulaciones relativas con la chapa intermedia.

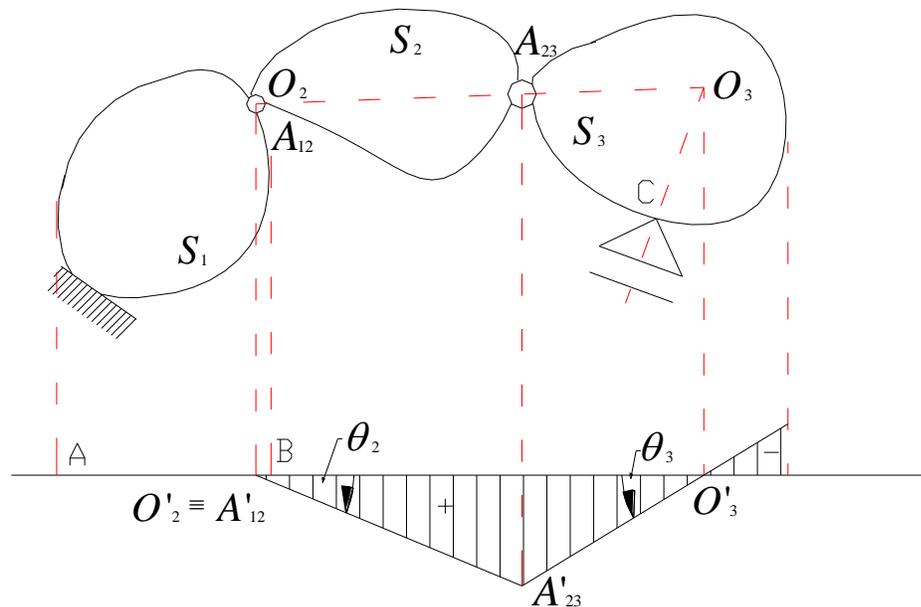
El corrimiento de la articulación relativa  $A_{13}$  se encuentra sobre la vertical a la misma en el diagrama de corrimientos verticales (no representado en las figuras n° 18 y 19) y su intercepción con  $[S_2]$  y  $[S_1]$ .

figura n° 19



A continuación analizaremos la cadena cinemática de la figura n° 20, en la cual tenemos la chapa  $S_1$  empotrada y un apoyo móvil en la chapa  $S_3$ .

figura n° 20

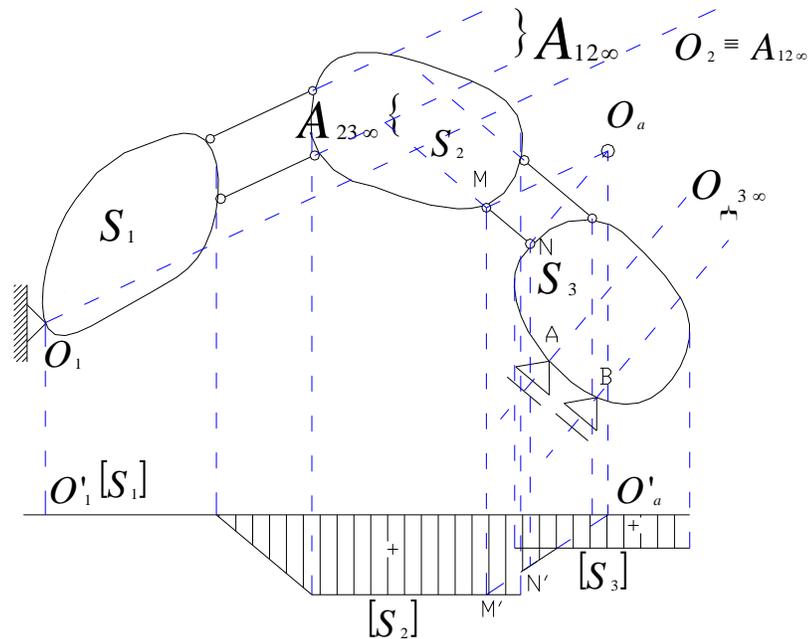


En la chapa  $S_1$  tenemos el empotramiento A, por lo que la chapa  $S_1$

permanecerá fija, y su diagrama de corrimientos será nulo en toda la extensión de la misma, en el eje de referencia, esto es el segmento  $\overline{AB}$ . La chapa  $S_2$  tiene su polo en la articulación  $A_{12}$ , por lo que imprimiéndole un giro positivo  $\theta_2$ , el desplazamiento vertical  $A'_{23}$  de la articulación  $A_{23}$  será común a  $S_2$  y  $S_3$ , en consecuencia, la chapa  $S_3$  tendrá un giro negativo  $\theta_3$  como se indica en la figura n<sup>o</sup> 20.

El último caso que analizaremos, es el mostrado en la figura n<sup>o</sup> 21.

figura n<sup>o</sup> 21



En la figura n<sup>o</sup> 21, el polo de  $S_1$  es  $O_1$ , y el polo de  $S_3$  será el impropio  $O_{3\infty}$ , que es la dirección común de los apoyos móviles  $A$  y  $B$  paralelas entre sí. Las articulaciones relativas entre las chapas  $S_1$  y  $S_2$ , y entre  $S_2$  y  $S_3$  son impropias.

El polo de  $S_2$  se encuentra alineado con  $O_1$  y  $A_{12\infty}$ , y con  $O_{3\infty}$  y  $A_{23\infty}$ . Esta última es la recta impropia, en consecuencia, el polo  $O_2$  es el punto impropio correspondiente a la recta paralela a las bielas que vinculan  $S_1$  con  $S_2$  trazada por  $O_1$ , implicando esto, que el polo  $O_2$  coincide con  $A_{12\infty}$ . Entonces, la chapa  $S_1$  tendrá dos puntos fijos, el polo  $O_1$  y  $A_{12\infty}$ , en consecuencia, la misma se encontrará inmóvil.

En cuanto al diagrama de desplazamientos verticales, el correspondiente a  $S_1$  se mantiene inmóvil, y el diagrama de corrimientos se superpone con el eje de referencia, y los corrimientos de sus puntos son nulos.

La chapa  $S_2$  no tiene otra alternativa que una traslación paralela al eje de referencia debido a que está vinculada a una chapa inmóvil mediante dos bielas paralelas. La chapa  $S_3$  se encuentra en idénticas condiciones que la chapa  $S_2$ , y está vinculada a la chapa  $S_2$  por medio de dos bielas paralelas, siendo en consecuencia una articulación impropia el diagrama de corrimientos será una recta paralela.

# Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pégola

Para determinar el diagrama de corrimientos de  $S_3$  recurrimos a una chapa auxiliar  $S_a$ , por ejemplo la biela  $MN$ , y, el polo de la misma se encuentra en la intersección de las rectas  $O_1O_{2\infty}$  y la dirección común de  $A$  y  $B$ , trazadas estas por  $M$  y  $N$  respectivamente.

Entonces, uniendo  $M'$ , proyección del desplazamiento de  $M$  sobre  $[S_2]$  con  $O'_a$ , y proyectando el punto  $N$  sobre este segmento tenemos el punto  $N'$  definiendo el corrimiento de  $N$ . Debido a que  $N'$  pertenece a  $S_3$ , el corrimiento correspondiente  $[S_3]$  se obtiene trazando por  $N'$  una paralela al eje de referencia, siendo este el diagrama de corrimientos de  $S_3$ .

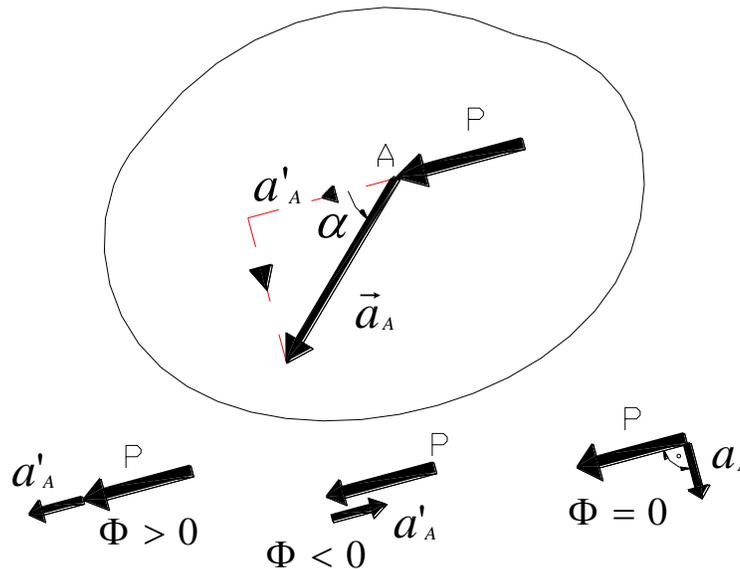
## TRABAJO VIRTUAL

**Desplazamiento virtual:** Es todo desplazamiento infinitésimo de un punto compatible con sus condiciones de vínculo.

**Trabajo de una fuerza  $\Phi$ :** Un punto  $A$  de una chapa sufre un corrimiento  $\vec{a}_A$  por efecto de una fuerza  $P$  como indica la figura n.º 22, entonces el trabajo realizado por la misma será:

$$\Phi = P \cdot \vec{a}_A \cdot \cos \alpha = P \cdot a'_A \quad \text{Ecuación 4}$$

figura n.º 22



Recuérdese que cuando el ángulo formado por  $P$  y  $a'_A$  es nulo, el trabajo es positivo. Cuando este ángulo es de  $180^\circ$  el trabajo es negativo. Cuando  $a_A$  es normal a  $P$ , el trabajo realizado por esta es nulo.

**Trabajo de un par de fuerzas  $\Phi_M$ :** Sea una chapa  $S$ , que gira un ángulo  $\theta$  alrededor de un punto fijo  $O$ , como se indica en la figura n.º 23, y en la

## Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pέργola

misma actúa un par de fuerzas separadas una distancia  $d$  tal que

$$|P| = |P_1| = |P_2| = \left| \frac{M}{d} \right| .$$

El desplazamiento de los puntos  $A$  y  $B$  resultan respectivamente:

$$\begin{cases} \vec{a}_A = \theta \cdot d_1 \\ \vec{a}_B = \theta \cdot d_2 \end{cases}$$

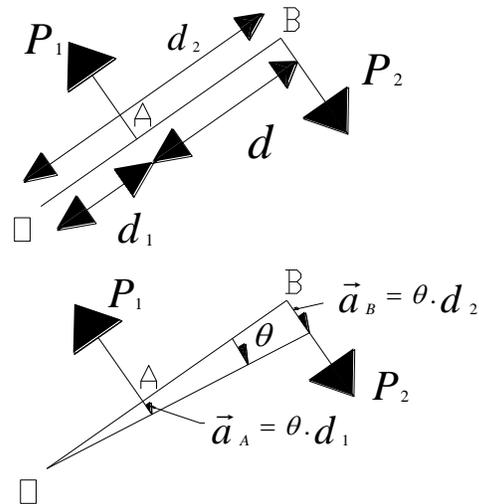
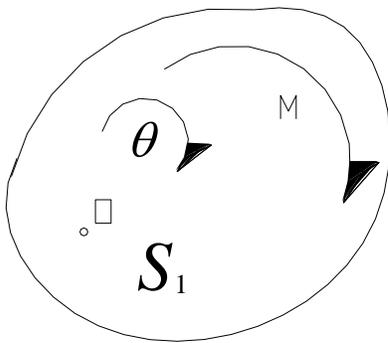
En consecuencia, los respectivos trabajos de las fuerzas  $P_1$  y  $P_2$  quedan:

$$\begin{cases} \Phi_{P_1} = -\vec{P}_1 \cdot \vec{a}_A \\ \Phi_{P_2} = \vec{P}_2 \cdot \vec{a}_B \end{cases}$$

El trabajo total  $\Phi$  será la suma de estos últimos, o sea:

$$\Phi = \vec{P}(\vec{a}_B - \vec{a}_A) \quad \text{Ecuación 5}$$

figura n ° 23



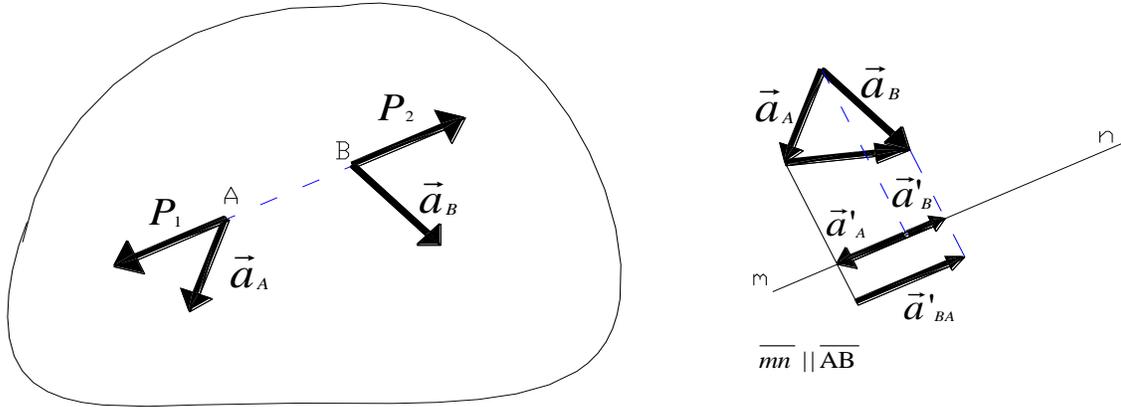
Entonces, nos queda:  $\Phi_M = P \cdot \theta (d_2 - d_1) = P \cdot d \cdot \theta \quad \therefore \quad \Phi_M = M \theta$  Ecuación 6

De aquí podemos notar que cuando el desplazamiento de una chapa es una traslación, entonces el trabajo del par es nulo. Lo cual es sencillo de demostrar, pues todos los puntos de la chapa se desplazan con igual dirección e intensidad siendo  $\vec{a}_A = \vec{a}_B$ , entonces en la ecuación 6 resulta

$$\Phi_M = 0 .$$

**Trabajo de dos fuerzas opuestas:** Consideremos dos fuerzas de igual intensidad, igual recta de acción y sentidos opuestos actuantes en los puntos  $A$  y  $B$  de una chapa  $S_1$ , como indica la figura n ° 24.

figura n ° 24



Los puntos **A** y **B** sufren los desplazamientos  $\vec{a}_A$  y  $\vec{a}_B$  respectivamente.  
 Los respectivos trabajos de las fuerzas  $P_A$  y  $P_B$  serán:

$$\text{Ecuaciones 7} \begin{cases} \Phi_A = P_A \cdot a'_A \\ \Phi_B = P_B \cdot a'_B \end{cases}$$

El trabajo total es,

$$\Phi = \Phi_A + \Phi_B = P_A \cdot a'_A + P_B \cdot a'_B \quad \text{Ecuación 8}$$

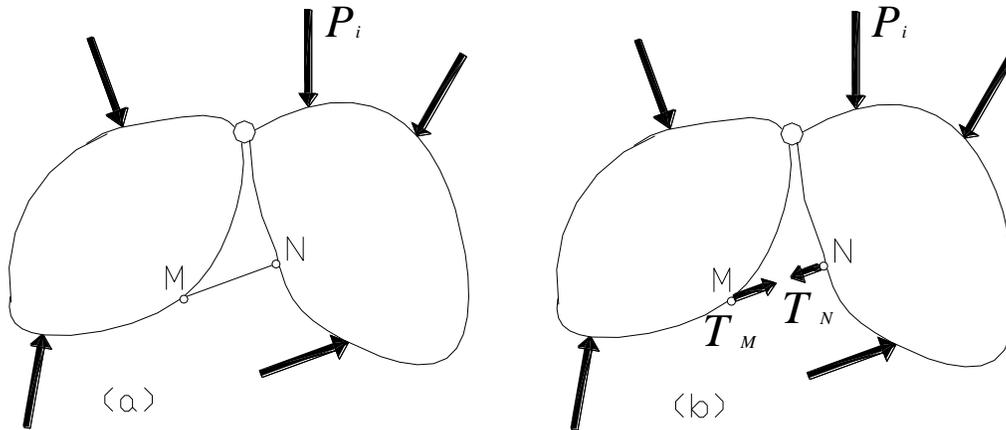
Pero como  $P_A = -P_B$ , entonces resultará:

$$\Phi = P_B \cdot (a'_B - a'_A) = P_B \cdot a'_{BA} \quad \text{Ecuación 9}$$

Consecuentemente, el trabajo que realizan dos fuerzas opuestas de igual intensidad es igual para corrimientos cualesquiera de sus puntos de aplicación, es igual al producto de la intensidad de una de ellas por la proyección sobre su dirección sobre su dirección del corrimiento relativo de su punto de aplicación respecto de la otra fuerza.

Si consideramos la figura n ° 25 constituida por dos chapas articuladas entre sí y unidas por medio de una barra **MN**.

figura n ° 25



El sistema de la figura n ° 25 a constituye un sistema rígido e indeformable bajo la acción de la de un sistema  $P_i$  de fuerzas.

Suprimiendo  $MN$  y colocando dos fuerzas opuestas  $T_M$  y  $T_N$  que restituyan el equilibrio del sistema materializando las reacciones internas de la barra  $MN$  en los puntos  $M$  y  $N$  respectivamente. Si al sistema se le imprime un desplazamiento cualquiera, las fuerzas  $T_M$  y  $T_N$  realizarán un trabajo. El trabajo de ambas será:

$$\Phi = T_N \cdot a'_{NM} = T_M \cdot a'_{MN} \quad \text{Ecuación 10}$$

Siendo  $T$  el esfuerzo de la barra  $MN$ , entonces resulta:  $|T| = |T_M| = |T_N|$ .

Además debe resultar  $|a'_{NM}| = |a'_{MN}| = |\delta_{NM}| = |\delta_{MN}|$ , por ser  $a'_{MN}$  la proyección de  $a_{NM}$  sobre la dirección  $MN$ . Entonces, podemos expresar el trabajo de  $T$  como,

$$\Phi = |T| \cdot |\delta_{MN}| \quad \text{Ecuación 11}$$

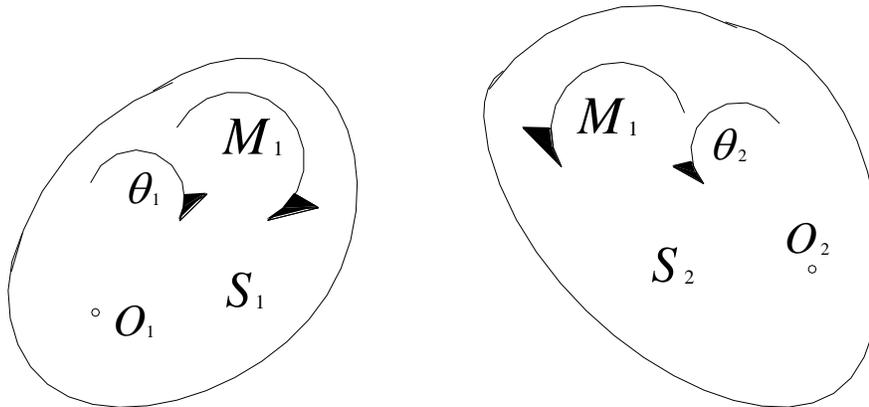
Cuando  $T$  es positiva, esfuerzo de tracción, y la proyección  $a'_{NM}$  también lo es, entonces el trabajo realizado por  $T$  resulta positivo. Cuando  $a'_{MN}$  es positivo, el punto  $N$  se acerca al  $M$ , y, según la convención adoptada anteriormente, la variación de distancia es negativa. Consecuentemente, para corresponder la ecuación 11 con la ecuación 10 incluso en signo, se deberá considerar la variación de distancia con signo cambiado, o sea:

$$\Phi = T \cdot (-\delta_{MN}) \quad \text{Ecuación 12}$$

De acuerdo a la ecuación 12, y conforme a las convenciones adoptadas, el trabajo del esfuerzo interno de una barra es igual al producto de la intensidad del esfuerzo de la barra por la variación de distancia entre sus puntos extremos cambiada de signo.

**Trabajo de un par de pares:** Supongamos dos chapas  $S_1$  y  $S_2$  sometidas a los momentos  $M_1$  y  $M_2$  tal que  $M_1 = -M_2$  como indica la figura n.º 26.

figura n.º 26



Siendo:

$$\text{Ecuaciones 13} \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{M_1} = M_1 \cdot \theta_1 \\ \Phi_{M_2} = M_2 \cdot \theta_2 \end{array} \right.$$

Además, el trabajo total es la suma de  $\Phi_{M_1} + \Phi_{M_2} = \Phi$

Entonces, resultará:

$$\Phi = M_1 \cdot \theta_1 + M_2 \cdot \theta_2 = M_1 \cdot \theta_1 - M_1 \cdot \theta_2 \quad \text{Ecuación 14}$$

Pero, siendo a su vez:

$$\theta_1 - \theta_2 = \theta_{12}$$

Transformándose la ecuación 14 en:

$$\Phi = M_1 \cdot \theta_{12} \quad \text{Ecuación 15}$$

En otras palabras, el trabajo total realizado por dos pares de igual intensidad con sentido de giro contrario es igual al producto de un par de momentos por el ángulo de giro relativo entre ambas chapas.

### **PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES**

Sea un sistema de puntos materiales, sujeto a una vinculación determinada, en equilibrio bajo la acción de un determinado sistema de fuerzas cualesquiera.

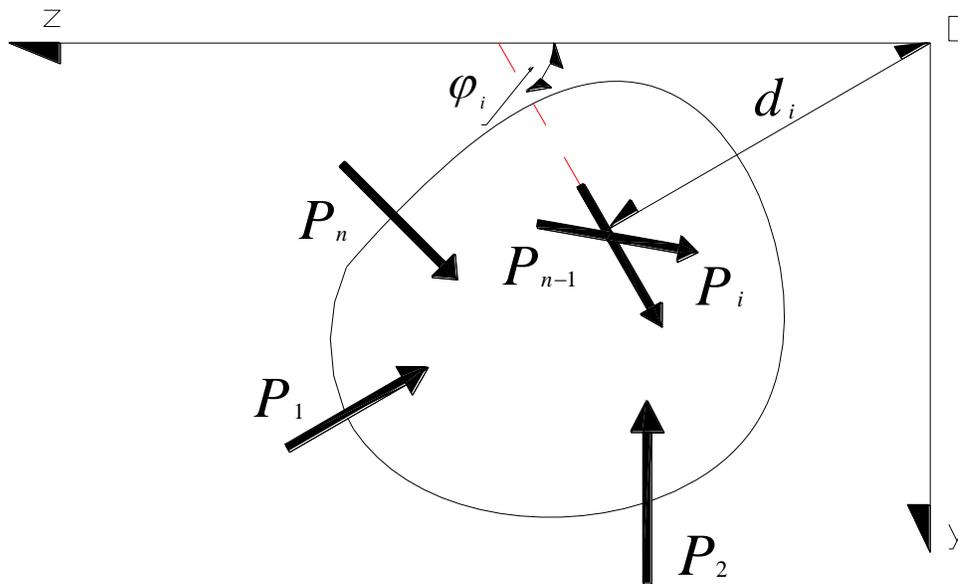
**Es condición necesaria y suficiente para que un sistema de puntos materiales, sujeto a vínculos determinados, se encuentre en equilibrio en una cierta posición bajo la acción de un sistema de fuerzas cualesquiera, que el trabajo desarrollado por las mismas, para cualquier desplazamiento**

virtual del sistema de puntos materiales, dado a partir de dicha posición, sea nulo.

A continuación demostraremos el principio de los trabajos virtuales.

Supongamos la chapa libre en el plano de la figura n.º 27 sujeta a la acción de un sistema de fuerzas concurrentes  $P_i$  y direcciones  $\varphi_i$ .

figura n.º 27



Las condiciones necesarias y suficientes para una chapa se encuentre en equilibrio en el plano son:

$$\text{Ecuaciones 16} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n P_i \cdot \cos \varphi_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n P_i \cdot \text{sen} \varphi_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n P_i \cdot d_i = 0 \end{array} \right.$$

En donde  $\varphi_i$  son los ángulos que forman las fuerzas del sistema con respecto al semieje positivo  $z$ , y  $d_i$  son las distancias de las rectas de acción de las fuerzas respecto de un punto  $O$  elegido como centro de momentos.

Una chapa posee tres grados de libertad, en consecuencia puede experimentar tres desplazamientos en el plano, dos traslaciones en las direcciones de los ejes coordenados, y una rotación alrededor de un punto  $O$ .

Comenzamos dando un desplazamiento que consiste en una traslación  $a_z$  en la dirección del eje  $z$ . De acuerdo al principio de los trabajos virtuales, se deberá cumplir que:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n P_i \cdot a_i \cdot \cos \varphi_i = 0 \quad \text{Ecuación 17}$$

Debido a que  $a_z = a_i$  pues se trata de una traslación, entonces podemos escribir la ecuación 17 como:

$$\sum_{i=1}^n P_i \cdot a_i \cdot \cos \varphi_i = a_z \sum_{i=1}^n P_i \cdot \cos \varphi_i = 0$$

Como  $a_z \neq 0$ , y de acuerdo a la primera de las ecuaciones 16, tenemos:

$\sum_{i=1}^n P_i \cdot \cos \varphi_i = 0$ , por consiguiente se verifica la condición impuesta en la ecuación 17.

A continuación, le damos a la chapa un desplazamiento  $a_y$  en la dirección del eje  $y$ . De acuerdo al principio de los trabajos virtuales, podemos escribir:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n P_i \cdot a_i \cdot \sin \varphi_i = 0 \quad \text{Ecuación 18}$$

Tratándose de una traslación, como en el caso anterior, tenemos que:

$a_y = a_i$ , en consecuencia, podemos escribir la ecuación 18 como:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n P_i \cdot a_i \cdot \sin \varphi_i = a_y \sum_{i=1}^n P_i \cdot \sin \varphi_i = 0 \quad \text{Ecuación 19}$$

Debido que  $a_y \neq 0$ , y, de acuerdo a la segunda de las ecuaciones 16,

tenemos:  $\sum_{i=1}^n P_i \cdot \sin \varphi_i = 0$ , entonces se verifica la condición impuesta en la ecuación 18.

Por último, si damos un giro  $\theta$  en sentido positivo alrededor del polo  $O$  a la chapa, y aplicando este a la dirección de cada una de las fuerzas, los respectivos corrimientos de los puntos de las mismas serán:

$$a'_i = \theta \cdot d_i \quad \text{Ecuación 20}$$

Y, el trabajo virtual desarrollado por el sistema de fuerzas será:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n P_i \cdot a'_i = 0 \quad \text{Ecuación 21}$$

Que, reemplazando la ecuación 20 en la ecuación 21, resulta:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \theta \cdot d_i = 0 \quad \text{Ecuación 22}$$

Debido a que  $\theta$  es constante podemos escribir como,

$$\Phi = \theta \cdot \sum_{i=1}^n P_i \cdot d_i = 0 \quad \text{Ecuación 23}$$

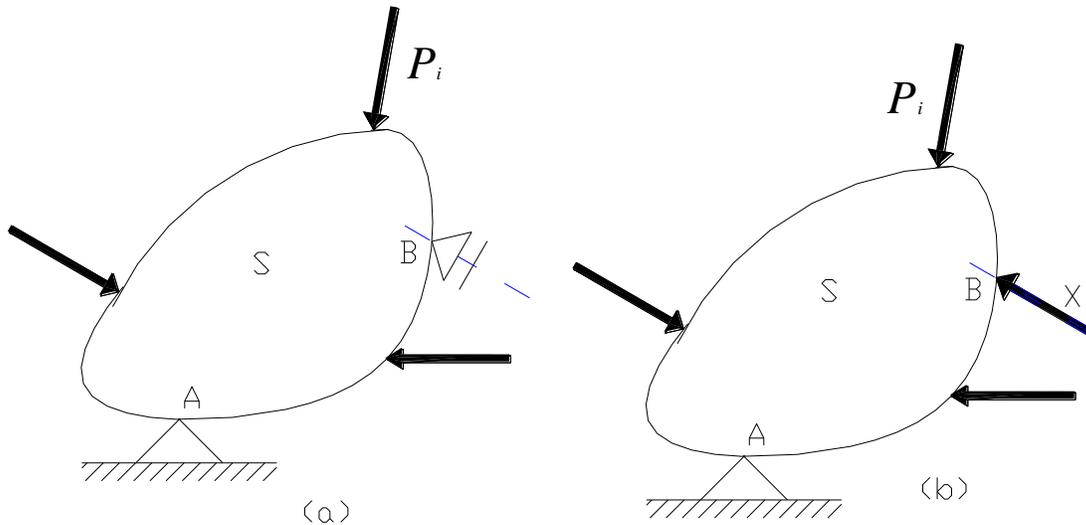
Como  $\theta \neq 0$  y de acuerdo a la tercera ecuación de las ecuaciones 16,

$\sum_{i=1}^n P_i \cdot d_i = 0$ , Entonces se verifica la condición de la ecuación 21.

## Aplicaciones del principio de los trabajos virtuales a la determinación de incógnitas estáticas

Consideremos una chapa como en la figura n ° 28 sometida a la acción de un sistema de fuerzas  $P_i$ , y estando el sistema en equilibrio. Si quitamos una condición de vínculo, en este caso un apoyo móvil en  $B$ , el sistema dejará de estar en equilibrio. Para restablecer el equilibrio del sistema aplicamos en  $B$  una reacción  $X$  en la dirección del apoyo móvil  $B$ .

figura n ° 28



Puesto que  $X$  deberá mantener el equilibrio del sistema, para un desplazamiento cualquiera, según el principio de los trabajos virtuales, el trabajo total desarrollado por el sistema deberá ser nulo. Siendo así, tenemos:

$$\sum_{i=1}^n P_i \cdot a'_i + X \cdot a'_x = 0 \quad \text{Ecuación 24}$$

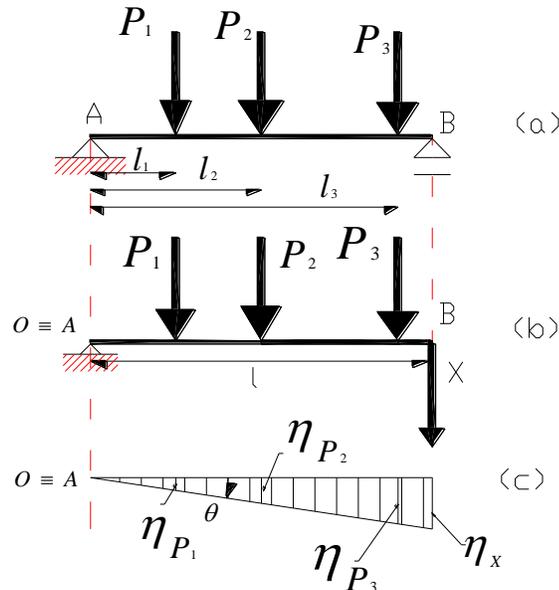
Siendo  $a'_i$  y  $a'_x$  las proyecciones de los desplazamientos  $a$  en las direcciones de las respectivas fuerzas y de  $X$ . De la ecuación 24 surge:

$$X = - \frac{\sum_{i=1}^n P_i \cdot a'_i}{a'_x} \quad \text{Ecuación 25}$$

### Determinación de reacciones de vínculo

Sea una viga simplemente apoyada como la indicada en la figura n ° 29, sometida a la acción de las fuerzas  $P_1$ ,  $P_2$ , y  $P_3$ . La incógnita es la reacción del apoyo móvil  $B$ .

figura n ° 29



El primer paso consiste en poner en evidencia la incógnita, en este caso el vínculo **B**, y en su lugar colocar la fuerza **X** capaz de mantener el sistema en equilibrio ( figura n ° 29b). De esta forma queda un sistema con un grado de libertad, pudiendo efectuar un desplazamiento ( en este caso es un giro  $\theta$  alrededor del polo  $O \equiv A$ , pues se trata de un apoyo fijo).

Al efectuar la chapa  $\theta$ , y, por ser las direcciones de las fuerzas  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  y **X** paralelas entre sí y normales al eje de la chapa, los desplazamientos de los puntos de las fuerzas se proyectarán en verdadera magnitud sobre la dirección de las fuerzas propiamente dichas. O sea que:

$$a'_i \equiv a_i$$

Entonces, la expresión de los trabajos virtuales nos quedará:

$$P_1 \cdot \eta_{P_1} + P_2 \cdot \eta_{P_2} + P_3 \cdot \eta_{P_3} + X \cdot \eta_X = 0 \quad \text{Ecuación 26}$$

Pero a su vez, tenemos,

$$\eta_{P_1} = \theta \cdot l_1, \quad \eta_{P_2} = \theta \cdot l_2, \quad \eta_{P_3} = \theta \cdot l_3, \quad \eta_X = \theta \cdot l \quad \text{Ecuaciones 27}$$

Reemplazando las ecuaciones 27 en la ecuación 26, resulta:

$$P_1 \cdot l_1 + P_2 \cdot l_2 + P_3 \cdot l_3 + X \cdot l = 0 \quad \text{Ecuación 28}$$

Que conduce a,

$$X = -\frac{P_1 \cdot l_1 + P_2 \cdot l_2 + P_3 \cdot l_3}{l} \quad \text{Ecuación 29}$$

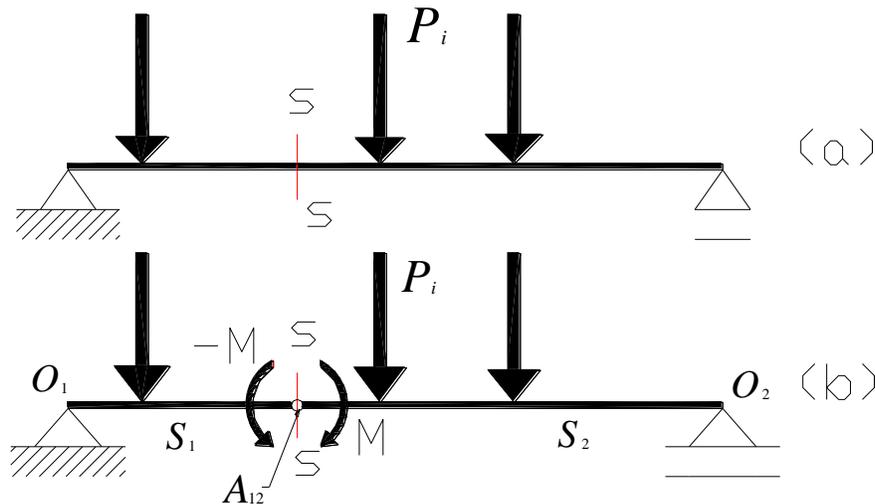
Idéntica expresión a la obtenida en la ecuación de equilibrio de momentos de un sistema de fuerzas.

**Esfuerzos característicos de un sistema de alma llena**

Determinación del momento flector de una viga de alma llena en una sección cualquiera s-s

Sea la viga de la figura n<sup>o</sup> 30 isostáticamente sustentada, y la misma está sometida a un sistema de fuerzas  $P_i$ . Para estudiar el problema debemos conferirle al sistema un grado de libertad, para lo cual debemos tener en cuenta un sistema que permita esta condición permitiendo determinar el momento flector en la sección solicitada.

figura n<sup>o</sup> 30



Para poner en evidencia el momento flector en la sección  $s-s$ , ubicada a la longitud  $l_s$  del apoyo fijo  $A$ , debemos colocar un mecanismo cinemático que al estar ubicado en la sección analizada no permita la propagación de momentos flectores, pero deberá permitir la transmisión de esfuerzos normales y cortantes.

Este mecanismo se logra con una articulación  $A_{12}$  en el baricentro de la sección analizada ( figura n<sup>o</sup> 30b). Esta articulación permite transmitir una fuerza de la chapa  $S_1$  a la chapa  $S_2$  y viceversa, pero no permite transmitir momentos flectores alrededor de dicha articulación.

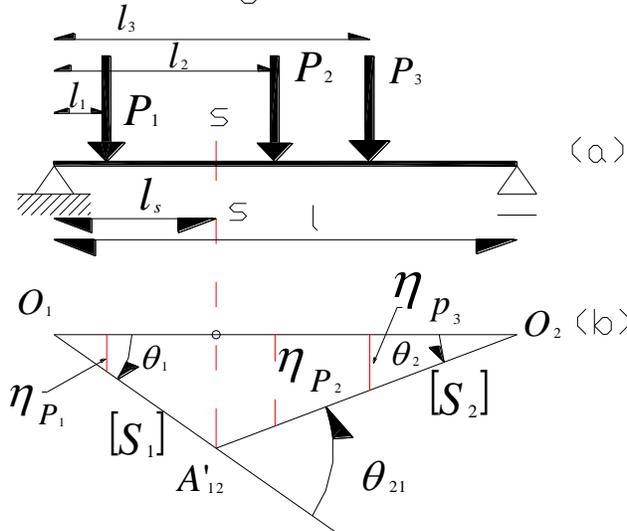
Con esta articulación, el sistema se transforma en una cadena cinemática de dos chapas con tres condiciones de vínculo, y, en consecuencia un grado de libertad. Para restablecer el equilibrio, colocamos dos pares opuestos  $-M$  y  $M$  actuantes en las chapas  $S_1$  y  $S_2$  respectivamente, tales que se opongan a la rotación. En consecuencia, impedidas las chapas de rotar, las mismas se encontrarán en equilibrio y, a la vez, se evidencia un par de pares, opuestos que materializan el momento flector. Es decir, nuestra incógnita es  $X = Ms$ . Para determinar esta incógnita, damos una rotación  $\theta_1$  a la chapa  $S_1$ , como se indica en la figura n<sup>o</sup> 31. De acuerdo al principio de los trabajos virtuales tenemos:

$$\Phi = P_1 \cdot \eta_{P_1} + P_2 \cdot \eta_{P_2} + P_3 \cdot \eta_{P_3} + M_s \cdot \theta_{21} = 0 \quad \text{Ecuación 30}$$

De donde se obtiene:

$$M_s = -\frac{P_1 \cdot \eta_{P_1} + P_2 \cdot \eta_{P_2} + P_3 \cdot \eta_{P_3}}{\theta_{21}} \quad \text{Ecuación 31}$$

figura n° 31



Pero, a su vez,  $\eta_{P_1} = \theta_1 \cdot l_1$ ;  $\eta_{P_2} = \theta_2 \cdot (l - l_2)$ ;  $\eta_{P_3} = \theta_2 \cdot (l - l_3)$  Ecuaciones 32

De la figura n° 31b surge la siguiente relación geométrica:

$$|\theta_1 \cdot l_s| = |\theta_2 \cdot (l - l_s)| \quad \text{de donde obtenemos} \quad |\theta_2| = \left| \theta_1 \frac{l_s}{l - l_s} \right| \quad \text{Ecuación 33}$$

También tenemos la siguiente relación:

$$\theta_{21} = -(\theta_2 - \theta_1) = -\left( \theta_1 \frac{l_s}{l - l_s} + \theta_1 \right) = -\theta_1 \frac{l}{l - l_s} \quad \text{Ecuación 34}$$

Que, reemplazando las ecuaciones 32, 33 y 34 en la ecuación 31, nos queda:

$$M_s = -\frac{P_1 \cdot \theta_1 \cdot l_1 + P_2 \cdot \left( \theta_1 \frac{l_s}{l - l_s} \right) \cdot (l - l_2) + P_3 \cdot \left( \theta_1 \frac{l_s}{l - l_s} \right) \cdot (l - l_3)}{-\theta_1 \frac{l}{l - l_s}} \quad \text{Ecuación 35}$$

Mediante operaciones algebraicas, se puede expresar la ecuación 35 de la siguiente forma:

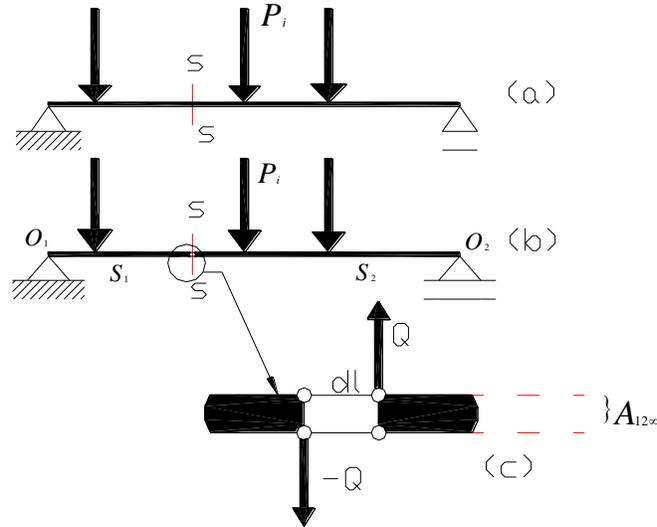
$$M_s = \frac{P_1 \cdot l_1 \cdot (l - l_s) + P_2 \cdot l_s \cdot (l - l_2) + P_3 \cdot l_s \cdot (l - l_3)}{l} \quad \text{Ecuación 36}$$

**Determinación del esfuerzo cortante en una viga de alma llena en una sección cualquiera s-s**

A continuación determinaremos el esfuerzo cortante  $Q_s$  en la sección

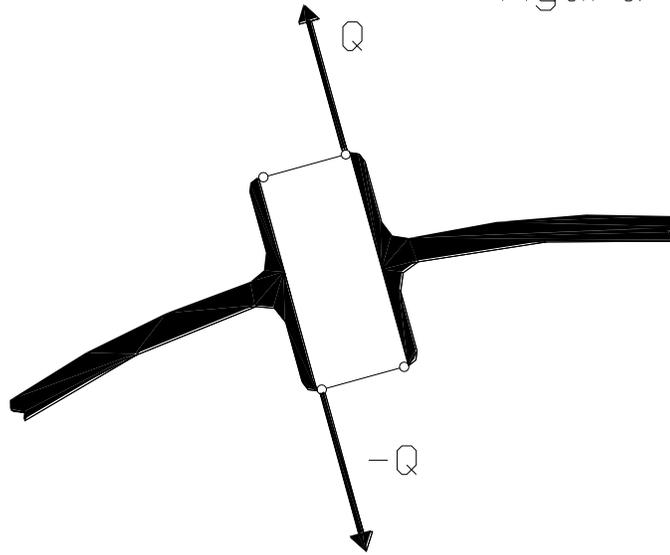
s-s de la figura n ° 32. Para evidenciar el esfuerzo cortante  $Q$  en s-s debemos diseñar un mecanismo que permita transmitir pares y esfuerzos normales, pero no debe permitir la trasmisión de los esfuerzos de corte.

figura n ° 32



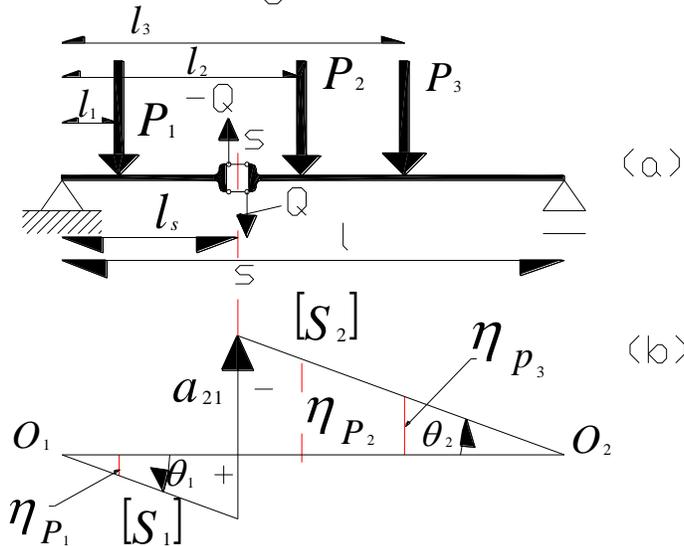
Como podemos observar en la figura n ° 32c, separamos ambas caras de la sección  $s-s$  una longitud infinitésima  $dl$ , y vinculamos ambas caras por dos bielas paralelas y normales a las secciones. En consecuencia, el desplazamiento posible de una sección respecto de la otra será una traslación en la dirección normal a las bielas, siendo impedidas la rotación y las traslaciones en las direcciones de las bielas. En otras palabras, el mecanismo diseñado permite transmitir pares y esfuerzos normales en las direcciones de las bielas, pero no permite transmitir el esfuerzo de corte. El mecanismo utilizado para determinar el esfuerzo cortante será materializado como indicamos en la figura n ° 33.

figura n ° 33



Para determinar el esfuerzo cortante en la sección  $s-s$  de la viga de alma llena de la figura n ° 32 sometida a tres cargas concentradas, damos un giro a la  $\theta_1$  a la chapa  $S_1$ .  
En la figura n ° 34 mostramos esta situación.

figura n ° 34



Luego del giro  $\theta_1$  de la chapa  $S_1$ , la chapa  $S_2$  girará un ángulo  $\theta_2$  tal que  $\theta_1 = \theta_2$  por ser el desplazamiento relativo de una chapa respecto de la otra una traslación. Luego, trazamos el diagrama de corrimientos verticales en la forma conocida, según indicamos en la figura n ° 34. El trabajo conjunto de las fuerzas que materializan el esfuerzo de corte es,

el producto de  $Q$  por la proyección sobre su dirección del corrimiento relativo de su punto de aplicación. Esto es:

$$\Phi_Q = -Q \cdot a_{21} \quad \text{Ecuación 37, pues el corrimiento } a_{21} \text{ es negativo}$$

La ecuación de los trabajos virtuales nos quedará:

$$\Phi_Q + \Phi_{P_1} + \Phi_{P_2} + \Phi_{P_3} = 0 \quad \text{Ecuación 38}$$

Por otra parte sabemos que:

$$\text{Ecuaciones 39} \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{P_1} = P_1 \cdot \eta_{P_1} \quad \text{y } \eta_{P_1} = \theta_1 \cdot l_1 \\ \Phi_{P_2} = P_2 \cdot \eta_{P_2} \quad \text{y } \eta_{P_2} = -\theta_2 \cdot (l - l_2) \\ \Phi_{P_3} = P_3 \cdot \eta_{P_3} \quad \text{y } \eta_{P_3} = -\theta_2 \cdot (l - l_3) \end{array} \right.$$

Y, reemplazando las ecuaciones 39 y la ecuación 37 en la ecuación 38, resulta:

$$-Q \cdot a_{21} + P_1 \cdot \theta_1 \cdot l_1 - P_2 \cdot \theta_2 \cdot (l - l_2) - P_3 \cdot \theta_2 \cdot (l - l_3) = 0 \quad \text{Ecuación 40}$$

Y, siendo:

$$|a_{21}| = |\theta_1 \cdot l_1| + |\theta_2 \cdot (l - l_3)| = |\theta_1 \cdot l| \quad \text{Ecuación 41}$$

Reemplazando la ecuación 41 en la ecuación 40 y realizando algunas operaciones algebraicas, nos queda la expresión:

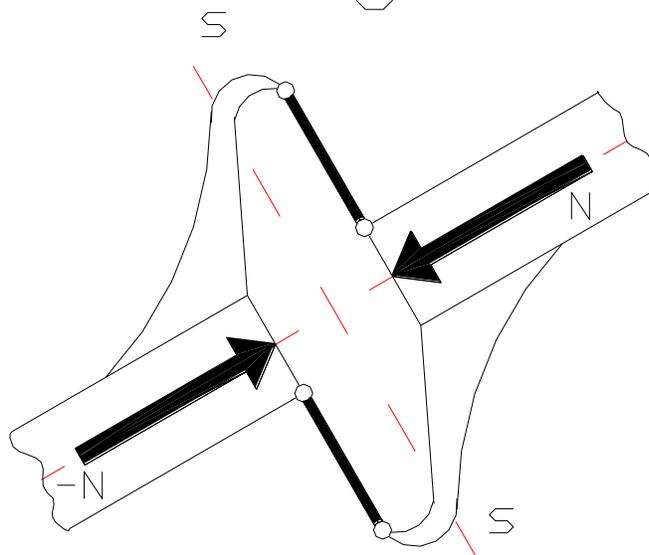
$$Q = \frac{P_1 \cdot l_1 - P_2 \cdot (l - l_2) - P_3 \cdot (l - l_3)}{l}$$

Que, es idéntica expresión a la obtenida por reducción al baricentro de la sección s-s.

### Determinación del esfuerzo normal de una viga de alma llena en una sección cualquiera s-s

Cuando se desea poner en evidencia el esfuerzo normal en una sección de la viga, se dispone de un mecanismo compuesto de dos bielas paralelas contenidas en el plano de la sección, según se indica en la figura n ° 35.

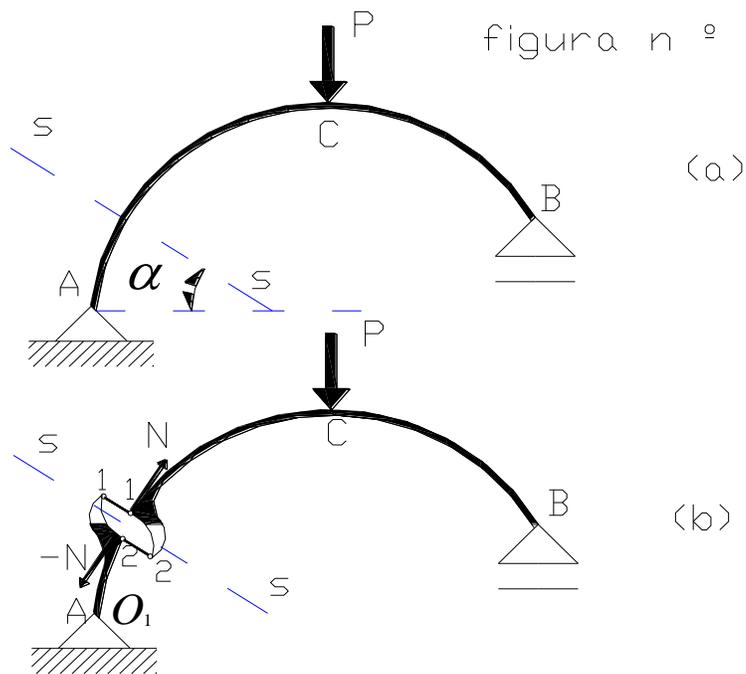
figura n ° 35



El mecanismo indicado en la figura n ° 35 permite desplazamientos relativos entre las chapas del sistema, cuando estos son de dirección normal a la dirección de las bielas, impidiendo las rotaciones y traslaciones relativas en las direcciones de las mismas.

Para analizar el esfuerzo normal en una sección s-s de una viga de alma llena consideramos el sistema de la figura n ° 36.

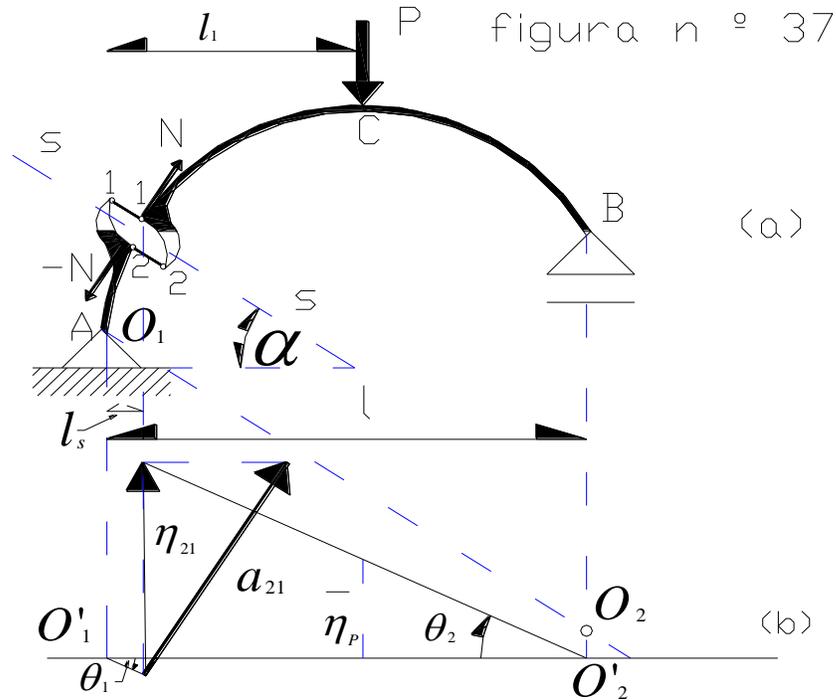
figura n ° 36



## Apunte compilado y redactado por el ingeniero Fabián Pέργola

Como observamos en la figura n<sup>o</sup> 36, colocamos en la sección s-s un par de bielas 1-1 y 2-2 en la dirección normal a la dirección de las bielas.

En la figura n<sup>o</sup> 37, damos un giro positivo  $\theta_1$  a la chapa  $S_1$ , alrededor del polo  $O_1$ , en consecuencia, la chapa  $S_2$  experimenta una rotación  $\theta_2 = \theta_1$ , alrededor del polo  $O_2$ .



Construido el diagrama de corrimientos verticales en la forma conocida, y, quedando establecido el desplazamiento  $a_{12}$  de la incógnita  $N$ , según el principio de los trabajos virtuales tenemos:

$$\Phi = \Phi_N + \Phi_P = 0 \quad \text{Ecuación 42}$$

A su vez, tenemos:

$\Phi_P = -P \cdot \eta_P$  pero  $\eta_P = \theta_1 \cdot (l - l_1) \therefore$  reemplazando en la ecuación anterior, resulta:

$$\Phi_P = -P \cdot \theta_1 \cdot (l - l_1) \quad \text{Ecuación 43}$$

El trabajo  $\Phi_N$  es el producto de una fuerza cualquiera  $N$  por el corrimiento en su dirección  $a_{21}$ , o sea:

$$\Phi_N = -N \cdot a_{21} \quad \text{Ecuación 44} \quad \text{Debido a que } a_{21} \text{ es negativo.}$$

Pero, además tenemos que:

$$a_{21} = \frac{\eta_{21}}{\cos \alpha} \quad \text{Ecuación 45}$$

$$\text{Y también } \eta_{21} = |\theta_1 \cdot l_s| + |\theta_1 \cdot (l - l_s)| = |\theta_1 \cdot l| \quad \text{Ecuación 46}$$

Reemplazando la ecuación 46 en la ecuación 45, y luego en la ecuación 44, nos queda:

$$\Phi_N = -N \cdot \frac{\theta_1 \cdot l}{\cos \alpha} \quad \text{Ecuación 47}$$

Y, reemplazando las ecuaciones 43 y 47 en la ecuación 42 nos queda la ecuación 48.

$$-N \cdot \frac{\theta_1 \cdot l}{\cos \alpha} - P \cdot \theta_1 \cdot (l - l_1) = 0 \quad \text{Ecuación 48}$$

De la ecuación 48 obtenemos la expresión de  $N$  siguiente:

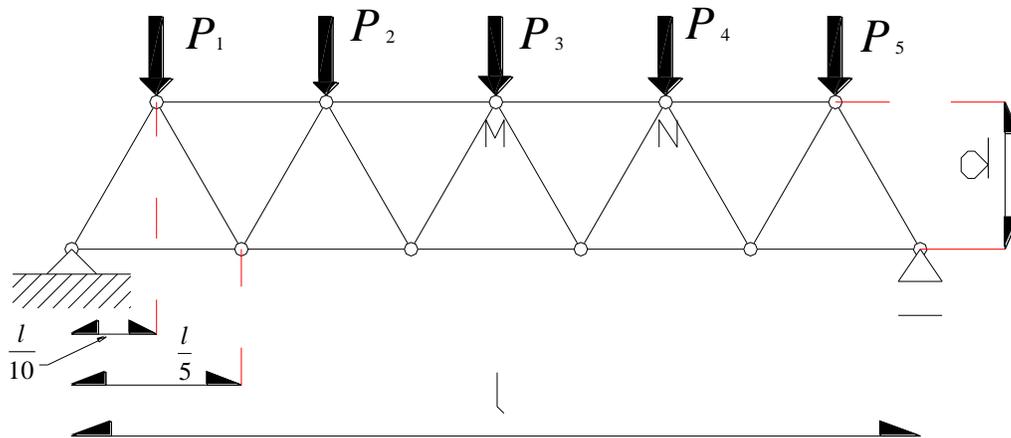
$$N = -P \cdot \cos \alpha \cdot \frac{l - l_1}{l}$$

El signo negativo se debe a que es un esfuerzo de compresión. Esta expresión es idéntica a la obtenida por reducción al baricentro de la sección  $s-s$ .

**Determinación del esfuerzo una barra de reticulado**

Considerando la viga de reticulado simplemente apoyada y sometida a un conjunto de cargas  $P_i$ , al que se le quiere calcular el esfuerzo de la barra  $MN$ , como se indica en la figura n° 38.

figura n° 38



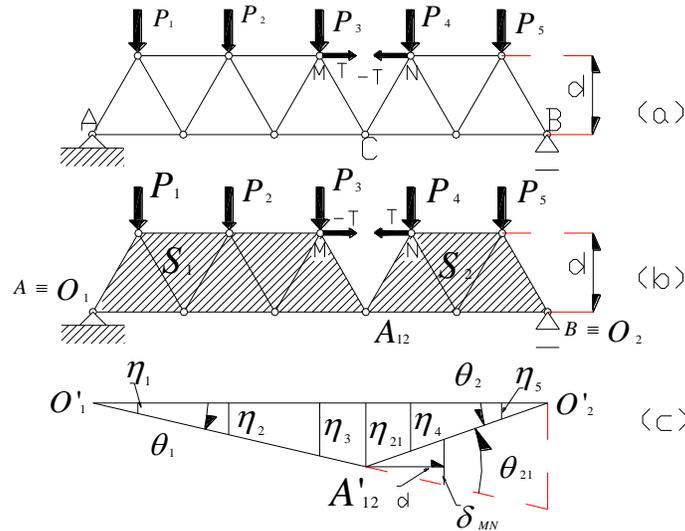
Para determinar el esfuerzo correspondiente de la barra  $MN$ , suprimimos la barra y reemplazamos la misma por dos fuerzas  $T$  y  $-T$  como se indica en la figura n° 39 a. estas fuerzas  $T$  y  $-T$  materializan un esfuerzo de tracción. Consecuentemente, el sistema se transforma en un mecanismo de chapas  $S_1$  y  $S_2$  articuladas en  $C$ .

Cuando damos un desplazamiento virtual positivo a la chapa  $S_1$ , las fuerzas  $P_1, \dots, P_5$  tendrán los corrimientos  $\eta_1, \dots, \eta_5$ , respectivamente, y la variación de distancia entre los puntos  $M$  y  $N$  será  $\delta_{MN}$ .

Por el principio de los trabajos virtuales, resulta:

$$\Phi = P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2 + P_3 \cdot \eta_3 + P_4 \cdot \eta_4 + P_5 \cdot \eta_5 + T \cdot (-\delta_{MN}) = 0 \quad \text{Ecuación 49}$$

figura n ° 39



Si la chapa  $S_1$ , de la figura n ° 39b experimenta un giro positivo  $\theta_1$ , alrededor del polo  $O_1 \equiv A$ , entonces, la chapa  $S_2$  experimentará un giro  $\theta_2$ , alrededor de  $O_2 \equiv B$ . Trazado el diagrama de corrimientos verticales en la forma conocida, como lo indica la figura n ° 39c, podemos determinar las siguientes magnitudes:

$$\text{Ecuaciones 50} \left\{ \begin{array}{l} \eta_1 = \theta_1 \cdot \frac{l}{10} \\ \eta_2 = \theta_1 \cdot \frac{3l}{10} \\ \eta_3 = \theta_1 \cdot \frac{l}{2} \\ \eta_4 = \theta_2 \cdot \frac{3l}{10} \\ \eta_5 = \theta_2 \cdot \frac{l}{10} \end{array} \right.$$

Además tenemos:

$$\delta_{MN} = \theta_{21} \cdot d \quad \text{Ecuación 51}$$

$$\theta_1 \cdot \frac{3l}{10} = \theta_2 \cdot \frac{2l}{10} \rightarrow \theta_2 = \frac{3}{2} \cdot \theta_1 \quad \text{Ecuación 52}$$

$\theta_{21} = -(\theta_1 + \theta_2)$  que, reemplazando expresiones obtenidas, nos queda :

$$\theta_{21} = -\frac{5}{2} \theta_1 \quad \text{Ecuación 53}$$

Como  $\theta_1 > 0$ ,  $\eta_i > 0$  y  $\delta_{MN} < 0$ .

Reemplazando la ecuación 53 en la ecuación 51, luego reemplazando estas expresiones y la ecuación 52 en la ecuación 49, nos queda:

$$P_1 \cdot \theta_1 \cdot \frac{l}{10} + P_2 \cdot \theta_1 \cdot \frac{3l}{10} + P_3 \cdot \theta_1 \cdot \frac{l}{2} + P_4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \theta_1 \cdot \frac{3l}{10} + P_5 \cdot \frac{3}{2} \cdot \theta_1 \cdot \frac{l}{10} + T \cdot \frac{5}{2} \cdot \theta_1 \cdot d = 0$$

Ecuación 54

De la ecuación 54 obtenemos la expresión de  $T$  que resulta:

$$T = -\frac{2P_1 \cdot l + 6P_2 \cdot l + 10P_3 \cdot l + 9P_4 \cdot l + 3P_5 \cdot l}{50d}$$

Esta expresión resulta ser el magnitud y signo el esfuerzo de la barra **MN**.

