Reglas de derivación

1) Derivada de la función constante

Cálculos auxiliares

$f(x) = k$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k-k}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{k-k}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$\boxed{f(x) = k \to f'(x) = 0}$$

$$\boxed{\text{Ejemplo: } f(x) = 2 \text{ , } f'(x) = 0}$$

2) Derivada de la función identidad

$f(x) = x$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$\boxed{f(x) = x \to f'(x) = 1x^0 = 1}$$

$$f(x) = x^3$$

$$\mathrm{f}'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x} = 3x^2$$

$$\boxed{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^3 \to \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = 3\boldsymbol{x}^2}$$

Vimos que la derivada de $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^2$ es $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = 2\mathrm{x}$

$$\boxed{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2 \to \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = 2x}$$

Generalización:

$\boxed{\text{Si } f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n.x^{n-1}}$

Exponente fraccionario

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

3) Derivada de la función exponencial

f(x) $= e^x$

1) Formamos el cociente incremental:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x} = \frac{e^x.e^{\Delta x}-e^x}{\Delta x} = \frac{e^x(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$$

El cálculo del límite del cociente incremental cuando $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x}(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \qquad \frac{\to 0}{\to 0}$$

Para el cálculo de este límite hacemos un cambio de variable

$$\boxed{e^{\Delta x} - 1 = z}$$

Utilizando esta expresión tenemos que reemplazar en la expresión del limite $\boldsymbol{\Delta x}$

Por lo tanto, despejamos $\boldsymbol{\Delta x}$

$$e^{\Delta x} - 1 = z \Leftrightarrow e^{\Delta x} = z + 1 \Leftrightarrow ln\, e^{\Delta x} = ln(z + 1) \Leftrightarrow \Delta x = ln(z + 1)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{z\to 0}\frac{e^{x}.\boxed{z}}{\boxed{ln(z+1)}}=e^{x}.\lim_{z\to 0}\frac{1}{\frac{ln(z+1)}{z}}=e^{x}.\frac{\lim\limits_{z\to 0}1}{\lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{z}ln(z+1)}=e^{x}.\frac{\lim\limits_{z\to 0}1}{\lim\limits_{z\to 0}ln(z+1)^{\frac{1}{z}}}=e^{x}.\frac{\lim\limits_{z\to 0}1}{ln\,\underbrace{\lim_{z\to 0}(z+1)^{\frac{1}{z}}}_{=e}}$$

$$=e^{x}.\frac{1}{ln\,e}=e^{x}$$

Escribimos: $\dfrac{z}{ln(z+1)}=\dfrac{1}{\frac{ln(z+1)}{z}}$

$$\boxed{f(x)=e^{x}\rightarrow f'(x)=e^{x}}$$

4) <u>Derivada de la función f(x)= ln x</u>

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ln(x+h)-ln(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} . \ln \frac{x+h}{x}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \ln \left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \ln[\lim_{\mathrm{h}\to 0} \left(\frac{\mathrm{x+h}}{\mathrm{x}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{h}}}] = \ln[\lim_{h\to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}] =$$

Vamos a cálculos auxiliares:

Recordando el límite notable : $\boldsymbol{\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = e}$

Si $z = \boldsymbol{\frac{h}{x}}$ *podemos decir* : h= z . x

$$\boldsymbol{f'(x)} = \ln [\lim_{z\to 0} (1+z)^{\frac{1}{z.x}}]=$$

$$=\ln[(\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}})^{\frac{1}{x}}] = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}.\ln \mathrm{e} = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{f(x) = ln\, x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}}$$

5) Derivada de la función f(x) = sen x

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{sen(x+\Delta x)-senx}{\Delta x}=\frac{2.sen(\frac{x+\Delta x-x}{2}).cos(\frac{2x+\Delta x}{2})}{\Delta x}$$

Cociente incremental

En esta expresión se utilizó la fórmula trigonométrica que transforma en producto la expresión

$$\boxed{sen\,p - sen\,q = 2.\,sen\left(\frac{p-q}{2}\right).\,cos\left(\frac{p+q}{2}\right)}$$

Esto nos permitirá aplicar propiedad de límites: límite de un producto y la propiedad notable de límite

$$\lim_{x\to a}\frac{senf(x)}{f(x)}=1$$

2) El cálculo del límite del cociente incremental cuando $\Delta x \to 0$

$$f\,`(x) = \lim_{\Delta x\to 0} 2.\frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}.2}.\lim_{\Delta x\to 0} cos\left(\frac{\Delta x+2x}{2}\right) = \text{cos x}$$

1

$$\boxed{f(x) = sen\,x \to f'(x) = \cos x}$$

6) Derivada de la función f(x) = cos x

$$\boxed{\cos p - \cos q = -2.\,sen\left(\frac{p-q}{2}\right).\,sen\left(\frac{p+q}{2}\right)}$$

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\cos(x+\Delta x) - cos x}{\Delta x} = \frac{-2.\,sen(\frac{x+\Delta x - x}{2}).\,sen\,(\frac{x+\Delta x + x}{2})}{\Delta x} =$$

$$= \frac{-2.\,sen\,(\frac{\Delta x}{2}).\,sen\,(\frac{2x+\Delta x}{2})}{\Delta x}$$

1

$$f\ '(x) = -2.\lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x \cdot \frac{1}{2}.2}.\lim_{\Delta x \to 0} sen\left(\frac{\Delta x + 2x}{2}\right) = \frac{-2}{2} \cdot sen\,x = -sen\,x$$

$$\boxed{f(x) = cos\,x \to f'(x) = \text{- sen x}}$$

7) Derivada de una constante por una función

$\mathrm{f(x) = k.\,g(x)}$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k.\,g(x+\Delta x) - k.\,g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k.\,(g(x+\Delta x) - g(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} k.\, \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x))}{\Delta x} = k.\, g'(x)$$

$$\boxed{f(x) = k\ g(x) \rightarrow f'(x) = \mathrm{k\ g'\ (x)}}$$

APLICANDO LA DEFINICION DE DERIVADA DE UNA FUNCIÒN PODEMOS ENCONTRAR SU DERIVADA O REGLA DE DERIVACIÒN .

Vamos a concentrar en una tabla las funciones y sus derivadas y otras reglas de derivación

Función	Función derivada	Función	Función derivada
k	0	ln x	$\frac{1}{x}$
x	1	Cos x	- Sen x
x^n	n.x^{n-1}	Sen x	Cos x
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	f(x) $\pm g(x)$	**f'(x)** $\pm g'(x)$
e^x	e^x	g(x) . f(x)	**f'(x). g(x) + f(x). g'(x)**
		$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$

Por definición de función derivada $$(f+g)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f+g)(x+\Delta x) - (f+g)(x)}{\Delta x} =$$

Por definición de suma de funciones:
(f+g) (x) = f(x)+g(x)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x) + g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} =$$

Por propiedad de límite :
$\lim_{x \to a} (f+g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) + g'(x)$$

La demostración de $(f-g)'(x)$ es análoga a la realizada.

PUSH

Para derivar el producto de estas dos funciones usando límites, supongamos que tenemos

$$T(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Entonces,

$$T'(x) = \frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x))$$

y podemos derivar esto de la siguiente manera:

$$T'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{T(x + h) - T(x)}{h}$$

Al sustituir la ecuación $\Upsilon(x) = f(x) \cdot g(x)$, tenemos:

$$T'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

Esto representa la derivada de un producto en términos de límites. Ahora, esta ecuación no se puede manipular algebraicamente fácilmente para llegar a la fórmula de la regla del producto que estamos tratando de demostrar.

Sin embargo, podemos sumar y restar $f(x+h)\cdot g(x)$ al numerador. Por lo tanto, tenemos

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x+h)\cdot g(x)+f(x+h)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)}{h}$$

Dado que $+f(x+h)\cdot g(x)-f(x+h)\cdot g(x)=0$, no cambiamos la expresión en absoluto.

Ahora, podemos factorizar $f(x+h)$ de los dos primeros términos y $g(x)$ de los dos últimos términos. Entonces, podemos dividir la expresión en dos partes y, simplificando, tenemos,

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot (g(x+h) - g(x))}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x) \cdot (f(x+h) - f(x))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} f(x+h) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \to 0} g(x) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Al aplicar las propiedades de los límites para resolver la ecuación, tenemos

$$= \lim_{h \to 0} f(x+h) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \to 0} g(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Los límites $\lim_{h \to 0} f(x+h)$ y $\lim_{h \to 0} g(x)$ pueden resolverse fácilmente. Cuando *h* tiende a cero, simplemente obtendremos $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente.

Los límites $\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ y $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ parecen más complicados, pero son simplemente las derivadas de $g(x)$ y $h(x)$ expresadas en límites. Por lo tanto, tenemos:

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f(x) \cdot \frac{d}{dx}(g(x)) + g(x) \cdot \frac{d}{dx}(f(x))$$

o podemos expresar esto simplemente como

$$\boxed{(fg)'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)}$$

que ahora es la fórmula de la regla del producto.

Ahora, vamos a utilizar la siguiente expresión:

$$T(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Entonces, tenemos,

$$T'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$$

Usando límites, podemos derivar $\Upsilon(x)$ por

$$T'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{T(x+h) - T(x)}{h}$$

Sustituyendo la ecuación $T(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, tenemos

$$T'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

Obteniendo el mínimo común denominador del numerador, tenemos

$$T'(x) \quad = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{g(x+h) \cdot g(x)}}{h}$$

Al aplicar las reglas de las fracciones, nuestra ecuación se puede reescribir como:

$$T'(x) \quad = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{g(x+h) \cdot g(x) \cdot h}$$

Ahora, podemos sumar y restar el producto de $f(x)$ y $g(x)$, que es $f(x)g(x)$, al numerador

$$f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h) g(x+h)$$

Por lo tanto, tenemos

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{g(x+h) \cdot g(x) \cdot h}$$

Dado que $+f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) = 0$, no cambiamos la ecuación en absoluto.

Reordenando la ecuación anterior, tenemos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x)}{g(x+h) \cdot g(x) \cdot h}$$

Ahora, podemos simplificar aún más la ecuación anterior factorizando el numerador:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x) \cdot (f(x+h) - f(x)) - f(x) \cdot (g(x+h) - g(x))}{g(x+h) \cdot g(x) \cdot h}$$

Entonces podemos reorganizar la ecuación de esta manera:

$$= \lim_{h \to 0}\left(\frac{1}{g(x+h) \cdot g(x)}\right) \cdot \left[\left(g(x) \cdot \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)\right) - \left(f(x) \cdot \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right)\right)\right]$$

para que podamos manipularla algebraicamente de la manera necesaria para demostrar la regla del cociente.

Al aplicar las propiedades de los límites para resolver la ecuación, tenemos

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{g(x+h) \cdot g(x)} \cdot \left[\lim_{h \to 0} g(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \to 0} f(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]$$

Entonces, podemos resolver los límites reconociendo que la primera parte de cada término es simplemente igual a las funciones $g(x)$ y $f(x)$ respectivamente y la segunda parte de cada término es la derivada en términos de límites de $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente. Por lo tanto, tenemos:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \left(\frac{1}{g(x) \cdot g(x)}\right) \cdot \left[\left(g(x) \cdot \frac{d}{dx}(f(x))\right) - \left(f(x) \cdot \frac{d}{dx}(g(x))\right) \right]$$

Simplificando algebraicamente, tenemos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\cdot\frac{d}{dx}(f(x)) - f(x)\cdot\frac{d}{dx}(g(x))}{(g(x))^2}$$

o puede ser simplemente ilustrado como

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}}$$

que ahora es la fórmula de la regla del cociente.