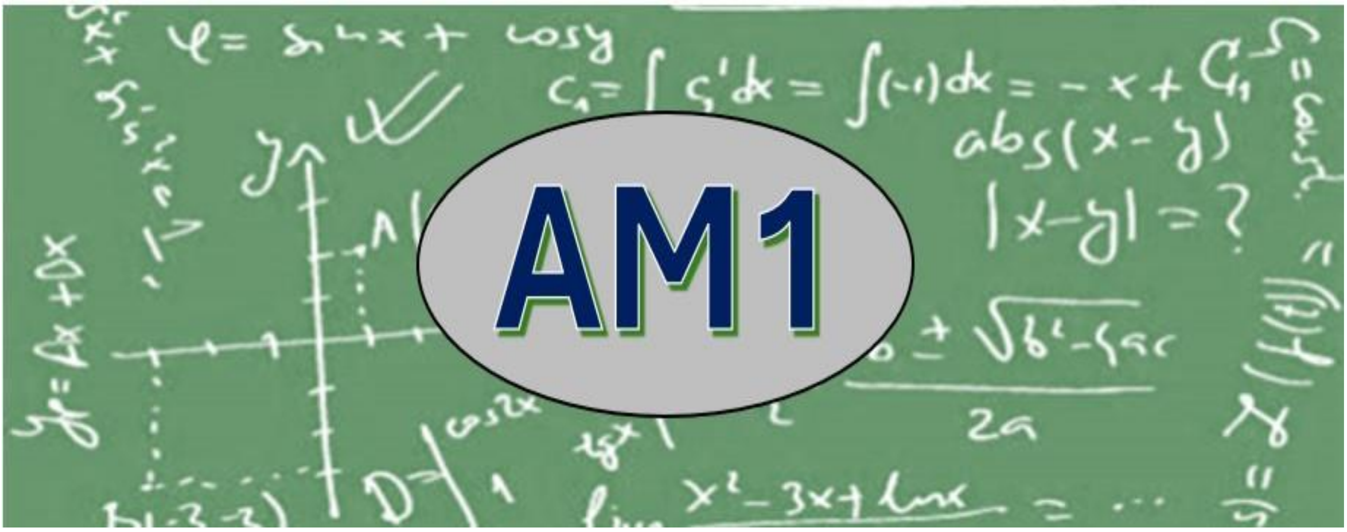


TRABAJO PRÁCTICO 3: DERIVADAS

ANÁLISIS MATEMÁTICO 1

MATERIAS BÁSICAS

UTN – Facultad Regional Haedo

TRABAJO PRÁCTICO 3: DERIVADAS

COMPETENCIAS

- Identificar, formular y resolver situaciones problemáticas que involucren distintos tipos de funciones y sus derivadas y/o diferenciales
- Utilizar de manera efectiva las técnicas y herramientas de la ingeniería
- Aprender en forma continua y autónoma, utilizando los recursos de trabajo en clase, bibliográficos, digitales y multimediales.
- Comunicar con efectividad sus producciones en forma escrita u oral, fundamentadas en el marco teórico correspondiente.

Tasa de Variación Media o Razón de Cambio promedio

La **tasa de variación media**, TVM, de una función, f(x), en un intervalo [x_0, x], es el cociente incremental:

$$T.V.M. = \frac{f(x) - f(x_{10})}{x - x_0} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Ej.1 Calcular la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2 - 5x$ entre $x = 1$ y $x = 3$. Interpretar geométricamente.

Respuesta: -1

Ej.2 Un avión se desplaza a 920 mi/h para recorrer 3500 millas que hay entre Hawái y San Francisco ¿En cuántas horas realiza el vuelo?

Respuesta: 3.8 hs

Ej. 3: Una piedra se cae desde un edificio de altura 150 m. Según la ley de caída libre la distancia recorrida por la piedra está dada por $s(t) = 4{,}9\ t^2 + 150$; donde t se mide en segundos y s en metros.

Hallar la velocidad media de la piedra en los intervalos a) [1;1,5]; b) [1;1.1]; c) [1; 1.01].

Respuesta: a) $v_m = 12.25$ m/s; b) $v_m = 10.29$ m/s; c) $v_m = 9.849$m/s

Cálculo de función derivada por definición

La derivada de una función es el límite del cociente incremental $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \qquad \text{con } Domf' \subseteq Domf$$

Siempre que exista ese límite para todo x ∈ Dom f

Ej.4 Obtener la función derivada. Determinar el domino de f y f '

$a)\ f(x) = k \quad b)\ f(x) = 3x \quad c)\ f(x) = x^2 \quad d) f(x) = \sqrt{x}$ e) $f(x) = sen\ x$

$f)\ f(x) = x^2 + 2x$ g) $f(x) = \frac{2}{3x-1}$

Respuesta: $a)\ f'(x) = 0\ ;\ b)\ f'(x) = 3\ ;\ c)\ f'(x) = 2x\ ;\ d)\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; e) $f'(x) = \cos x$

$f)\ f'(x) = 2x + 2 \quad ; g) f'(x) = \frac{-6}{(3x-1)^2}$

Cálculo de derivada en un punto por definición (razón de cambio instantánea o puntual)

Ej.5 Aplicando la definición de derivada en un punto calcular $f\,'(x_0)$ en el punto indicado:

a) $f(x)=2x^2$ en $x_0=-2$ b) $f(x)=\operatorname{sen} x$ en $x_0=\pi/2$ c) $f(x)=\ln x$ en $x_0=1$

d) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ en $x_0=0{,}5$

Respuesta: $a)\ f'(-2)=-8\,;b)\ f'\ (\pi/2)=0\,;c) f'(1)=1\,,d)\ f'(0{,}5)=-4$

Ej.6: Expresar el ritmo de cambio del volumen de un cubo respecto a su lado ***l***. Calcular el ritmo de cambio para ***l*** = 4 cm. Interpretar

Respuesta: $V\,'(\,l)\ =\ 3l^2\ ;V\,'(4)=48$

Ej.7: En el instante t = 0, un saltador se lanza desde un trampolín que está a 32 pies (ver figura). La posición del saltador está dada por: $s(t)=-16t^2+16t+32$ donde s se mide en pies y t en segundos.

a) ¿Cuánto tarda el saltador en llegar al agua? b) ¿Cuál es su velocidad al momento del impacto?

Respuesta: a) 2 seg. b) -48 pies/seg

Derivadas Laterales - Derivabilidad y Continuidad

Teorema: Si una función $y=f(x)$ es derivable en un punto x_0, entonces es continua en dicho punto.

Ej.9 Demostrar que la función $f(x)=|x-6|$ es continua en x = 6 y no es derivable en dicho punto. Encontrar una fórmula para $f\,'$. Graficar f y f' en un mismo par de ejes.

Respuesta: $f\,'(x)=\begin{cases}1 & si\quad x>6\\ -1 & si\quad x<6\end{cases}$

Ej.10 a) Graficar la función $f(x)=x.|x|$ y demostrar que es continua en su dominio

b) ¿Para cuáles valores de x es derivable f?

c) Encontrar una fórmula para f'

d) Graficar f 'junto con el gráfico de f.

Respuesta: $f\,'(x)=\begin{cases}2x & si\quad x\geq 0\\ -2x & si\quad x<0\end{cases}$

Ej. 11: Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la siguiente función en su dominio. Graficar la función y su derivada

a) $f(x)=\begin{cases}x+3 & si\quad x<-1\\ x^2 & si\quad -1\leq x\leq 2\\ x+2 & si\quad x>2\end{cases}$ b) $\begin{cases}-|x-3| & si\ x<3\\ |x-3|+1 & si\ x\geq 3\end{cases}$

Respuesta: a) discontinuidad esencial de salto finito en $x=-1$; No es derivable en $x\ =\ -1$ y en $x=2$. b) No es derivable en $x=\ 3$

Ej.12 a) Determinar los valores de "a" y "b" para que la función g(x) sea continua y derivable en [-2; 3].

Siendo $g(x)=\begin{cases}2ax+5 & x>2\\ bx^2+1 & x\leq 2\end{cases}$

b) Determinar los valores de "a" y "b" para que la función h(x) sea continua y derivable para todos los reales. Una vez calculados dichos valores determinar la función derivada de h(x) y graficar ambas funciones.

$$h(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x & x \leq 1 \\ bx + 1 & x > 1 \end{cases}$$

c)Determinar "a" y "b" en función de c para que la función sea derivable en $x = c$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq c \\ ax + b & x > c \end{cases}$$

d) Determinar "a" y "b" en función de c para que la función sea derivable en $x = c$:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & |x| \leq c \\ \dfrac{1}{|x|} & |x| > c \end{cases}$$

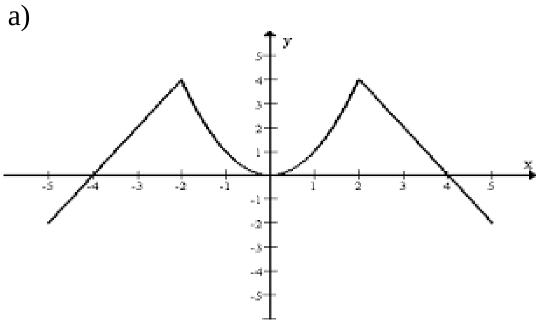
Respuesta: a) $a = -2; b = -1$; b) a = -1, b = 0; $c) a = 2c$; $b = -c^2$; d) $a = -\frac{1}{2c^3}$

$b = 3/(2c)$

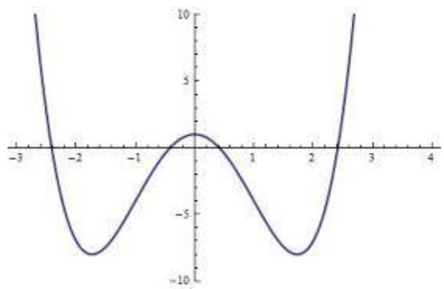
<u>Ej.13</u> Dada la gráfica de las siguientes funciones, indicar

- Los intervalos de positividad y negatividad de la función derivada, en relación con el signo de la pendiente de la recta tangente a la curva.
- Indique en cada caso, además, si existe algún punto donde la derivada sea nula o no exista.

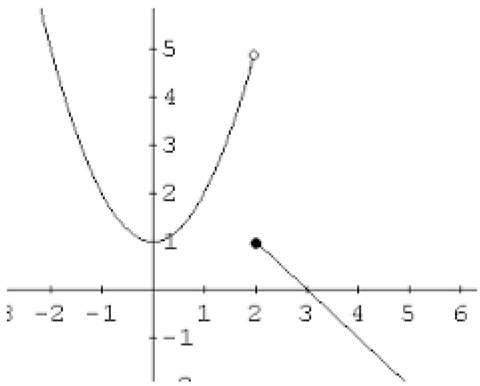
a)



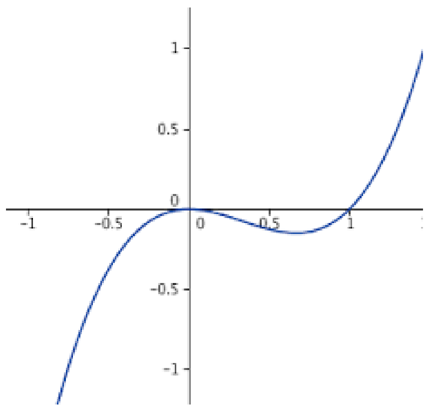
b)



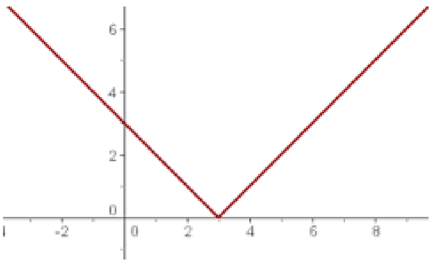
c)



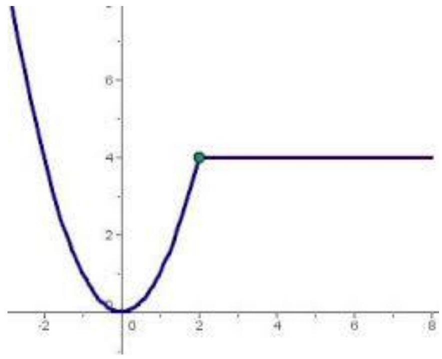
d)



e)



f)



Respuesta: Al final del TP

Cálculo de derivadas por reglas

Ej.14: Derivar las siguientes funciones, aplicando propiedades y reglas:

Suma algebraica		
$a) f(x) = x^5 + 3x^4 + 4$	$b) f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x^3}$	$c) f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 1}{5}$
$d) f(x) = 2ax^3 - \frac{b}{x}$	$e) f(x) = \frac{x}{m} - \frac{m}{b} + \frac{x^2}{n^2}$	$f) f(x) = e^x - 2\, ln\, x$
Producto y Cociente		
$g) f(x) = senx.\cos x$	$h) f(x) = (3x^2 + 5)(x - 1)$	$i) f(x) = xe^x$
$j) f(x) = 3x(\sqrt{x} + senx)$	$k) f(x) = tgx$	$l) f(x) = ctgx$
$m) f(x) = \frac{a - x}{a + x}$	$n) f(x) = \frac{ln\, x}{x}$	$o) f(x) = \frac{senx}{x}$
$p) f(x) = 2\, x\, cosec\, x$	$q) f(x) = \frac{1 + x}{1 - x}$	$r) f(x) = \frac{senx}{x^3 + 2}$
Función Compuesta		
a’) $f(x) = (2x^2 - 3)^2$	b’) $f(x) = \sqrt{x^2 + a^2}$	c’) $f(x) = cos\, \sqrt{x}$
d’) $f(x) = sen^2 x$	e’) $f(x) = ln\, cos\, x$	f’) $f(x) = cos(x^3 - 3x)$
g’) $f(x) = \ln sen^2\, x$	h’) $f(x) = e^{ln\, x}$	i’) $f(x) = \sqrt{ln(x^2)}$
j’) $f(x) = sen(cos\, x)$	k’) $f(x) = 2tg(e^{3x})$	l’) $f(x) = ln\, 2\, x + log\, 2 + log\, 2\, x$
ll’) $f(x) = e^{sh\sqrt{x}}$	m’) $f(x) = ln\, T\, h2x$	n’) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
o’) $f(x) = e^{(e^x)}$	p’) $f(x) = ln(ln\, x)$	q’) $f(x) = -\, ln\, cos\, x$

Respuesta: Al final del TP

Ej. 15: Supongamos que las funciones f y g y sus derivadas tienen los siguientes valores en $x = 2$ y $x = 3$.

x	f(x)	g(x)	f’(x)	g’(x)
2	8	2	1/3	-3
3	3	-4	2 π	5

Calcular las derivadas de las siguientes funciones en los valores dados de x:

a) $f(x).g(x) =$ para $x = 3$

b) $f(x) \,/\, g(x) =$ para $x = 3$

c) $f(g(x))=$ para $x = 2$

d) $\sqrt{(f(x))^2 + (g(x))^2}$ para $x = 2$

e) $(fog)\,(x) =$ para $x = 3$

f) $(gof)\,(x) =$ para $x = 3$

Respuesta: a) -8π + 15b); b) (-8π-15) /16; c) -1; d) $\frac{-10}{3\sqrt{68}}$; e) no se puede; f) 10π

<u>Rectas Tangente y Normal</u>

<u>**Ej.16**</u> Encontrar la ecuación de la tangente a la curva en el punto dado:

$$a)\ y = \sqrt{x} \quad (1;1) \quad ,b)\ y = \frac{x}{1-x} \quad (0;0) \quad ,c)\ y = \frac{1}{x^2} \quad (-2;\frac{1}{4})$$

Respuesta: $a) y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ $\quad b) y = x$ $\quad c) y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

<u>**Ej.17**</u> Determinar la ecuación de la recta normal de la función h(x) en el punto de abscisa $x = 1$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{-x^2+6x-8} & si \quad x \leq 3 \\ -2x^3 - x & si \quad x > 3 \end{cases}$$

Respuesta: $y = -9x + 28/3$

<u>**Ej.18**</u> Encontrar los puntos de la curva $y = x^3 - x^2 - x + 1$ donde la tangente es horizontal.

Respuesta: (1;0), Q $(-\frac{1}{3};\frac{32}{27})$

<u>**Ej.19**</u> Demostrar que la curva $y = 6x^3 + 5x - 3$ no tiene recta tangente con pendiente 4.

<u>**Ej.20**</u> ¿En qué punto sobre la curva $y = 1 + 2e^x - 3x$ la recta tangente es paralela a la recta $3x - y = 5$?

Respuesta: P$(ln\,3\,; 7 - 3.\,ln\,3)$

<u>**Ej.21**</u> Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ en el punto (-1; ½).

Respuesta: $y_t = \frac{1}{2}x + 1$

<u>**Ej.22**</u> ¿Para qué valores de x la gráfica de $f(x) = x + 2.\,senx$ tiene una tangente horizontal?

Respuesta: $\left\{x/x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi;\ x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\ ;\ k \in Z\right\}$

<u>**Ej.23**</u> Encontrar la pendiente de la recta tangente a $f(x) = 2 + 5.\,ln^2(3x)$ en $x_0 = {}^{e}/_{3}$.

Respuesta: $m_t = 30/e$

<u>**Ej.24**</u> ¿La recta normal a la parábola $y = x - x^2$ en el punto (1;0) se cruza con la parábola una segunda vez? Justifique su respuesta. Grafique.

Respuesta: Si, la recta normal cruza a la parábola por segunda vez en (-1; -2)

<u>**Ej.25**</u> Hay dos tangentes a la curva $y = 4x - x^2$ que pasan por el punto (2;5). Encontrar las ecuaciones de ambas.

Respuesta: $y_t = 2x + 1$, $y_t = -2x + 9$

Ej. 26 La recta tangente a la función $h(x)=\frac{bx+4}{x-2}$ en el punto de intersección con el eje de ordenadas sea paralela a la recta $y=-5/2x+4$.Hallar la ecuación de dicha recta tangente y graficar todo en un mismo par de ejes cartesianos.

Respuesta: $b=3;\ y=-5/2x-2$

Ej.27 Encontrar a,b y la recta normal en $x=-1$, si $f(x)=x^3+4ax+bx+4$ y la recta tangente en $x=-1$ es $2x-y+5=0$

Respuesta: $a=\frac{1}{4}; b=1; y_t=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

Derivación Logarítmica

Ej.28: ¿Qué operación con sus propiedades, es posible aplicar en las siguientes funciones, para poder derivarlas mediante las reglas estudiadas anteriormente? Lo que propone ¿sirve para todas las funciones indicadas?

$a) f(x)=x^x$ $\quad b) g(x)=x^{\ln x}$ $\quad c) h(x)=(senx)^x$ $\quad d) i(x)=e^{(x^x)}$
$e) k(x)=(Chx)^{x+1}$ $\quad f) p(x)=(2x^2)^{3x-1}$ $\quad g)\ g(x)=(4x^2+x)^{Cos(3x)}$

Respuesta: $\boldsymbol{a}) f'(x)=x^x(1+\ln x)$; $b) f'(x)=x^{\ln x}\left(2\frac{\ln x}{x}\right)$;
$c) f'(x)=(senx)^x(\ln senx + x\cot g\, x)$; $d) f'(x)=e^{(x^x)}x^x(1+\ln x)$
$e) f'(x)=(Chx)^{x+1}[\ln Chx+(x+1)Thx]$; $f) p'(x)=\left(3\ln(2x^2)+\frac{6x-2}{x}\right)(2x^2)^{3x-1}$
g) $g'(x)=\left(-3sen(3x)\ln(4x^2+x)+\frac{cos(3x)}{4x^2+x}(8x+1)\right)(4x^2+x)^{cos(3x)}$

Ej. 29: Determina la ecuación de la recta normal a la curva de ecuación $y=(1-2x)^{\frac{3x-1}{4}}$ en el punto de abscisa $x=0$.
Respuesta: $y=-2x+1$

Derivación en forma Implícita

Ej.30: Derivar respecto de *x* las siguientes expresiones en forma implícita:

$a) b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ $\quad b) y^3-3y+2ax=0$ $\quad c) y=cos(x+y)$
$d) cos(xy)=x$ $\quad e) x^2y-xy^2+x^2+y^2=0$ $\quad f) 3x.y-xy^3=3y$

Respuesta: a) y'=$-\frac{b^2x}{y.a^2}$; b)$y'=\frac{2a}{3(1-y^2)}$; c) $y'=\frac{sen\,(x+y)}{1+sen\,(x+y)}$; d) $y'=-\frac{1+sen\,(xy)}{x.sen\,(xy)}$
e) $y'=\frac{y^2-2xy-2x}{x^2+2y-2xy}$

Ej.31
a) Encontrar una ecuación de la recta tangente a la curva $y^2=x^3+3x^2$en el punto (1; -2).

b) ¿En cuáles puntos tiene tangente horizontal esta curva?

Respuesta: $a) y_t=-\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}; b)(-2;2);(-2;-2)$

Ej. 32: Determina los puntos de la curva $x^2-x.y+y^2=27$ en los que la tangente es horizontal, y aquellos en los cuales la tangente es vertical.

Respuesta: tangente horizontal (3,6) (-3,-6), tangente vertical (6,3), (-6,-3)

Ej.33 Encontrar todos los puntos de la curva $x^2y^2+xy=2$ donde la pendiente de la recta tangente es -1.

Respuesta: P (1;1); Q (-1; -1)

Ej.34 Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y^2 = 5x^4 - x^2$ en el punto (1;2).

Respuesta: $y = \frac{9}{2}x - \frac{5}{2}$

Derivada de Función Inversa

Ej.35 Derivar aplicando propiedades y reglas:

a) $f(x) = arcsen\,(2x-3)$ b) $f(x) = \frac{1}{ab}\,arctg(\frac{a}{b}.tg\,x)$ c) $f(x) = x^{arctg\,x}$

Respuesta:

a) $f\,'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}$; b) $f'(x) = \frac{sec^2 x}{b^2+a^2 tg^2 x}$; c) $f'(x) = \left(\frac{ln\,x}{1+x^2} + \frac{arctg\,x}{x}\right).x^{arctg\,x}$

Ej.36 Obtener $g\,'(2)$ sabiendo que g(x) es la inversa de $f(x) = 2x + ln\,x$

Respuesta: g' (2) = 1/3

Derivada Sucesiva

Ej.37 Encontrar la derivada segunda de las siguientes funciones:

$a)\ y = 5x^3$ $b)\ y = x.\ln x$ $c)\ y = x^2 senx$ $d)\ y = xe^x$

Respuesta:

$a)\ y'' = 30x$; b) $y'' = \frac{1}{x}$; c) $y'' = 2senx - x^2 sen\,x + 4x\cos x$ d) $y'' = e^x(1+x)$

Ej.38 Encontrar el punto de la curva en el que su derivada segunda es nula:

$a)\ y = x^3 - 2x$ $b)\ y = x + \frac{1}{x}$ $c)\ y = x^2\ln x$ $d)\ y = x^2 e^{-x}$

Respuesta:

$a)(0;0); b)\ no\ hay$; $c)\ (e^{-3/2}; -\frac{3}{2}e^{-3}); d)\ P_1\left((2+\sqrt{2}); (2+\sqrt{2})^2 e^{-(2+\sqrt{2})}\right)$

$y\quad P_2\left((2-\sqrt{2}); (2-\sqrt{2})^2 e^{-(2-\sqrt{2})}\right)$

Ej.39 Determinar si existe $f\,''(0)$ para $f(x) = x|x|$. Justificar.

Respuesta: No existe

Ej.40 Dada $h : \Re \to \Re \ / \ h(x) = \begin{cases} x^3 & x \le x_0 \\ ax^2 + bx + c & x > x_0 \end{cases}$

i) Indicar cuáles son las condiciones que se deben cumplir para que exista $h''(x_0)$.

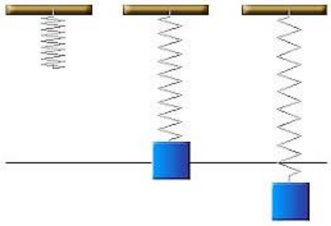
ii) Determinar a, b, c en función de x_0 de forma tal que exista $h''(x_0)$.

Respuesta: $ii)\ a = 3x_0$, $b = -3.x_0^2$, $c = x_0^3$

Problemas con aplicación a distintas ramas de la ingeniería

Ej.40: La posición de un resorte en movimiento vertical está dada por $f(t) = 4.cos(2t)$. Encontrar la posición del resorte cuando tiene:

a) velocidad cero;
b) velocidad máxima;
c) velocidad mínima.

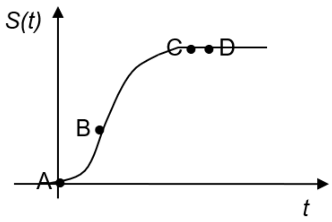


Respuesta: $a)\ t = \frac{k\pi}{2} con \quad k \in N_0\ f(\frac{k\pi}{2}) = (-1)^k 4;$

$b)\ t = \frac{3}{4}\pi + k\pi, k \in N_0 \quad f\left(\frac{3}{4}\pi + k\pi\right) = 0;\ c)\ t = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad f\left(\frac{1}{4}\pi + k\pi\right) = 0$

Ej.41: La gráfica muestra la curva que describe la posición de un automóvil en función del tiempo.
Usar la forma de la gráfica para explicar la respuesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la velocidad inicial del automóvil?
b) ¿El automóvil viaja más rápido en A o en B?
c) ¿Qué sucedió entre C y D?



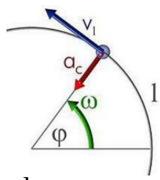
Respuesta: $a)\ v = 0; b)\ en \quad B; c)\ está \quad en \quad reposo: v = 0$

Ej.42: Un astronauta viaja de izquierda a derecha a lo largo de una trayectoria descripta por la función $f(x) = x^2$. Al desconectar el cohete en x=a se desplazará a lo largo de la tangente de la trayectoria en (a; f(a)).

a) ¿En qué punto debe desconectarse el cohete para alcanzar el punto P (4;9)? Y ¿Para el P (4; -9)?
b) Si el astronauta viaja siguiendo una trayectoria de $f(x) = x^3 - x$, ¿dónde debe desconectar el cohete para pasar por (2;2)?

Respuesta: a) $Q\left(4-\sqrt{7}; \left(4-\sqrt{7}\right)^2\right) \quad y \quad R(-1;1) \quad ; \quad b)\ S(1;0)$

Ej.43: La posición a través del tiempo, de una partícula que realiza un movimiento circular, está dada por la ecuación φ(t)= ½ t^2. ¿Cuál es la velocidad ω(t) y la aceleración a(t) angulares al cabo de 7 segundos?

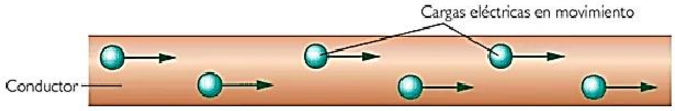


Respuesta: ω(7) =φ' (7) = 7 rad/seg; a (7) =φ'' (7) = 1 rad/seg^2

Ej. 44: Una mosca camina de izquierda a derecha a lo largo de la parte superior de la curva $y = 7 - x^2$. Una araña espera en el punto (4;0). Encontrar la distancia entre el insecto y el arácnido cuando se ven por primera vez.

Respuesta: $d = \sqrt{45}$

Ej.45: La cantidad de carga Q, (medida en Coulomb) que ha pasado por un punto de un alambre hasta el tiempo t (medido en segundos) se expresa con
$Q(t) = t^3 - 2t^2 + 6t + 2$.

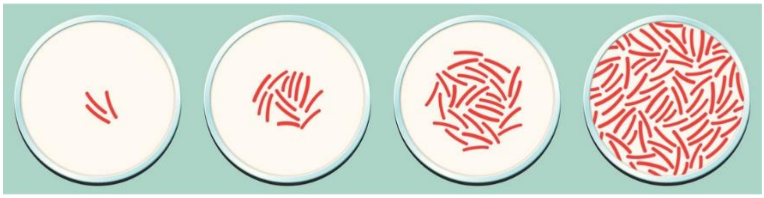


i) Encontrar la corriente cuando: t = 0,5 seg; t =1seg.

ii) La unidad de corriente es el ampere (1 A =1C/s); ¿cuándo es mínima la corriente?

Respuesta: $i)\ Q'(0{,}5seg) = \frac{19}{4}A, \quad Q'(1seg) = \ 5A \quad , \quad ii) Q'(t) es\ mín.\ para\ t = \frac{2}{3}seg$

<u>Ej.46</u>: Una población bacteriana tiene un crecimiento dado por la función
$p(t) = 5000+1000t^2$, siendo t el tiempo medido en horas.



Se pide:

i) La velocidad media del crecimiento,

ii) La velocidad instantánea de crecimiento,

iii) La velocidad de crecimiento instantáneo para t=10 horas.

Respuesta: i) $V_m=\Delta p/\Delta t= 2000\,t + 1000\,\Delta t$; ii) $V'(t)=2000t$; iii)20000 bact/h

<u>Ej. 47</u>: Debido a unas pésimas condiciones ambientales, una colonia de un millón de bacterias no comienza su reproducción hasta pasados dos meses. La función que representa la población de la colonia al variar el tiempo (expresado en meses) viene dada por:

$$f(t) = \begin{cases} 10^6 & si \quad 0 \leq t \leq 2 \\ 10^6 . e^{t-2} & si \quad t > 2 \end{cases}$$

Se pide:

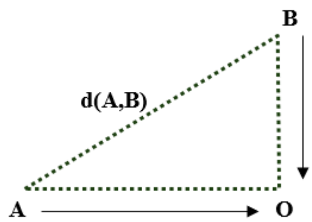
a) Verificar que la población es función continua del tiempo.
b) Calcular la tasa de variación media de la población en los intervalos [0;2] y [0;4].
c) Calcular la tasa de variación instantánea en t = 4 meses.

Respuesta: b_1) TVM f(t)=0 en [0;2] b_2) TVM f(t) $=\frac{10^6(e^2-1)}{4}$; c) $f'(4) = 10^6.e^2$

<u>Ej.48</u>: La ley de Boyle para los gases perfectos establece que a temperatura constante P. V=C donde P=P(t)es la presión, V=V(t)el volumen y C una constante.
Si la presión está dada por la expresión: $P(t) = 20 + 2t$ con P en cm de Hg, t en seg; y el volumen inicial es de 50 cm^3. Determinar la razón de cambio instantáneo del volumen V con respecto al tiempo t a los 10 segundos.

Respuesta: $V(t) = 1000/ (20+2t)$; $V'(10) = -2000 / (20+2.10)^2 = -1,25$ cm^3/seg (disminuye)

<u>Ej. 49</u>: Un controlador aéreo sitúa dos aviones (A y B) a la misma altitud, convergiendo en su vuelo hacia un mismo punto O en el ángulo recto.
El controlador detecta que el avión A viaja a 450 km/h y el avión B a 600 km/h.
a) ¿A qué ritmo varía la distancia entre los dos aviones, cuando A y B están a 150 km y 200 km, respectivamente, del punto O de convergencia?
b). ¿De cuánto tiempo dispone el controlador para situarlos en trayectorias distintas?



Respuesta: a) Disminuye a razón de 750 km/h; b) 20 min.

<u>DIFERENCIALES</u>

<u>Ej.50</u> Dada la función $y = x^2$, completar el siguiente cuadro:

x_0	Δx	Δy	dy	$\Delta y - dy$
1	0,1			
1	0,001			

1	0,00001			

Ej.51 Hallar las diferenciales de las siguientes funciones:

a) y = arctg (x/a); b) $y = x\, e^{x}$; c) y = ln sen x

Respuesta: $a) dy = \frac{a}{x^2+a^2}\, dx$; $b)\ dy = e^{x}\ (1+x)\ dx$; $dy = cotg\ x\ dx$

Ej.52 Calcular Δy ; dy para $y = \sqrt[3]{x}$ $si\ \ a)\ x_0 = 8,\ \Delta x = 0{,}1$; $b)\ x_0 = 64,\ \Delta x = 0{,}1$

Respuesta:
a) $\Delta y = 0{,}00829885;\ dy = 0{,}0083\ldots$;b) $\Delta y = 0{,}002082249$; $dy = 0{,}002083..$

Ej.53 Calcular en forma aproximada usando aproximación lineal y verificar con calculadora:

a) $\sqrt{82}$ b) $\sqrt{127}$ c) $e^{0,03}$ d) tan 46º e) sen 29º f) ln (2,82)

Respuesta: $a)\ \sqrt{82} \cong 9{,}05..;\ b)\ \sqrt{127} \cong 11,\overset{\frown}{27}\ ;c)\ e^{0,03} \cong 1{,}03$;
$d)\ tg46^{o} \cong 1{,}03\ ;e)\ sen29^{o} \cong 0{,}48;\ f)\ ln\, 2.82 \cong 1{,}037$

Ej.54 Encontrar la aproximación lineal de la función $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, en a = 0, y utilizarla para hallar aproximaciones de los números a) $\sqrt[3]{0{,}95}$ y $b)\sqrt[3]{1.1}$

Respuesta: a) 61/60; b) 31/30

Ej.55: Sea f una función tal que f (1) = 2, y cuya derivada se sabe que es $f'(x) = \sqrt{x^3+1}$,
Usar una aproximación lineal para estimar el valor de f (1,1).
Respuesta: $f(1{,}1) \cong \frac{1}{10}\sqrt{2}$ **+2**

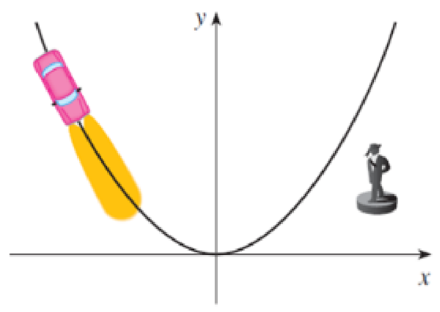
Ej.56: Calcular en forma aproximada la variación del volumen de un cubo cuando su arista x aumenta en un 1%.
Respuesta: $\Delta v = 0{,}03x^3$

Ej.57: Hallar la variación del área de un círculo si su radio es de 30 cm, y se mide dicho radio con un error del 10%.
Respuesta: $\Delta A = 180\pi$

Ej.58: Calcular de manera aproximada cuánto aumenta el lado de un cuadrado cuando su área pasa de 4 metros cuadrados a 4,1 metros cuadrados.
Respuesta: El lado del cuadrado pasa de 2 a 2,025 metros

EJERCICIOS INTEGRADORES DE LA UNIDAD 3

1) Un automóvil viaja durante la noche por una carretera en forma de parábola, con vértice en el origen. El auto parte de un punto 80 m en el Oeste y 80 m al Norte del origen y viaja en dirección Este. Hay una estatua ubicada 90 m al este y 50 m al norte del origen.



a) ¿En qué punto de la carretera los faros del automóvil iluminarán la estatua?

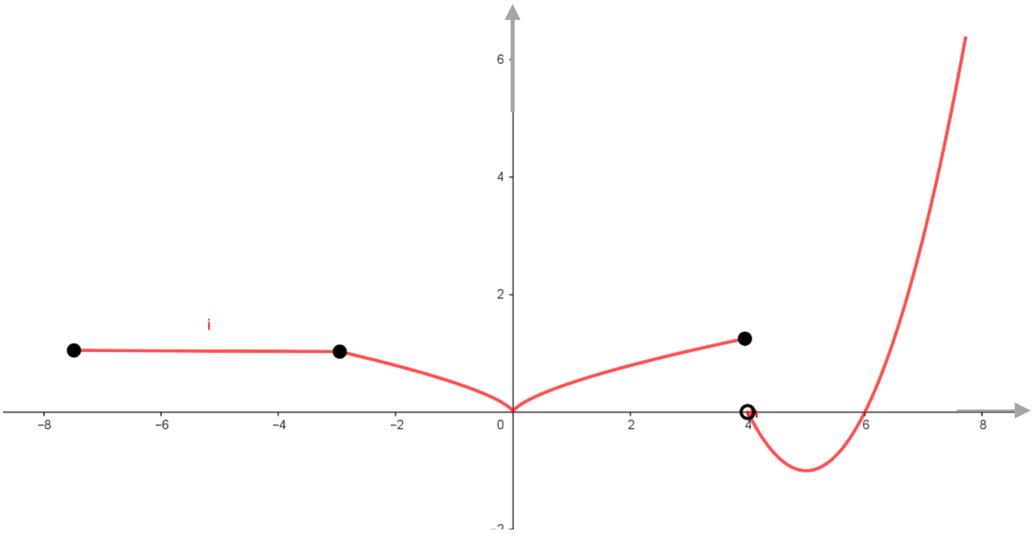
b) ¿Cuál es la distancia entre la estatua y el automóvil en el instante en que la ilumina?

2) Establecer los intervalos de continuidad y derivabilidad

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2 - e^{1/x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

3) Dada la gráfica de la siguiente función, indicar

- Los intervalos de positividad y negatividad de la función derivada, en relación con el signo de la pendiente de la recta tangente a la curva en cada punto.
- Indique en cada caso, además, si existe algún/os punto/s donde la derivada sea nula o no exista.



4) Sea g(x) una función derivable y positiva en su dominio. Sabemos que la ecuación de la recta tangente al gráfico de g en el punto de abscisa $x = \frac{e^2}{3}$ es $y = 9x - 2e^2$.

Si $f(x) = x.\ln[g(x)]$, hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en ese punto.

5) ¿Qué aumento experimenta el volumen de un cubo de 1 m de lado cuando por dilatación, este experimenta un aumento de 1 mm?

CAMBIOS EN UNA RELACION ENTRE DOS VARIABLES

TASA DE CAMBIO PROMEDIO

Si x e y están vinculadas por la relacion y=f(x), a una variación de x (Δx) corresponde una variación de y (Δy).

La tasa de cambio promedio/medio es una medida que representa cuánto cambio la función con respecto a la variación de x en un intervalo.

GEOMETRICAMENTE.

La pendiente de la recta secante que pasa por los extremos de un intervalo $[a, b]$, representa la tasa de cambio promedio de una función f en ese intervalo.

T.V.M

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m_s$$

TASA DE CAMBIO INSTANTANEO-DERIVADA

La **DERIVADA** de un función, es una **FUNCION** que representa algebraicamente el cambio de una función con relación al cambio infinitesimal (muy pequeño) de la variable independiente.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x); \boldsymbol{Dom\ f' \sqsubseteq Dom\ f}$$

Para todo x donde exista este límite.

GEOMETRICAMENTE

La pendiente de la recta tangente a la función en un punto $x = c$, representa **la tasa de cambio instantáneo** de la función f en ese punto, con respecto a la variable independiente.

La tasa de cambio instantánea o derivada en un punto mide cómo/cuánto cambia el valor de una función en respuesta a un cambio infinitesimal (muy pequeño) en su variable independiente.

$$\lim_{x \to c} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) = m_t$$

PROPIEDAD

*Si **f** es **derivable** en el punto **c**, entonces **f** es continua en **c**.*

Si **f NO** es **continua** en un punto c entonces **f NO** es **derivable** en c

Propiedades-Reglas de derivación

Suma $y = u + v$	$y' = u' + v'$	**Producto** $y = u\,v$	$y' = u'\,v + v'\,u$
Resta $y = u - v$	$y' = u' - v'$	**Cociente** $y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'\,v - v'\,u}{v^2}$

$y = k$	$y' = 0$		
$y = x$	$y' = 1$	$y = u$	$y' = u'$
$y = k\,x$	$y' = k$	$y = k\,u$	$y' = k\,u'$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = \frac{-1}{x^2}$	$y = \frac{1}{u}$	$y' = \frac{-u'}{u^2}$
$y = x^2$	$y' = 2\,x$	$y = u^2$	$y' = 2\,u\,u'$
$y = x^n$	$y' = n\,x^{n-1}$	$y = u^n$	$y' = n\,u^{n-1}\,u'$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^u$	$y' = u'\,e^u$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	$y = a^u$	$y' = u'\,a^u \ln a$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$

Método de derivación logarítmica

Se utiliza para

Funciones que sean potenciales y exponenciales a la vez.

$$\boldsymbol{y = [f(x)]^{g(x)}}$$

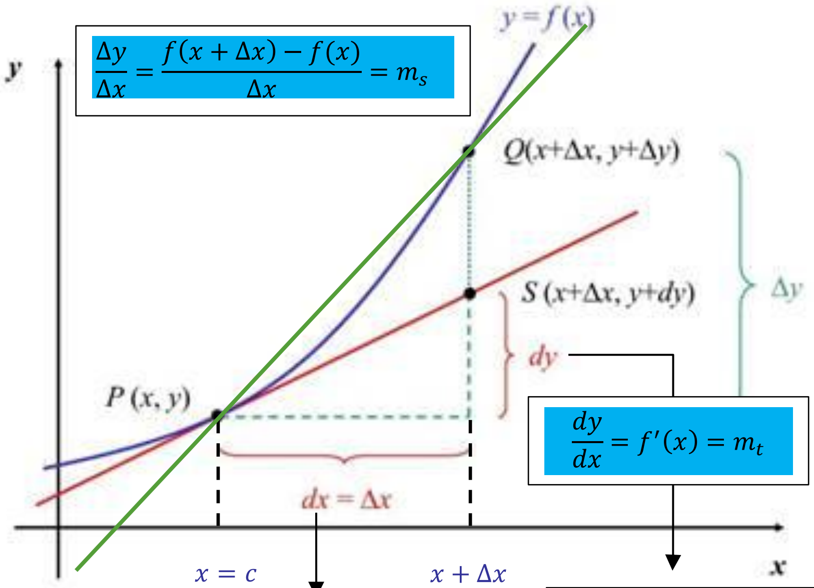
¿cómo aplicamos el método?

1.Aplicar logaritmos neperianos a ambos miembros de la ecuación.
2.Aplicar propiedades de los logaritmos
3.Derivar por separado ambos miembros de la ecuación, teniendo en cuenta que la «y» del primer miembro es una función compuesta y por tanto hay que multiplicar por su derivada y'
4.Despejar y'
5.Sustituir el valor de «y» por su valor, el cual lo obtenemos de la ecuación original

DIFERENCIAL DE UNA FUNCION

Características de la Diferencial de una Función y su Representación Gráfica

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = m_s$$



$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = m_t$$

La expresión **dx** representa un cambio infinitesimal en la variable independiente x, medido con recto a la recta tangente a la curva en c.

La expresión **dy** representa la variación de la función en un punto con respecto al cambio infinitesimal de la variable x, medida con respecto a la recta tangente a la curva en c.

$\frac{dy}{dx} = m_t$. El diferencial de y con respecto a x en un punto x=c representa el cambio en la función y=f(x) cuando nos movemos una cantidad infinitesimal dx a lo largo del eje x.

¿Cómo se calcula la Diferencial de una Función en un punto?

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{f'(x).dx = dy \rightarrow f'(c).dx = dy}$$

¿Qué representa la diferencial de una función?

Representa cómo cambia la función en un punto dado cuando la variable independiente experimenta un cambio infinitesimal. Este cambio se mide con respecto a la recta tangente a la curva en el punto $x = c$.

Concepto de la Diferencial de una Función

La diferencial de una función **es una aproximación lineal de la variación de la función** en un punto específico. Representa el cambio instantáneo (T.V.I) en el valor de la función cuando la variable independiente se incrementa en una cantidad infinitesimal (cantidad muy pequeña).

$$\boldsymbol{\Delta y \approx dy} \qquad \boldsymbol{\Delta x = dx}$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)dx \rightarrow f(x+\Delta x) \approx f'(x).dx + f(x)$$

ALGUNAS RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

Ej. 13

Función	$f' > 0$	$f' < 0$	$f' = 0$	$\nexists f'$
a)	(-∞, -2) U (0, 2)	(-2,0) U (2, +∞)	X=0	X=-2 y x=2
b)	(-2,0) U (2, +∞)	(-∞, -2) U (0, 2)	X=0, x=-2, x=2	-----------
c)	(0, 2)	(-∞, 0) U (2, +∞)	X=0	X=2
d)	(-∞, 0) U (0.7, +∞)	(0, 0.7)	X=0, x=0.7	------------
e)	(3, +∞)	(-∞, 3)	----------	X=0
f)	(0, 2)	(-∞, 0)	X=0, (2, +∞)	X=2

Ej. 14

$$a) f'(x) = 5x^4 + 12x^3; b) f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}; c) f'(x) = \frac{3x^2 - 2x}{5}$$

$$d) f'(x) = 6ax^2 + \frac{b}{x^2}; e) f'(x) = \frac{1}{m} + \frac{2x}{n^2}; f) f'(x) = e^x - \frac{2}{x}$$

$$g) f'(x) = cos^2 x - sen^2 x\ ; h) f'(x) = 9x^2 - 6x + 5; \quad i) f'(x) = e^x(x+1)$$

$$j) f'(x) = 3\left(\sqrt{x} + senx + \frac{x}{2\sqrt{x}} + x\cos x\right); k) f'(x) = sec^2 x$$

$$l) f'(x) = -\cos e\, c^2 x; m) f'(x) = -\frac{2a}{(a+x)^2} \quad ; \quad n) f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$o) f'(x) = \frac{\cos x \, . \, x - senx}{x^2}\ ; p) f'(x) = \frac{2(senx - x\cos x)}{sen^2 x}\ ; q) f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$$

$$r) f'(x) = \frac{(x^3 + 2)\cos x - 3x^2 senx}{(x^3+2)^2}$$

a') $f'(x) = 8x(2x^2 - 3)$

b') $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

c') $f'(x) = -\frac{sen\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

d') $f'(x) = sen(2x)$

e') $f'(x) = -tgx$

f') $f'(x) = -(3x^2 - 3).sen(x^3 - 3x)$

g') $f'(x) = 2\cot g\, x$

h') $f'(x) = 1$

i') $f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x^2}}$

j') $f'(x) = -senx.\cos(\cos x)$

k') $f'(x) = 6e^{3x} sec^2(e^{3x})$

l') $f'(x) = \frac{\ln 10 + 1}{x \ln 10}$

ll') $f'(x) = \frac{Ch\sqrt{x}.e^{Sh\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

m') $f'(x) = \frac{2}{Sh2x.Ch2x}$

n') $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

o') $f'(x) = e^x e^{(e^x)}$

p') $f'(x) = \frac{1}{x \ln x}$

q') $f'(x) = tgx$