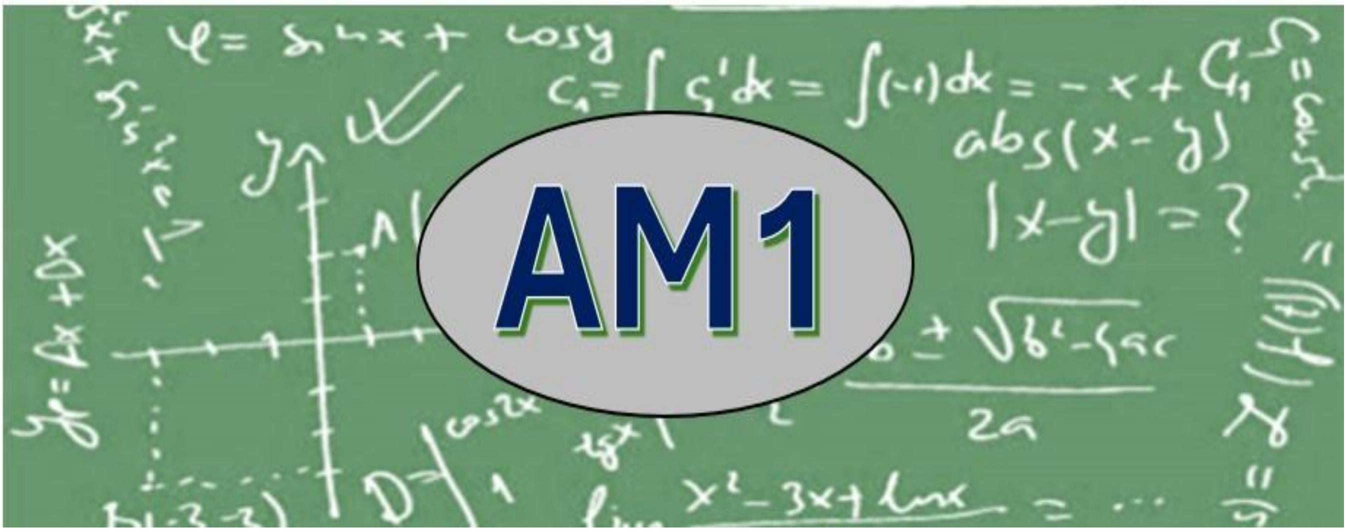


TRABAJO PRÁCTICO 3: DERIVADAS

ANÁLISIS MATEMÁTICO 1

UTN – Facultad Regional Haedo

TRABAJO PRÁCTICO 3: DERIVADAS

COMPETENCIAS

- ❖ Identificar, formular y resolver situaciones problemáticas que involucren distintos tipos de funciones y sus derivadas y/o diferenciales
- ❖ Utilizar de manera efectiva las técnicas y herramientas de la ingeniería
- ❖ Aprender en forma continua y autónoma, utilizando los recursos de trabajo en clase, bibliográficos, digitales y multimediales.
- ❖ Comunicar con efectividad sus producciones en forma escrita u oral, fundamentadas en el marco teórico correspondiente.

Tasa de Variación Media o Razón de Cambio promedio

La **tasa de variación media** de una función, f(x), en un intervalo [x_1, x_2], es el cociente incremental:

$$T.V.M. = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Ej. 3-01

Calcular la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2 - 5x$ entre $x = 1$ y $x = 3$. Interpretar geométricamente.

Ej. 3-02

Una piedra se cae desde un edificio de altura 150 m. Según la ley de caída libre la distancia recorrida por la piedra está dada por s(t) = 4,9 t^2, donde t se mide en segundos y s en metros.

Hallar la velocidad media de la piedra en los intervalos [1,1,5]; [1,1.1]; [1, 1.01].

Cálculo de función derivada por definición

Definición

Sea f una función definida en un intervalo. La **derivada de** f respecto de x es:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\text{con } Domf' \subseteq Domf$$

Esto ocurre, siempre que dicho límite exista. El resultado $f'(x)$ es **otra función**, llamada **función derivada** de f.

Ej.3-03

La posición de un móvil está dada por la función $s(t) = t^2$, donde s esta expresada en metros y t en segundos.

a) Escribir una expresión para la velocidad media del objeto en el lapso t=a y t=a+h
b) Determinar la distancia recorrida entre t=2 seg. y t=2.1 seg. ¿Cuál es la velocidad media en ese intervalo de tiempo?
c) Determinar la velocidad media en [2; t]
d) Escribir una expresión para la velocidad instantánea en el instante t=a
e) ¿Cuál es la velocidad instantánea en t=2seg?

Ej.3-04
Obtener la función derivada de las siguientes funciones, aplicando la definición. Determinar el dominio de la función derivada en cada caso:

$$a)\ f(x) = x^2 + 2x \qquad b)\ f(x) = \frac{2}{3x-1} \qquad c)\ f(x) = \sqrt{x+1}$$

Cálculo de la derivada en un punto por definición
Razón de cambio instantánea o puntual

Definición

Sea $f(x)$una función definida en un intervalo que contiene al punto x_0. Se dice que f **es derivable en** x_0 **si existe** el siguiente límite:

$$\boldsymbol{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} = m_t}$$

y ese valor se llama **derivada de** f**en** x_0.

Ej.3-05
Aplicando la definición de derivada en un punto calcular $f\,'(x_0)$ en el punto indicado:

a)$f(x) = x^2$ en $x_0 = 2$; b) $f(x) = senx$ en $x_0 = \pi/2$; c) $f(x) = lnx$ en $x_0 = 1$
d)$f(x) = \frac{1}{x}$ en $x_0 = 0{,}5$; e) $f(x) = \sqrt{x}$ en $x_0 = 4$

Ej.3-06
El Volumen de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Encuentre el área superficial S de la esfera si S es la razón de cambio instantánea del volumen con respecto al radio.

Ej.3-7
La energía potencial de un sistema masa-resorte cuando el resorte se estira una distancia de x unidades es $U(x) = \frac{1}{2}k\,x^2$, donde k es la constante elástica del resorte.
La fuerza ejercida sobre la masa es la variación instantánea de U(x) respecto de x. Encuentre la fuerza ejercida si la constante del resorte es N/m y la cantidad de estiramiento es ½ m.

Derivadas Laterales - Derivabilidad y Continuidad

Teorema: Derivabilidad implica continuidad
Si una función $y = f(x)$ es derivable en un punto x_0, entonces es continua en dicho punto.

Derivable en x_0 ⇒ Continua en x_0

El reciproco no es válido ya que si es continua en un punto no se puede asegurar que sea derivable en dicho punto.

Ej. 3-8
Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la siguiente función en su dominio. Graficar la función y su derivada

a) $f(x) = \begin{cases} x+3 & si \quad x < -1 \\ x^2 & si \quad -1 \leq x \leq 2 \\ x+2 & si \quad x > 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2-e^{1/x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

c) $h(x) = 2x + |3-x|$

d) $i(x) = x.|x|$

Ej.3-9
a) Determinar los valores de "a" y "b" para que la función g(x) sea continua y derivable en [-2; 3].

Siendo $g(x) = \begin{cases} 2ax+5 & x > 2 \\ bx^2+1 & x \leq 2 \end{cases}$

b) Determinar los valores de "a" y "b" para que la función h(x) sea continua y derivable para todos los reales. Una vez calculados dichos valores determinar la función derivada de h(x) y graficar ambas funciones.

$$h(x) = \begin{cases} ax^2+2x & x \leq 1 \\ bx+1 & x > 1 \end{cases}$$

c) Determinar "a" y "b" para que la función indicada sea derivable en todo su dominio

$$1)\ f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 2 \\ ax+b & x > 2 \end{cases}$$

$$2)\ f(x) = \begin{cases} ax^2+b & |x| \leq 1 \\ \frac{1}{|x|} & |x| > 1 \end{cases}$$

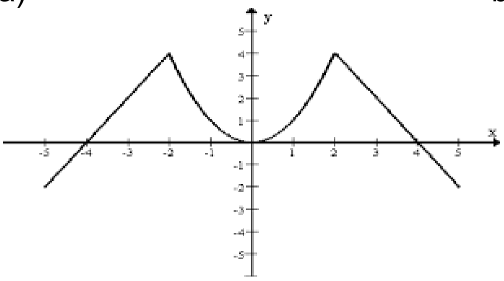
Ej.3-10

Dada la gráfica de las siguientes funciones, indicar

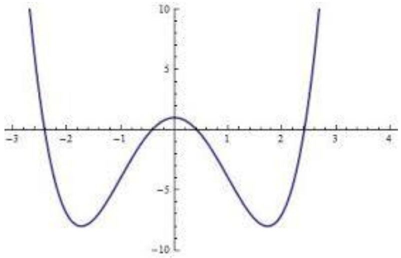
- Los intervalos de positividad y negatividad de la función derivada, en relación con el signo de la pendiente de la recta tangente a la curva.

- Indique en cada caso, además, si existe algún punto donde la derivada sea nula o no exista.

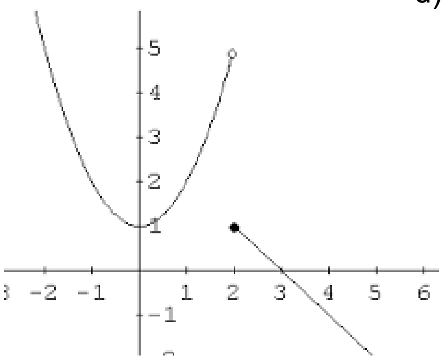
a)



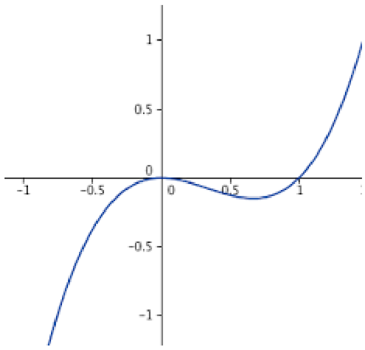
b)



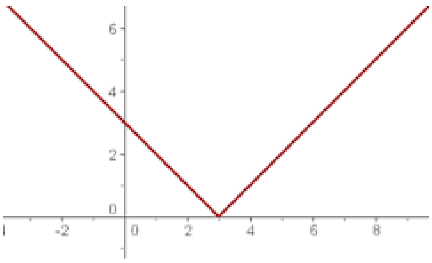
c)



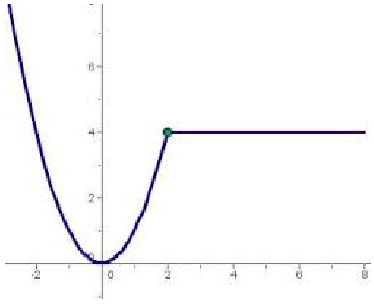
d)



e)



f)



Cálculo de derivadas por reglas de derivación

Ej.3-11

Derivar las siguientes funciones, aplicando propiedades y reglas:

Suma algebraica		
$a) f(x) = x^5 + 3x^4 + 4$	$b) f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x^3}$	$c) f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{5}$
$d) f(x) = 2ax^3 - \dfrac{x^2}{b} + \dfrac{1}{x}$	$e) f(x) = \dfrac{x}{m} - \dfrac{m}{b} + \dfrac{x^2}{n^2}$	$f) f(x) = e^x - 2\ln x$
Producto y Cociente		
$g) f(x) = senx.\cos x$	$h) f(x) = (3x^2 + 5)(x - 1)$	$i) f(x) = xe^x$

$j) f(x) = 3x(\sqrt{x} + senx)$	$k) f(x) = tgx$	$l) f(x) = ctgx$
$m) f(x) = \frac{a-x}{a+x}$	$n) f(x) = \frac{ln\, x}{x}$	$o) f(x) = \frac{senx}{x}$
$p) f(x) = 2x \cos e\, cx$	$q) f(x) = \frac{1+x}{1-x}$	$r) f(x) = \frac{senx}{x^3+2}$
Función Compuesta		
a') $f(x) = (2x^2-3)^2$	b') $f(x) = \sqrt{x^2+a^2}$	c') $f(x) = \cos\sqrt{x}$
d') $f(x) = sen^2 x$	e') $f(x) = \ln(\cos x)$	f') $f(x) = \cos(x^3-3x)$
g') $f(x) = \ln(s\, en^2 x)$	h') $f(x) = e^{\ln x}$	i') $f(x) = \sqrt{ln(x^2)}$
j')$f(x) = sen(\cos x)$	k') $f(x) = 2tg(e^{3x})$	l')$f(x) = ln\, 2\, x + log\, 2 + log\, 2\, x$
ll') $f(x) = e^{sh\sqrt{x}}$	m')$f(x) = ln\, T\, h2x$	n') $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$
o') $f(x) = e^{(e^x)}$	p') $f(x) = ln(\ln x)$	q')$f(x) = -\,ln\cos x$

Ej.3-12
Supongamos que las funciones f y g y sus derivadas tienen los siguientes valores en $x = 2$ y $x = 3$.

x	f(x)	g(x)	f'(x)	g'(x)
2	8	2	1/3	-3
3	3	-4	2 π	5

Calcular las derivadas de las siguientes funciones en los valores dados de x:

a) $f(x)\,.\,g(x)$ = para x=3

b) $f(x)\,/\,g(x)$ = para x=3

c) $f(g(x))$= para x = 2

d) $\sqrt{(f(x))^2+(g(x))^2}$ para x = 2

e) $(fog)\,(x)$ = para x=3

f) $(gof)\,(x)$ = para x=3

Rectas Tangente y Normal, Aplicaciones

Ej.3-13
Encontrar la ecuación de la tangente a la curva en el punto dado:

$$a)\ y = \sqrt{x} \quad (1;1) \quad ; \quad b)\ y = \frac{x}{1-x} \quad (0;0) \quad ; \quad c)\ y = \frac{1}{x^2} \qquad (-2;\frac{1}{4})$$

Ej.3-14

Determinar la ecuación de la recta normal de la función h(x) en el punto de abscisa $x = 1$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{-x^2+6x-8} & si \quad x \leq 3 \\ -2x^3 - x & si \quad x > 3 \end{cases}$$

Ej.3-15

Encontrar los puntos de la curva $y = x^3 - x^2 - x + 1$ donde la tangente es horizontal.

Ej.3-16

¿En qué punto sobre la curva $y = 1 + 2e^x - 3x$ la recta tangente es paralela a la recta $3x - y = 5$?

Ej.3-17

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$ en el punto (-1; ½).

Ej.3-18

¿Para qué valores de *x* la gráfica de $f(x) = x + 2.senx$ tiene una tangente horizontal?

Ej.3-19

Encontrar la pendiente de la recta tangente a $f(x) = 2 + 5.ln^2(3x)$ en $x_0 = {}^e/_3$.

Ej.3-20

¿La recta normal a la parábola $y = x - x^2$ en el punto (1;0) se cruza con la parábola una segunda vez? Justifique su respuesta. Grafique.

Ej.3-21

Hay dos tangentes a la curva $y = 4x - x^2$ que pasan por el punto (2;5). Encontrar las ecuaciones de ambas.

Ej.3-22

La recta tangente a la función $h(x) = \frac{bx+4}{x-2}$ en el punto de intersección con el eje de ordenadas es paralela a la recta $y = -5/2x + 4$.Hallar la ecuación de dicha recta tangente y graficar todo en un mismo par de ejes cartesianos.

Ej.3-23

Encontrar a y b y la recta normal en $x = -1$, si $f(x) = x^3 + 4ax^2 + bx + 4$ y la recta tangente en $x = -1$ es $2x - y + 5 = 0$

Ej.3-24

Sea $\boldsymbol{f}$ derivable y $\boldsymbol{g(x)=f\left(\frac{-x+1}{x^2+3}\right)}$, sabiendo que la recta tangente a $\boldsymbol{f(x)}$ en $(\boldsymbol{0},-\boldsymbol{16})$ tiene una inclinación de $\boldsymbol{135}°$. Hallar la ecuación de la recta tangente a $\boldsymbol{g}$ en $\boldsymbol{x = 1}$.

Ej.3-25

Sabiendo que la recta tangente a la curva $f(x)=\frac{kx^2-3}{-x+3}$ en $x=2$ es perpendicular a la recta $y=-\frac{1}{5}x-1$ y a su vez la recta tangente a $g(x)$ en $x=1$ es paralela a esa misma recta. Hallar $p'(2)$, siendo $p(x)=(gof)(x)$

Ej.3-26

Sea $\boldsymbol{p(x)=e^{(64x^2-1)}-4x^2.[f(2x)]^2}$con $\boldsymbol{f}$ continua y derivable en R. Se sabe que la recta $\boldsymbol{y+\frac{3}{8}=-\frac{1}{2}x}$ es la ecuación de la recta normal a $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x_0=\frac{1}{4}}$. Calcular la ecuación de la recta tangente a $\boldsymbol{p(x)}$ en $\boldsymbol{x_1=\frac{1}{8}}$

Ej.3-27

Sea $\boldsymbol{h(x)=4.f[ln(2x+2)]+e^{(2x+1)}}$,se sabe que la ecuación de la recta normal a la curva $\boldsymbol{y=f(x)}$ en el punto de abscisa $\boldsymbol{x=0}$ es $\boldsymbol{y=-\frac{x}{5}+4}$. Determinar la ecuación de la recta tangente a h(x) en $\boldsymbol{x=-\frac{1}{2}}$.

Derivación Logarítmica

Ej.3-28

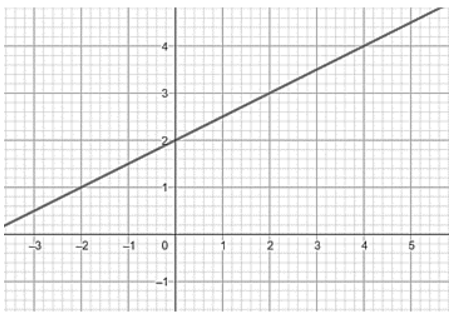
¿Qué operación con sus propiedades, es posible aplicar en las siguientes funciones, para poder derivarlas mediante las reglas estudiadas anteriormente? Lo que propone ¿sirve para todas las funciones indicadas?

$a)f(x)=x^x$ $\quad b)g(x)=x^{ln\,x}$ $\quad c)h(x)=(senx)^x$ $\quad d)i(x)=e^{(x^x)}$

$e)k(x)=(Chx)^{x+1}$ $\quad f)p(x)=(2x^2)^{3x-1}$ $\quad g)\ g(x)=(4x^2+x)^{Cos(3x)}$

Ej.3-29

Sea $\boldsymbol{h(x)=f(5x^2+3)^{\frac{g(3x)}{7}}}$con $\boldsymbol{f}$ continua, positiva y derivable en R. Se sabe que la recta $\boldsymbol{4y-16=x}$ es la ecuación de la recta tangente a $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x_0=8}$ y g es la función cuya gráfica es la siguiente:



Calcular el valor exacto del siguiente cálculo:

$$\left[h'(1)-\frac{3}{14}\sqrt{6}ln6\right].h(1)$$

Ej. 3-30

Determina la ecuación de la recta normal a la curva de ecuación $y = (1-2x)^{\frac{3x-1}{4}}$ en el punto de abscisa x=0.

Derivación en forma Implícita

Ej.3-31

Derivar respecto de *x* las siguientes expresiones en forma implícita:

$a) b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ $\quad b) y^3 - 3y + 2ax = 0$ $\quad c) y = cos(x+y)$

$d)\ cos(xy) = x$ $\quad e) x^2y - xy^2 + x^2 + y^2 = 0$ $\quad f) 3x.y - xy^3 = 3y$

Ej.3-32

a) Encontrar una ecuación de la recta tangente a la curva $y^2 = x^3 + 3x^2$ en el punto (1; -2).
b) ¿En qué puntos tiene tangente horizontal esta curva?

Ej. 3-33

Determina los puntos de la curva $x^2 - xy + y^2 = 27$ en los que la recta tangente es horizontal, y aquellos en los cuales la recta tangente es vertical.

Ej.3-34

Encontrar todos los puntos de la curva $x^2y^2 + xy = 2$ donde la pendiente de la recta tangente es -1.

Ej.3-35

Hallar los puntos de intersección de la curva $6y^3 - 3xy^2 - y = 4e^y x$ con el eje de ordenadas.
Demostrar que la recta tangente a la curva en el punto $Q = (0; y_0), y_0 < 0$, no es paralela a la recta $y = 2e^{\frac{-\sqrt{6}}{6}}x + 1$

Ej.3-36

Demostrar que la curva $x^2 lny + 6y - e^{(x-2)y} = 5$ en el punto (2;1) tiene una recta tangente paralela a $10y = x + 15$

Derivada de Función Inversa

Ej.3-37

Derivar aplicando propiedades y reglas:

$a) f(x) = \text{arcsen}(2x-3)$ $\quad b) f(x) = \frac{1}{ab}\text{arctg}(\frac{a}{b}\text{tg}\, x)$ $\quad c) f(x) = x^{\text{arcsen}\, x}$

Ej.3-38

Obtener $g'(2)$ sabiendo que g(*x*) es la inversa de $f(x) = 2x + ln\, x$

Ej.3-39

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y^2 = 5x^4 - x^2$ en el punto (1;2).

Ej.3-40

Sea p una función biyectiva, derivable y su recta tangente en $x = \frac{3}{5}$ es $y = 5x - 2$. Hallar g' (1) siendo $g(x) = p^{-1}(x).(2x^2 + 3)^x$

Ej.3-41

Sea g derivable, positiva y biyectiva en $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{h}$ derivable en $\boldsymbol{R}$ tal que tiene por recta tangente $\boldsymbol{y = -2x + 7}$ en $\boldsymbol{x = 3}$. Además $\boldsymbol{h(x) = (g(x))^{x^2}}$. Calcular $\boldsymbol{(g^{-1})'(1)}$ y la ecuación de la recta tangente a $\boldsymbol{g^{-1}}$ en el punto de abscisa $\boldsymbol{x = 1}$.

Derivada Sucesiva

Ej.3-42

Encontrar el punto de la curva en el que su derivada segunda es nula:

$a)\ y = x^3 - 2x$ $\quad b)\ y = x + \frac{1}{x}$ $\quad c)\ y = x^2 \ln x$ $\quad d)\ y = x^2 e^{-x}$

Ej.3-43

Dada $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\ /\ h(x) = \begin{cases} x^3 & x \leq 2 \\ ax^2 + bx + c & x > 2 \end{cases}$

i) Indicar cuáles son las condiciones que se deben cumplir para que exista *h*” (2).

ii) Determinar $a\ b\ y\ c$ de forma tal que exista *h*” (2).

Problemas con aplicación a distintas ramas de la ingeniería

Ej.3-44

Una explosión de dinamita lanza una roca pesada directamente hacia arriba con una velocidad inicial de $\mathbf{160}$ pies/seg. La roca alcanza una altura de $\boldsymbol{s(t) = 160t - 16t^2}$ pies después de $\boldsymbol{t}$ segundos.

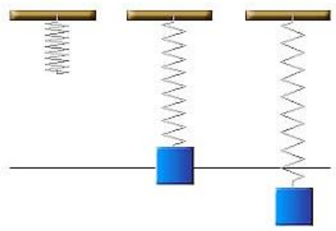
- **a)** ¿Cuál es la velocidad de la roca cuando está a $\mathbf{256}$ pies del suelo durante el ascenso? ¿Y durante el descenso?
- **b)** ¿Cuándo choca la roca contra el suelo? ¿Cuál es la velocidad en ese instante?
- **c)** ¿Qué distancia total recorre la roca desde que es lanzada hasta que llega al suelo?

Ej.3-45

Debido a unas pésimas condiciones ambientales, una colonia de un millón de bacterias no comienza su reproducción hasta pasados dos meses. La función que representa la población de la colonia al variar el tiempo (expresado en meses) viene dada por: $f(t) = \begin{cases} 10^6 & 0 \leq t \leq 2 \\ 10^6.e^{t-2} & si \quad t > 2 \end{cases}$

Se pide:
a) Verificar que la población es función continua del tiempo.
b) Calcular la tasa de variación media de la población en los intervalos [0;2] y [0;4].
c) Calcular la tasa de variación instantánea en t = 4 meses.

Ej.3-46
La posición de un resorte en movimiento vertical está dada por $f(t) = 4.cos(2t)$. Encontrar la posición del resorte cuando tiene:
a) velocidad cero;
b) velocidad máxima.
c) velocidad mínima.



Ej.3- 47
Un astronauta viaja de izquierda a derecha a lo largo de una trayectoria descripta por la función $f(x) = x^2$. Al desconectar el cohete en x=a se desplazará a lo largo de la tangente de la trayectoria en (a; f(a)).
a) ¿En qué punto debe desconectarse el cohete para alcanzar el punto P (4;9)? Y ¿Para el P (4; -9)?
b) Si el astronauta viaja siguiendo una trayectoria de $f(x) = x^3 - x$, ¿dónde debe desconectar el cohete para pasar por (2;2)?

Ej.3-48
Un huevo cocido a $\mathbf{98ºC}$ se sumerge en agua cuya temperatura es de $\mathbf{18ºC}$. Según la ley de enfriamiento de Newton, el huevo se enfría de acuerdo con la ley $\boldsymbol{C(t) = 18 + 80\ e^{-kt}}$donde $\boldsymbol{t}$ es el tiempo en minutos y $\boldsymbol{k}$ una constante a determinar.
Después de $\mathbf{5}$ minutos, la temperatura del huevo es de $\mathbf{38ºC}$.
a) ¿Cuánto tardará la temperatura del huevo en llegar a los $\mathbf{20ºC}$?
b) Calcular la velocidad en la que se está enfriando el huevo en el instante calculado anteriormente.
c) Mostrar que la velocidad de enfriamiento va tendiendo a $\mathbf{0}$ conforme avanza el tiempo.

Ej.3-49
Una señal digital modulada se describe mediante el siguiente modelo: $\boldsymbol{S(t) = 2.\mathrm{sen}(4\pi t)}$. Donde $\boldsymbol{S}$ es el voltaje en voltios y $\boldsymbol{t}$ el tiempo de transmisión de la señal en segundos.
a) Calcular la velocidad de variación instantánea de la señal para cualquier instante "$\boldsymbol{t}$". Y luego para $\boldsymbol{t} = \mathbf{8}$ seg.
b) Indicar cuál es el valor máximo de la velocidad instantánea de la señal.

DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÒN

Ej.3-50

Dada la función $y = x^2$, completar el siguiente cuadro:

x_0	Δx	Δy	dy	$\Delta y - dy$
1	0,1			
1	0,001			
1	0,00001			

Ej.3-51

Hallar las diferenciales de las siguientes funciones:

a) y = arctg (x/a); b) $y = x\ e^{x}$; c) y = ln sen x

Ej.3-52

Calcular $\Delta y\ ;\ dy$ para $y = \sqrt[3]{x}$ $\quad si\ \ a)\ x_0 = 8,\ \Delta x = 0{,}1 \quad ;\ b)\ x_0 = 64,\ \Delta x = 0{,}1$

Ej.3-53

Calcular en forma aproximada usando aproximación lineal y verificar con calculadora:

a) $\sqrt{82}$ b) $\sqrt{127}$ c) $e^{0{,}03}$ d) tg 46º e) sen 29º f) ln (2,82)

Ej.3-54

Encontrar la aproximación lineal de la función $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, en a = 0, y utilizarla para hallar aproximaciones de los números $\sqrt[3]{0{,}95}$ $\ y\ $ $\sqrt[3]{1.1}$

Ej.3-55

Calcular en forma aproximada la variación del volumen de un cubo cuando su arista x aumenta en un 1%.

Ej.3-56

Hallar la variación del área de un círculo si su radio es de 30 cm, y se mide dicho radio con un error del 10%.

Ej.3-57

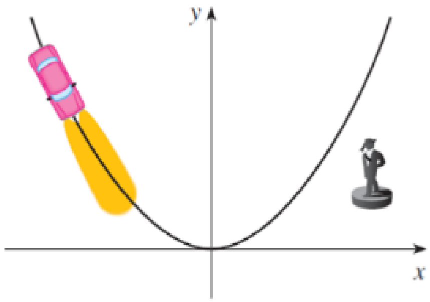
Calcular de manera aproximada cuanto aumenta el lado de un cuadrado cuando su área pasa de 4 metros cuadrados a 4,1 metros cuadrados.

Ej.3-58

¿Qué aumento experimenta el volumen de un cubo de 1 m. de lado cuando por dilatación, este experimenta un aumento de 1 mm.?

EJERCICIOS INTEGRADORES DE LA UNIDAD 3

Ej.1)
Un automóvil viaja durante la noche por una carretera en forma de parábola, con vértice en el origen. El auto parte de un punto 80 m en el Oeste y 80 m al Norte del origen y viaja en dirección Este. Hay una estatua ubicada 90 m al este y 50 m al norte del origen.



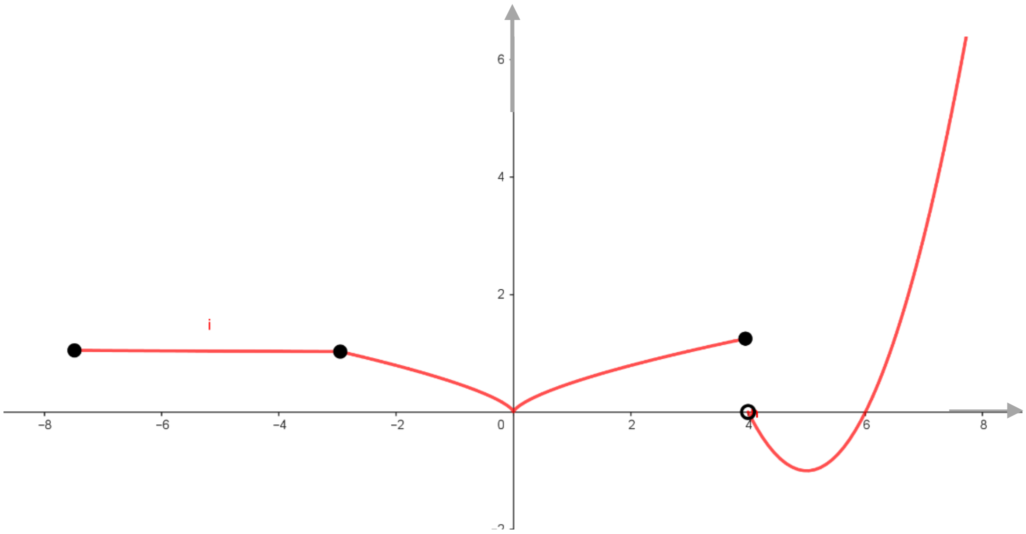
a) ¿En qué punto de la carretera los faros del automóvil iluminarán la estatua?
b) ¿Cuál es la distancia entre la estatua y el automóvil en el instante en que la ilumina?

Ej.2)
Sea q una función biyectiva, derivable y su recta tangente en $x = \frac{5}{6}$ es $y = 6x - 1$. Hallar h' (4) siendo $h(x) = q^{-1}(x).(\frac{1}{2}x^2 - 6)^x$

Ej.3)
Responder con verdadero o falso. Justificar las respuestas. En el caso que sea falta se puede proponer un contraejemplo.

a) Si $f'(r)$ existe, entonces $\lim_{x \to r} f(x) = f(r)$
b) La tangente a una curva en un punto no puede cortar a la curva en otro punto.
c) Si $f'(x) = g'(x)\ \forall\ x \quad \Rightarrow \quad f(x) = g(x) \quad \forall\ x$.
d) La expresión $\lim_{x \to \pi/2} \frac{sen x - 1}{x - \pi/2}$ es la derivada de $f(x) = sen\, x$ cuando $x = \pi/2$.
e) Si $y = ax + b$, entonces $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$

Ej.4)
Dada la gráfica de la siguiente función, indicar
- Los intervalos de positividad y negatividad **de la función derivada**, en relación con el signo de la pendiente de la recta tangente a la curva en cada punto.
- Indique en cada caso, además, si existe algún/os punto/s donde la derivada sea nula o no exista.



Ej.5)
Sea g(x) una función derivable y positiva en su dominio. Sabemos que la ecuación de la recta tangente al gráfico de g en el punto de abscisa $x = \frac{e^2}{3}$ es $y = 9x - 2e^2$.
Si $f(x) = x.\ln[g(x)]$, hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en ese punto.

Ej.6)
¿Qué aumento experimenta el volumen de un cubo de 1 m de lado cuando por dilatación, este experimenta un aumento de 1 mm?

ALGUNAS RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

Ej. 3-01 T.V.M.= -1

Ej.3-02 En [1,1.5] v_m = 12.25 m/s, en [1, 1.1] v_m = 10.29 m/s; en [1, 1.01] v_m = 9.849m/s

Ej. 3-03 a) vm=2a+h; b) d=0.41 m; c) vm=4.1 m/s; d) $V_{inst} = 2a$; e) V_{inst}=4m/s

Ej.3-04 $a)\ f'(x) = 2x + 2$; $b) f'(x) = \frac{-6}{(3x-1)^2}$; $c) f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

Ej.3-05 $a)\ f'(-2) = -8$; $f'(\pi/2) = 0$; $c) f'(1) = 1$; $d) f'(0{,}5) = -4$;
e) f' (4) =1/4

Ej.3-06 $S = 4\pi r^2$

Ej. 3-07 F= 15 N

Ej.3-08 a) f es continua en R salvo en x = -1 donde tiene una discontinuidad esencial de salto finito$D_{f'} = R - \{-1,2\}$.
En x = -1 f no es derivable pues no es continua. En $x = 2$ las derivadas laterales son distintas:$f'(2^-) = 4 \quad f'(2^+) = 1$
b) g es continua en x = 0 y no derivable.$f'(0^-) = \frac{1}{2} \quad f'(0^+) = 0$

c) h es continua en $\mathcal{R}$. En x= 3 las derivadas laterales son distintas $f'(3^-) = 1 \quad f'(3^+) = 3$

d) Derivable y continua en $\mathcal{R}$

Ej.3-09 a) $a = -2$; $b = -1$; b) a= -1, b = 0; c) 1) $a = 4$; $b = -4$;
2) $a = -1/2 \quad b = 3/2$

Ej.3-10

función	f'>0	f'<0	f'=0	∄f'
a)	(-∞, -2) U (0, 2)	(-2,0) U (2, +∞)	x= 0	x= -2 y x=2
b)	(-2,0) U (2, +∞)	(-∞, -2) U (0, 2)	x=0, x=-2, x=2	-----------
c)	(0, 2)	(-∞, 0) U (2, +∞)	x=0	x=2
d)	(-∞, 0) U (0.7, +∞)	(0, 0.7)	x=0, x=0.7	------------
e)	(3, +∞)	(-∞, 3)	----------	x=0
f)	(0, 2)	(-∞, 0)	x=0, (2, +∞)	x=2

Ej.3-11

$a) f'(x) = 5x^4 + 12x^3$; $b) f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}$; $c) f'(x) = \dfrac{3x^2 - 2x}{5}$

$d) f'(x) = 6ax^2 - \dfrac{2x}{b} - \dfrac{1}{x^2}$; $e) f'(x) = \dfrac{1}{m} + \dfrac{2x}{n^2}$; $f) f'(x) = e^x - \dfrac{2}{x}$

$g)f'(x) = cos^2 x - sen^2 x$; $h)f'(x) = 9x^2 - 6x + 5$; $i)f'(x) = e^x(x+1)$

$j)f'(x) = 3\left(\sqrt{x} + senx + \frac{x}{2\sqrt{x}} + x\cos x\right)$; $k)f'(x) = sec^2 x$

$l)f'(x) = -\cos e\, c^2 x$; $m)f'(x) = -\frac{2a}{(a+x)^2}$; $n)f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

$o)f'(x) = \frac{\cos x \,.x - senx}{x^2}$; $p)f'(x)\frac{2(senx - x\cos x)}{sen^2 x}$;

$q)f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$

$r)f'(x) = \frac{(x^3+2)\cos x - 3x^2 senx}{(x^3+2)^2}$;

a') $f'(x) = 8x(2x^2 - 3)$
b') $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$
c') $f'(x) = -\frac{sen\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$
d') $f'(x) = sen(2x)$
e') $f'(x) = -tgx$
f')$f'(x) = -(3x^2 - 3).sen(x^3 - 3x)$
g') $f'(x) = 2\cot g\, x$
h') $f'(x) = 1$
i') $f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x^2}}$
j')$f'(x) = -senx.\cos(\cos x)$
k') $f'(x) = 6e^{3x} sec^2(e^{3x})$
l') $f'(x) = \frac{\ln 10 + 1}{x \ln 10}$
ll') $f'(x) = \frac{Ch\sqrt{x}.e^{Sh\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$
m') $f'(x) = \frac{2}{Sh2x.Ch2x}$
n') $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
o') $f'(x) = e^x e^{(e^x)}$
p') $f'(x) = \frac{1}{x \ln x}$
q') $f'(x) = tgx$

Ej. 3-12 a) $-8\pi + 15$; b) $(-8\pi - 15)/16$; c) -1; d) $\frac{-10}{3\sqrt{68}}$; e) no se puede; f) 10π

Ej. 3-13 $a) y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ $b) y = x$ $c) y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

Ej. 3-14 $y = -9x + 28/3$

Ej.3-15 P (1;0), Q $(-\frac{1}{3}; \frac{32}{27})$

Ej.3-16 P$(\ln 3 ; 7 - 3.\ln 3)$

Ej.3-17 $y_t = \frac{1}{2}x + 1$

Ej.3-18 $\left\{x/x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi;\ x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\ ;\ k \in Z\right\}$

Ej.3-19 $m_t = 30/e$

Ej.3-20 Si, la recta normal cruza a la parábola por segunda vez en (-1; -2)

Ej.3-21 $y_t = 2x + 1$, $y_t = -2x + 9$

Ej.3-22 $b = 3; y = -5/2x - 2$

Ej.3-23 $a = \frac{1}{4}$, $b = 1$, $y_t = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

Ej.3-24 $y_t = -\frac{1}{4}x - \frac{63}{4}$

Ej.3-25 k=1 p´ (2) =-1

Ej.3-26 $y_t = \frac{63}{8}x$

Ej.3-27 y_t=42x+38

Ej.3-29 5/4

Ej.3-30 $y = -2x + 1$

Ej. 3-31

$a) y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$; $b) y' = \frac{2a}{3(1-y^2)}$; $c) y' = -\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{1+\operatorname{sen}(x+y)}$;

$d) y' = -\frac{1 + y\operatorname{sen}(xy)}{x\operatorname{sen}(xy)}$; $e) y' = \frac{y^2 - 2xy - 2x}{x^2 + 2y - 2xy}$

f) $y' = \frac{y^3 - 3y}{3x - 3xy^2 - 3}$

Ej.3-32 $a) y_t = -\frac{9}{4}x + \frac{1}{4}$ $b) (-2; 2)$ $(-2; -2)$

Ej.3-33 Tangente horizontal (3,6) (-3,-6), tangente vertical (6,3), (-6,-3)

Ej.3-34 P (1;1); Q (-1; -1)

Ej.3-35 $(0;0), \left(0; \frac{\sqrt{6}}{6}\right), \left(0; -\frac{\sqrt{6}}{6}\right); y'\left(0; -\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = 2e^{\frac{-\sqrt{6}}{6}} + \frac{1}{4}$

Ej.3-36 Como la pendiente de la curva en (2, 1) es 1/10y coincide con la pendiente de la recta $10y = x + 15$, queda demostrado que la recta tangente es paralela a dicha recta.

Ej.3-37 a) $y' = \frac{2}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}$; b) $y' = \frac{1}{b^2 cos^2 x + a^2 sen^2 x}$;

c) $y' = x^{arc\,sen\,x}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{arc\,sen\,x}{x}\right)$

Ej.3-38 g' (2) = 1/3

Ej.3-39 $y = 4{,}5x - 2{,}5$

Ej.3-40 $g'(1) = \frac{17}{5} + 3ln5$

Ej.3-41 $\boldsymbol{(g^{-1})'(1) = -\frac{9}{2}}$ $\boldsymbol{y_t = -\frac{9}{2}x + \frac{15}{2}}$

Ej.3-42 a) $)(0;0)$; $b)\ no\ hay$; $c)\ (e^{-3/2}; -\frac{3}{2}e^{-3})$;

$d)\ P_1\left((2+\sqrt{2}); (2+\sqrt{2})^2 e^{-(2+\sqrt{2})}\right)$ y $P_2\left((2-\sqrt{2}); (2-\sqrt{2})^2 e^{-(2-\sqrt{2})}\right)$

Ej. 3-43 a = 6, b = -12, c = 8

Ej. 3-44 a) v(t) = s'(t) = 160 - 32t.

En el ascenso (t = 2): v (2) = 96pies/seg

En el descenso (t = 8): v (8) = -96 pies/seg

b) t = 10 seg; v= -160 pies/seg

c) 800 pies

Ej. 3-45 b_1) TVM $f(t) = 0$ en [0;2]; b_2) TVM $(f(t)) = \frac{10^6(e^2-1)}{4}$ c) f '(4) $= 106.e2$

Ej.3-46 $a)\ t = \frac{k\pi}{2}$ con $k \in N_0$ $f(\frac{k\pi}{2}) = (-1)^k 4$

$,b)\ t = \frac{3}{4}\pi + k\pi, k \in N_0$ $f\left(\frac{3}{4}\pi + k\pi\right) = 0$ $,c)\ t = \frac{\pi}{4} + k\pi$ $f\left(\frac{1}{4}\pi + k\pi\right) = 0$

Ej. 4-47 a) Punto: (4-$\sqrt{7}$, $(4-\sqrt{7})^2$); Punto: (-1,1); b) $S(1;0)$

Ej. 4-48 a) k=0.277 t=13,31m

Ej.3-49 a) S' (8) = 8π V/s b) 8π V/s

DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÒN

Ej.3-51
$$a)\ dy = \frac{a}{a^2 + x^2}\,dx; \quad b)\ dy = e^x(1+x)dx; \quad c)\ dy = \cot g x\ dx$$

Ej.3-52
$a)\ \Delta y = 0{,}00829885 \quad ; dy = 0{,}0083\ldots \quad ; \quad b)\ \Delta y = 0{,}002082249 \quad ; dy = 0{,}002083\ldots$

Ej.3-53 $a)\ \sqrt{82} \cong 9{,}05..\ b)\ \sqrt{127} \cong 11,\overset{\frown}{27}\ ; \quad c)\ e^{0{,}03} \cong 1{,}03\ ; \quad d)\ tg46º \cong 1{,}03\ ; \quad e)\ sen29º \cong 0{,}48;\ f)\ ln\,2.82 \cong 1{,}037$

Ej.3-54 $L(x)\ = \frac{1}{3}x + 1$; L (-0,05) = $0{,}98\hat{3}$; L (0,1) =$1{,}0\hat{3}$

Ej.3-55 $\Delta v = 0{,}03x^3$

Ej.3-56 $\Delta A = 180\pi\ (cm)$

Ej.3-57 El lado del cuadrado pasa de 2 a 2,025 metros.

Ej.3-58 El volumen aumenta 0,003 metros cúbicos.

RESPUESTA DE LOS EJERCICIOS INTEGRADORES

Ej.1) a) Como el auto viaja de Oeste a Este (hacia la derecha) y debe iluminar la estatua que está en x=90, el punto buscado debe ser a ≈25.97
b) El automóvil ilumina la estatua cuando se encuentra aproximadamente en el punto (25.97, 8.43)
c) d ≈76.34 m

Ej.2) $h'(4) = \frac{40}{3}\ln 2 + \frac{328}{3}$

Ej.5) $y = 4x - \frac{2e^2}{3}$

Ej.6) Aproximadamente $3x10^{-3}$ m^3