

UTN FAC REG HAEDO .LABORATORIO DE FISICA

TP N°1 ERRORES e INCERTEZAS en las MEDICIONES

1º) CONCEPTOS GENERALES

Las mediciones realizadas con instrumentos no arrojan un valor verdadero sino un valor acotado dentro de un cierto intervalo de valores.

La norma IRAM 35050 menciona como: ***“Valor verdadero al que se obtendría de una medición perfecta. Todo valor verdadero es por naturaleza indeterminado”***.

Dentro de los instrumentos que se utilizan en laboratorios específicos o en fábricas con atmósferas controladas, como lo son las de la industria automotriz donde se maquinan cilindros, pistones y aros para motores, podemos contar con instrumentos muy delicadamente contruidos y calibrados que llamamos “patrones”. Al valor de la medición que cualquiera de ellos otorga se la toma o se la considera como valor verdadero”. Tendremos entonces una diferencia entre la medición de un objeto cualquiera realizada por un instrumento patrón y la realizada por un instrumento de trabajo.

Así definimos:

$$\xi_{abs} = V_{med} - V_{verd}$$

También definimos

$$\xi_{rel} = \frac{(V_{med} - V_{verd})}{V_{verd}}$$

y también usamos

$$\xi_{rel}\% = \frac{(V_{med} - V_{verd})}{V_{verd}} * 100\%$$

como error relativo expresado en porcentaje de la magnitud en estudio.

En la práctica medimos muchas veces sin un instrumento patrón de referencia, y expresamos genéricamente una medición como:

$$X = X_0 +/ - \Delta X \quad \text{donde}$$

X_0 es el valor más probable calculado como promedio de varias repeticiones de la medición.

ΔX es la incerteza asociada a nuestra medición que puede tener muchas causas y distintas formas de evaluación.

Básicamente veremos cálculos de incertezas clásicos y cálculos utilizando herramientas de la Estadística.

2º) Expresiones de cálculo básicas

2-1 Medición genérica de longitud con su incerteza

$$l = l_0 + /-\Delta l \quad (1)$$

2-2 Medición genérica de una superficie con su incerteza

$$S = S_0 + /-\Delta S$$

Supongamos que la superficie S esté sobre el plano X-Y podemos escribir:

$$S_0 = X_0 * Y_0$$

$$S = (X_0 + \Delta_X) * (Y_0 + \Delta_Y)$$

$$S = X_0 * Y_0 + X_0 * \Delta_Y + \Delta_X * Y_0 + \Delta_X * \Delta_Y$$

Reemplazando equivalencias

$$S_0 + \Delta_S = S_0 + X_0 * \Delta_Y + Y_0 * \Delta_X + \Delta_X * \Delta_Y$$

Donde podemos despreciar el último término por ser infinitésimo de orden superior.

Entonces nos queda

$$\Delta_S = X_0 * \Delta_Y + Y_0 * \Delta_X \quad (2)$$

2-3 Medición genérica de un volumen con su incerteza

$$V = V_0 + /-\Delta V$$

Como el volumen se considera sobre el espacio tridimensional, designado como X;Y;Z

tendremos: $V_0 = X_0 * Y_0 * Z_0$

$$V = (X_0 + \Delta_X) * (Y_0 + \Delta_Y) * (Z_0 + \Delta_Z)$$

$$V = (X_0 * Y_0 + X_0 * \Delta_Y + \Delta_X * Y_0 + \Delta_X * \Delta_Y) * (Z_0 + \Delta_Z)$$

$$V = (X_0 * Y_0 * Z_0) + (X_0 * \Delta_Y * Z_0) + (Z_0 * \Delta_X * Y_0) + (Z_0 * \Delta_X * \Delta_Y) + (X_0 * Y_0 * \Delta_Z) + (X_0 * \Delta_Y * \Delta_Z) + (\Delta_X * Y_0 * \Delta_Z) + (\Delta_X * \Delta_Y * \Delta_Z)$$

Haciendo reemplazos y despreciando términos conteniendo infinitésimos de segundo y tercer orden nos queda:

$$V = V_0 + X_0 * Z_0 * \Delta_Y + Y_0 * Z_0 * \Delta_X + X_0 * Y_0 * \Delta_Z$$

$$V_0 + \Delta_V = V_0 + X_0 * Z_0 * \Delta_Y + Y_0 * Z_0 * \Delta_X + X_0 * Y_0 * \Delta_Z$$

$$\Delta_V = X_0 * Z_0 * \Delta_Y + Y_0 * Z_0 * \Delta_X + X_0 * Y_0 * \Delta_Z \quad (3)$$

3º) MÉTODOS PARA HALLAR LAS INCERTEZAS PRESENTADAS EN LOS PUNTOS ANTERIORES

Si bien las expresiones anteriores para hallar las incertezas de las expresiones cuando se miden longitudes, superficies, volúmenes, etc...son universales, las diferencias aparecen en los métodos utilizados para calcularlas.

Distinguiremos : un método clásico para calcular incertezas y un método estadístico.

En lo que sigue (**punto 4**); vamos a aplicar las expresiones anteriores para calcular la incerteza en la medición del volumen de un cilindro por el método clásico midiendo en dos condiciones: 1º con una regla y 2º con un calibre.

Observaremos en este caso que la incerteza solo depende del instrumento que hayamos utilizado .

El método estadístico para calcular incertezas incluye además otros factores que alteran las mediciones y se agrupan en incertidumbres del tipo A e incertidumbres del tipo B.

Las del tipo A se refieren a las incertezas por efectos aleatorios como ser las influencias de la temperatura, la humedad, la presión barométrica ,condiciones del observador, etc..

La incertidumbre del tipo B, que en general es la más significativa, se refiere a las incertezas debidas al Sistema, por ello sus errores asociados se llaman sistemáticos. Por ejemplo el corrimiento del cero de un instrumento. Este tipo de incerteza se puede corregir calibrando el instrumento etc...

Daremos en el (**punto 5**) los conceptos básicos para el cálculo de incertezas por método estadístico como apoyo a los cursos superiores de Estadística.

4) EJEMPLOS DE CÁLCULO de INCERTEZAS por MÉTODO CLÁSICO

Antes de realizar estos simples cálculos vamos a comenzar con la observación de una situación conocida en general por todos.

Un piloto de avión realiza un vuelo entre dos puntos cuya distancia es conocida. Ante una falla importante que lo obligue a descender y no contando con aeropuertos

intermedios ¿Cuál será el punto que implique la mayor incerteza para tomar la decisión de seguir o volver?

Indudablemente ese punto está en la mitad de la distancia a recorrer, porque si la falla ocurre antes regresará y si ocurre después continuará.

Esto nos ayuda a entender por qué midiendo con una regla la incerteza asociada a ella está en la mitad de la distancia entre dos marcas consecutivas. Si la regla es milimétrica la incertidumbre asociada al medir con ella será: **0,5mm**

En el laboratorio se cuenta además con calibres digitales. La incerteza al medir con ellos está asociada con la lectura del último dígito decimal que aparece con un titileo. Como es el segundo decimal la incerteza será **=0,01mm** ya que observamos que ese dígito está permanentemente moviéndose entre dos números consecutivos.

Nota: todavía se usan sobre todo en talleres, calibres mecánicos. Los alumnos que lo deseen podrán consultar en el laboratorio, como se los usa.

Ahora si vayamos a calcular el volumen de un cilindro con una regla y un calibre.

La expresión general a utilizar será como ya mencionamos

$$V = V_0 + / - \Delta V$$

V_0 como expresamos es el valor promedio del volumen asociado al cilindro. O sea

$$V_0 = \frac{\pi}{4} * d_0^2 * h_0$$

Tomaremos varios diámetros del cilindro por ejemplo 5, y hallaremos su promedio.

Dicho valor es d_0 . También tomaremos varias alturas y hallaremos su promedio h_0

Con ellos calculamos V_0 en los dos casos **una vez con la regla y otra vez con el cilindro.**

Luego nos falta calcular la incerteza ΔV una vez con la regla y otra vez con el calibre.

Si genéricamente el volumen de un cilindro se expresa

$$V = \frac{\pi}{4} * d^2 * h$$

Para usar las expresiones generales que expusimos haremos simples reemplazos:

$$X = \frac{\pi}{4}$$

$$Y = d^2$$

$$Z = h$$

Como X es una constante en este ejemplo, $\Delta X = 0$

$$\Delta Y = \Delta d^2$$

y $\Delta Z = \Delta h$. Luego aplicando la (2)

$$\Delta d^2 = d_0 * \Delta d + d_0 * \Delta d$$

Y en la (3) que es genérica, haciendo los reemplazos particulares para nuestros ejemplos. Resulta

$$\Delta_v = X_0 * Z_0 * \Delta_Y + Y_0 * Z_0 * \Delta_x + X_0 * Y_0 * \Delta z \quad (3)$$

$$\Delta_v = X_0 * Z_0 * \Delta_Y + 0 + X_0 * Y_0 * \Delta z$$

$$\Delta_v = \frac{\pi}{4} * h_0 * \Delta d^2 + \frac{\pi}{4} * d_0^2 * \Delta h$$

$$\Delta_v = \frac{\pi}{4} * (h_0 * \Delta d^2 + d_0^2 * \Delta h)$$

$$\Delta_v = \frac{\pi}{4} * (2 * d_0 * h_0 * \Delta d + d_0^2 * \Delta h) \quad (4)$$

Solo nos falta hacer dos cuentas reemplazando los valores obtenidos antes de d_0 y h_0

y $\Delta Y = 0,5 \text{ mm}$ para la regla como también

$\Delta Y = 0,01 \text{ mm}$ para el calibre

5) Aplicación de conceptos estadísticos al cálculo de las incertezas

La expresión (4) por ser universal continúa siendo válida, nuevamente el cambio está en como calcular Δ_h y Δ_d pero ahora **usando estadística**.

La primera diferencia aparece en la cantidad de mediciones que en lugar de 5 ó 6 del método clásico será como mínimo 30 usando estadística.

Para iniciar los primeros pasos se decidió tomar periodos de un péndulo y anotarlos en una tabla Excel. Los pasos a seguir se encuentran explicados ordenadamente en un documento auxiliar adjunto a este. Además los alumnos cuentan con un ejemplo numérico en una planillita Excel también adjunta que usarán como guía.

Si finalmente los alumnos quieren calcular por estadística la incerteza en la medición del volumen del cilindro usando la (4) aplicarán dos veces lo realizado en el ejemplo con los periodos del péndulo, pero en este caso una vez con el diámetro del cilindro y otra vez con la altura sacando así los nuevos valores de Δd y Δh las incertezas de esas dos magnitudes por efectos aleatorios a las que para incorporarlas a la (4) les faltaría solo agregarles la incerteza del instrumento (regla o calibre). Las llamamos incertezas combinadas

$$\Delta d_c = \sqrt{\Delta d^2 + 0,5^2} \text{ y también } \Delta h_c = \sqrt{\Delta h^2 + 0,5^2} \text{ para la regla}$$

$$\Delta d_c = \sqrt{\Delta d^2 + 0,01^2} \text{ y también } \Delta h_c = \sqrt{\Delta h^2 + 0,01^2} \text{ para el calibre}$$

¿Por qué queremos introducir estos conceptos estadísticos?

Porque hoy en día, los certificados que expresan incertezas lo hacen usando herramientas estadísticas

La idea es que tabulados en Excel, los valores tomados del periodo del péndulo, se los ordene en columna contigua de menor a mayor. Luego en otra columna se agrupen las mediciones que resultaron iguales para poder realizar un gráfico, donde el eje “X” muestre el intervalo que va desde la medición con el menor valor tomado, hasta el mayor.

Por su parte en el eje “Y” se muestre la frecuencia observada para cada uno de los valores del eje “X”.

Ingresa luego en Excel a la función GRÁFICO y dentro de ella en DISPERSIÓN, apareciendo en pantalla el gráfico.

Que los alumnos analicen los valores leídos y su tendencia a formar en el gráfico una campana llamada de Distribución Normal o Gaussiana.

En el caso de observar importantes deformaciones en ella, analizar que valores podrían no haberse leído adecuadamente, como se mejora el gráfico aumentando la cantidad de mediciones, etc..

Luego en otra hoja del Excel copiar la tabla de valores tomados de la hoja 1 y operar con ella.

En primer lugar realizar la sumatoria de valores y calcular su promedio: Valor más probable:

Luego en columna contigua calcular las desviaciones de todos los valores respecto del valor más probable.

NOTA aquí se recalca que basta calcular el primer casillero y luego aplicar la **función copiar y pegar del Excel**.

Después en otra columna se calculan los cuadrados de las desviaciones con la misma idea en cuanto a calcular solo el primer casillero, luego copiar y pegar.

Esto permite introducir el concepto de **VARIANZA** para una variable genérica medida y designada por ejemplo como variable “K”

$$V_K = \frac{\sum_{i=1}^N (X_{iK} - X_0)^2}{N-1}$$

Como la varianza, da valores al cuadrado, tanto de la magnitud medida como de sus unidades, se pasa al concepto de **DESVIACIÓN STANDARD** como:

$$\sigma_K = \sqrt{V_K}$$

Finalmente en este primer paso culminar con el concepto **de ERROR STANDARD o INCERTEZA en la MEDICION debida a errores aleatorios**. Es también la llamada incertidumbre tipo “A”.

Se la suele mostrar con la letra “U” como $U = \frac{\sigma_K}{\sqrt{N}}$

$$U_K = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (X_{iK} - X_0)^2}{N-1}}}{\sqrt{N}}$$

$$\text{O bien } U_K = \sqrt{\frac{\frac{\sum_{i=1}^N (X_{iK} - X_0)^2}{N-1}}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (X_{iK} - X_0)^2}{N*(N-1)}}$$

Asociaríamos nuestra medición a la expresión

$$X_k = X_0 \pm U_k$$

Se dice que esta expresión de incerteza calculada hasta aquí, nos daría un nivel de confianza del **50%** de que el valor más correcto de nuestra medición, esté contemplado dentro del intervalo de valores calculado como valor más probable y sus desvíos a izquierda y derecha

Se puede finalmente mostrar como corolario aunque no se desarrolle, que es posible seguir avanzando y mejorando la última expresión incorporando **la INCERTIDUMBRE COMBINADA** cuando se debe contemplar la influencia de otras variables en mediciones más sutiles que requieran más detalle en el análisis.

También la existencia de otro tipo de **incertidumbre tipo “B”** que contempla **errores SISTEMÁTICOS** para llegar a la aplicación de un **FACTOR de COBERTURA** cuando se desea llevar nuestro resultado a un nivel de confianza del **95% ó del 99%** de que el valor más correcto de nuestra medición, esté contemplado dentro del intervalo de valores calculado como valor más probable y sus desvíos a izquierda y derecha.

Dicho intervalo final, luego de aplicar el factor de cobertura da origen a lo que se llama también **INCERTIDUMBRE EXPANDIDA** ,que es la que se suele mostrar en los certificados que dan algunos Organismos de Calibración como el INTI o laboratorios de control de instrumentos de precisión ,etc..

Acá se podría mostrar a título ilustrativo, un ejemplo de aplicación de la tablita Excel que varios mostraron en el ciclo 2023

Agustín Zabaljauregui

