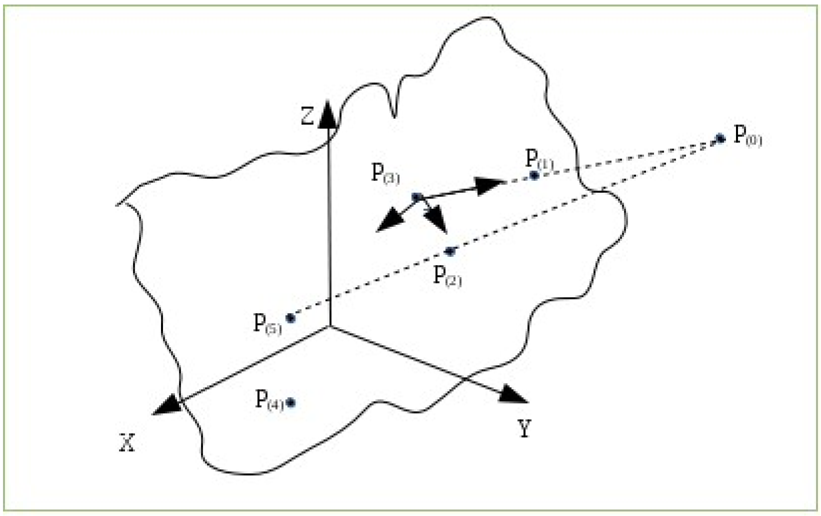
RESOLUCION ANALITICA DE PROYECCION DE PUNTO

Asumiendo la existencia de un sistema global (X,Y,Z) con un observador ubicado en $P(0)(x_0, y_0, z_0)$ y un punto objeto $P(2)(x_2, y_2, z_2)$



Recta de visión-

Asumamos que un observador ubicado en $P(0)(x_0, y_0, z_0)$ esta mirando hacia el punto $P(1)(x_1, y_1, z_1)$.
Una recta en R3 que pasa por estos dos puntos (x_1, y_1, z_1) y (x_0, y_0, z_0) podemos expresarla en forma parametrica como

$$x = x_0 + t(x_0 - x_1) \qquad x = x_0 + t.a$$

$$y = y_0 + t(y_0 - y_1) \qquad y = y_0 + t.b \qquad (2)$$

$$z = z_0 + t(z_0 - z_1) \qquad z = z_0 + t.c$$

Recta de proyección

Es la recta que desde el observador pasa por el punto objeto

$$x = x_0 + \lambda(x_0 - x_2) \qquad x = x_0 + \lambda.\alpha$$

$$y = y_0 + \lambda(y_0 - y_2) \qquad y = y_0 + \lambda.\beta$$

$z = z_0 + \lambda(z_0 - z_2) \qquad z = z_0 + \lambda . \gamma$

Plano de proyección

En tanto que un plano perpendicular a una recta que pasa por un punto $P(4)(x_4, y_4, z_4)$ que posiciona un plano sobre el cual vamos a proyectar la imagen es:

$a x + b y + c z + d = 0$ (1) donde a, b, c son las componentes de un vector normal.
Si este plano contiene a $P(4)(x_4, y_4, z_4)$, se debe cumplir $a . x_4 + b . y_4 + c . z ._4 = 0$ de donde

$d = -(a . x_4 + b . y_4 + c . z ._4)$

La ecuación del plano sera

$a x + b y + c z - a . x_4 - b . y_4 - z ._4 = 0$ (4)

pero para que el plano sea perpendicular a la recta de vision, se debe cumplir que

$a = (x_1 - x_0) \qquad b = (y_1 - y_0) \qquad c = (z_1 - z_0)$

Intersección de recta de proyección y Plano

Para encontrar la intersección de esta recta con el plano, reemplazamos x, y, z de la recta en la ecuación del plano.

$a(x_0 + \lambda . \alpha) + b(y_0 + \lambda . \beta) + c(z_0 + \lambda . \gamma) - (a . x_4 + b . y_4 + c . z_4) = 0$

Operando

$a . x_0 + t . a^2 + b . y_0 + t . b^2 + c . z_0 + t . c^2 - a . x_4 - b . y_4 - c . z_4 = 0$

$t . (a^2 + b^2 + c^2) = + a . x_4 + b . y_4 + c . z_4 - a . x_0 - b . y_0 - c . z_0$

$$\lambda = \frac{a . (x_4 - x_0) + b . (y_4 - y_0) + c . (z_4 - z_0)}{(a . \alpha + b . \beta + c . \gamma)}$$

El valor de λ hallado mediante esta ecuación, se puede reemplazar en cada una de las ecuaciones parametricas de la recta y de esta manera se obtienen las tres coordenadas del punto proyectado .P(5)

$x_5 = x_0 + \lambda . \alpha$

$y_5 = y_0 + \lambda . \alpha$

$z_5 = z_0 + \lambda . \alpha$

Punto de interseccion de la recta de vision con el plano de proyeccion P(3)

Reemplazando x, y ,z de la recta (2) en la ecuacion del plano (4)

$$a\,x + b\,y + c\,z - a . x_4 - b . y_4 - z ._4 = 0$$

Operando

$$a . (x_0 + t . a) + b . y_0 + t . b^2 + c . z_0 + t . c^2 - a . x_4 - b . y_4 - c . z_4 = 0$$

$$a . (x_0 + t . a^2) + b . y_0 + t . b^2 + c . z_0 + t . c^2 - a . x_4 - b . y_4 - c . z_4 = 0$$

$$t . (a^2 + b^2 + c^2) = + a . x_4 + b . y_4 + c . z_4 - a . x_0 - b . y_0 - c . z_0$$

$$t = \frac{a . (x_4 - x_0) + b . (y_4 - y_4) + c . (z_4 - z_0)}{(a^2 + b^2 + c^2)}$$

La posición del punto P(3) sera

$x_3 = x_0 + t . a$

$y_3 = y_0 + t . b$

$z_3 = z_0 + t . c$ sobre este punto ubicaremos la terna secundaria

Busco lo versores del rayo de visión

$$\hat{a} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \qquad \hat{b} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \qquad \hat{c} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Un vector normal al plano formado por el rayo de visión (su versor) y el eje Z de la terna global es

$$\begin{Bmatrix} i & j & k \\ \hat{a} & \hat{b} & \hat{c} \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} = \left[\hat{b}\, i , - \hat{a}\, j , 0 k\right]$$

Y ahora sacamos el tercer eje de la terna

$$\begin{Bmatrix} i & j & k \\ \hat{a} & \hat{b} & \hat{c} \\ \hat{b} & -\hat{a} & 0 \end{Bmatrix} = \left[\hat{a} . \hat{c}\, i , \hat{b} . \hat{c}\, j , \left(-\widehat{a^2} - \widehat{b^2}\right) k\right]$$

La terna local estará en

$$x_3 = x_0 + t.a$$

$$y_3 = y_0 + t.b$$

$$z_3 = z_0 + t.c$$

y sus versores

$$\begin{matrix} \hat{a}\,i & \hat{b}\,j & \hat{c}\,k \\ \hat{b}\,i & -\hat{a}\,j & 0k \\ \hat{a}.\hat{c}\,i & \hat{b}.\hat{c}\,j & \left(-\widehat{a^2}-\widehat{b^2}\right)k \end{matrix}$$

Luego la transformación del sistema global al local sera

P local= $P_{local} = M^{-1}.P_5$

donde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & \hat{a}\,i & \hat{b}\,j & \hat{c}\,k \\ y_3 & \hat{b}\,i & -\hat{a}\,j & 0k \\ c_3 & \hat{a}.\hat{c}\,i & \hat{b}.\hat{c}\,j & \left(-\widehat{a^2}-\widehat{b^2}\right)k \end{pmatrix}$$