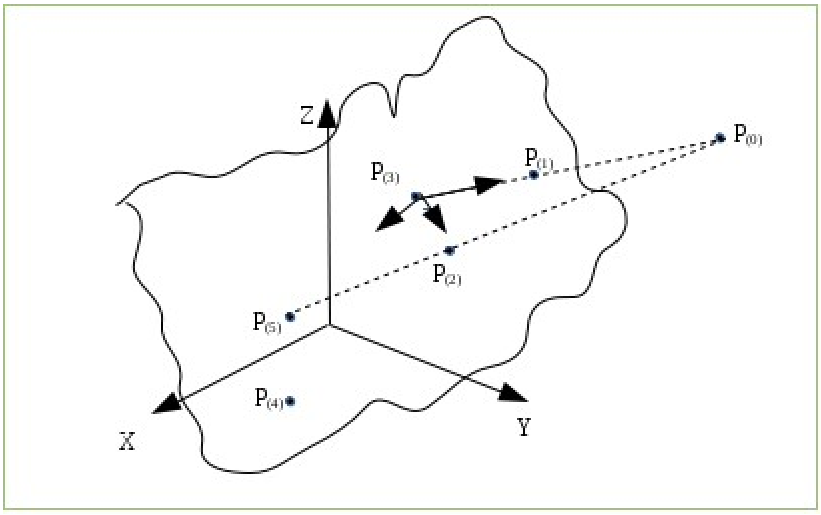
RESOLUCIÓN ANALITICA DE PROYECCION DE PUNTO

Sea un Sistema Cartesiano Ortogonal de Referencia Global de centro *O* y ejes (*X*, *Y*, *Z*), un observador ubicado en $P_0(x_0, y_0, z_0)$ mirando hacia un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$, y un punto objeto $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Ni P_1 ni P_2 coinciden con P_0.



Recta de Visión r_V

Denominamos Recta de Visión r_V a aquella que pasa por los puntos P_0 y P_1, esto es

$$r_V : \overline{OP} = \overline{OP_0} + \lambda \overline{P_0 P_1} \; \forall \lambda \in R \quad .$$

Su expresión en coordenadas cartesianas paramétricas es

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) \; \forall \lambda \in R \\ z = z_0 + \lambda(z_1 - z_0) \end{cases} \quad .$$

Podemos dar la dirección de la recta mediante el versor correspondiente, denominado versor del Rayo de Visión,

$$\widehat{P_0 P_1} = \frac{1}{|P_0 P_1|} \overline{P_0 P_1} = \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}} (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) = (a, b, c) \quad .$$

La expresión equivalente de r_V es

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \; \forall \lambda \in R \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} \quad . \qquad (1)$$

Plano de Proyección π

Definimos el Plano de Proyección como aquel sobre el cuál se proyectan las imágenes. Este plano pasa por un punto $P_4(x_4, y_4, z_4)$ y es perpendicular a la Recta de Visión r_V de modo que

$$\begin{cases} P_4 \in \pi \\ \widehat{P_0 P_1} = (a, b, c) \perp \pi \end{cases} .$$

La ecuación general o implícita responde a

$$: ax + by + cz + d = 0 \quad .$$

Como $P_4 \in \pi$, se verifica que

$$a\, x_4 + b\, y_4 + c\, z_4 + d = 0 \quad \text{por lo tanto} \quad d = a\, x_4 - b\, y_4 - c\, z_4 \quad .$$

De modo que

$$: a(x - x_4) + b(y - y_4) + c(z - z_4) = 0 \quad .$$

Esta expresión es equivalente a la descrita por el planteo directo vectorial

$$\pi : \widehat{P_0 P_1} \cdot \overrightarrow{P_4 P} \quad = 0$$

En función de las coordenadas de los puntos, se puede expresar como

$$: (x_1 - x_0)(x - x_4) + (y_1 - y_0)(y - y_4) + (z_1 - z_0)(z - z_4) = 0 \quad . \quad (2)$$

Punto de intersección de la Recta de Visión con el Plano de Proyección, P_3

Buscamos el punto $P_3 \equiv r_V \cap \pi$, resolviendo el sistema de ecuaciones lineales dado por la simultaneidad de (1) y (2). Reemplazamos las condiciones de pertenencia a r_v en la ecuación de π, y resulta

$$a(x_0 + \lambda a - x_4) + b(y_0 + \lambda b - y_4) + c(z_0 + \lambda c - z_4) = 0 \quad ,$$

$$\lambda(a^2 + b^2 + c^2) + a(x_0 - x_4) + b(y_0 - y_4) + c(z_0 - z_4) = 0 ,$$

donde $a^2 + b^2 + c^2 = \left|\widehat{P_0 P_1}\right|^2 = 1$.

Despejamos el valor del parámetro λ, de respuesta única, al que identificamos como λ_3

$$\lambda_3 = a(x_4 - x_0) + b(y_4 - y_0) + c(z_4 - z_0) . \qquad (3)$$

Observamos que

$$\lambda_3 = (a, b, c) \cdot (x_4 - x_0, y_4 - y_0, z_4 - z_0) = \widehat{P_0 P_1} \cdot \overrightarrow{P_0 P_4} \quad .$$

Obtenemos las coordenadas P_3 cuando reemplazamos λ_3 en (1),

$$\begin{cases} x_3 = x_0 + \lambda_3 a \\ y_3 = y_0 + \lambda_3 b . \\ z_3 = z_0 + \lambda_3 c \end{cases} \qquad (4)$$

En forma vectorial y compacta, podemos escribir (3) de la siguiente forma

$$\overrightarrow{O P_3} = \overrightarrow{O P_0} + \left(\widehat{P_0 P_1} \cdot \overrightarrow{P_0 P_4}\right) \widehat{P_0 P_1} \quad .$$

Definición de un Sistema Local de Referencia

Para expresar las coordenadas de las proyecciones sobre el plano, elegiremos un Sistema Local de Referencia. Tomaremos como origen de coordenadas al punto P_3.

Uno de los ejes será el que da la dirección de la Recta de Visión r_V, identificándolo con el versor perpendicular al Plano de Proyección ya definido

$$\hat{e}_1 = \widehat{P_0 P_1} = (a, b, c) \quad . \qquad (5)$$

El segundo eje coincidirá con la dirección de un vector paralelo al plano que sea también, arbitrariamente, perpendicular al eje Z del Sistema Global de Referencia. Por tanto lo obtendremos con el producto vectorial entre los versores del rayo de visión y $\hat{k}$, esto es

$$\vec{e}_2=\hat{e}_1\times\hat{k}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a & b & c\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=b\hat{i}-a\hat{j}\equiv(b,-a,0).$$

El versor correspondiente es

$$\hat{e}_2=\frac{1}{|e_2|}\vec{e}_2=\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},0\right).(6)$$

El tercer eje lo definiremos con el versor que completa la terna derecha con los dos anteriores

$$\hat{e}_3=\hat{e}_1\times\hat{e}_2=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a & b & c\\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0\end{vmatrix}=\frac{ac}{\sqrt{a^2+b^2}}\hat{i}+\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}\hat{j}+\frac{(-a^2-b^2)}{\sqrt{a^2+b^2}}\hat{k}$$

$$\hat{e}_3=\left(\frac{ac}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{-a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).(7)$$

Recta de Proyección r_P

Es la que desde el observador pasa por el punto objeto, esto es

$$r_P:\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_0}+\mu\overrightarrow{P_0P_2}\ \forall\mu\in R\quad .$$

Su expresión en coordenadas cartesianas paramétricas es

$$\begin{cases}x=x_0+\mu(x_2-x_0)\\ y=y_0+\mu(y_2-y_0)\ \forall\mu\in R.\\ z=z_0+\mu(z_2-z_0)\end{cases}$$

Podemos dar la dirección de la recta mediante el versor correspondiente,

$$\widehat{P_0P_2}=\frac{1}{|P_0P_2|}\overrightarrow{P_0P_2}=\frac{1}{\sqrt{(x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2+(z_2-z_0)^2}}(x_2-x_0,y_2-y_0,z_2-z_0)=(\alpha,\beta,\gamma)\quad .$$

La expresión equivalente de r_P es

$$\begin{cases}x=x_0+\mu\alpha\\ y=y_0+\mu\beta\ \forall\mu\in R.\\ z=z_0+\mu\gamma\end{cases}\qquad (8)$$

Punto de intersección de la Recta y el Plano de Proyección, P_5

Buscamos el punto $P_5\equiv r_P\cap\pi$, resolviendo el sistema de ecuaciones lineales dado por la simultaneidad de (2) y (8). Reemplazamos las condiciones de pertenencia a r_P en la ecuación de π, y resulta

$$a(x_0+\mu\alpha-x_4)+b(y_0+\lambda\beta-y_4)+c(z_0+\mu\gamma-z_4)=0$$
$$\mu(a\gamma+b\beta+c\gamma)+a(x_0-x_4)+b(y_0-y_4)+c(z_0-z_4)=0$$

donde $a\gamma+b\beta+c\gamma=\widehat{P_0P_1}\cdot\widehat{P_0P_2}$.

Despejamos el valor del parámetro μ, de respuesta única, al que identificamos como ❑$_5$

$$\mu_5=\frac{a(x_4-x_0)+b(y_4-y_0)+c(z_4-z_0)}{a\gamma+b\beta+c\gamma}.\qquad (9)$$

Observamos que

$$\mu_5=\frac{\left(\widehat{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P_4}\right)}{\left(\widehat{P_0P_1}\cdot\widehat{P_0P_2}\right)}.$$

Obtenemos las coordenadas P_5 cuando reemplazamos μ_5 en (8),

$$\begin{cases} x_5=x_0+\mu_5\,\alpha \\ y_5=y_0+\mu_5\,\beta \\ z_5=z_0+\mu_5\,\gamma \end{cases} \qquad (10)$$

En forma vectorial y compacta, podemos escribir (3) de la siguiente forma

$$\overrightarrow{OP_5}=\overrightarrow{OP_0}+\frac{\left(\widehat{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P_4}\right)}{\left(\widehat{P_0P_1}\cdot\widehat{P_0P_2}\right)}\widehat{P_0P_2}$$

Transformación de coordenadas del Sistema de Referencia Global al Local

Hallar las coordenadas del punto proyectado P_5 en el Sistema de Referencia Local sobre el plano π, identificado P_{5_L}, significa hallar una terna de números reales $\left(x_{5_L}, y_{5_L}, z_{5_L}\right)$ tales que

$$\overline{P_3P_5}=x_{5_L}\hat{e}_1+y_{5_L}\hat{e}_2+z_{5_L}\hat{e}_3 \quad .$$

Recordamos que P_3 es el origen y que la base $\left\{\hat{e}_1;\hat{e}_2;\hat{e}_3\right\}$ es ortonormal de modo que

$$\begin{cases} x_{5_L}=\overrightarrow{P_3P_5}\cdot\hat{e}_1=0 \\ y_{5_L}=\overrightarrow{P_3P_5}\cdot\hat{e}_2 \\ z_{5_L}=\overrightarrow{P_3P_5}\cdot\hat{e}_3 \end{cases} \quad ,(11)$$

donde $\overline{P_3P_5}=\overline{OP_5}-\overline{OP_3}$, a partir de (3) y (10), se puede expresar en forma vectorial como

$$\overrightarrow{P_3P_5}=\frac{\left(\widehat{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P_4}\right)}{\left(\widehat{P_0P_1}\cdot\widehat{P_0P_2}\right)}\widehat{P_0P_2}-\left(\widehat{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P_4}\right)\widehat{P_0P_1}$$

(…. Se puede continuar el apunte o dejar en la página anterior)

O, en forma equivalente,

$$\overrightarrow{P_3P_5}=\frac{\left(\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P_4}\right)}{\left(\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P_2}\right)}\overrightarrow{P_0P_2}-\frac{\left(\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P_4}\right)}{\left(\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P_1}\right)}\overrightarrow{P_0P_1},$$

$$\overrightarrow{P_3P_5}=\left(\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P_4}\right)\left[\frac{1}{\left(\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P_2}\right)}\overrightarrow{P_0P_2}-\frac{1}{\left(\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P_1}\right)}\overrightarrow{P_0P_1}\right].$$

También se pueden dar expresiones vectoriales de los vectores y escalares no nulos de (11).

O escribir el sistema de ecuaciones con la matriz M adaptada a la nomenclatura usada hasta aquí.