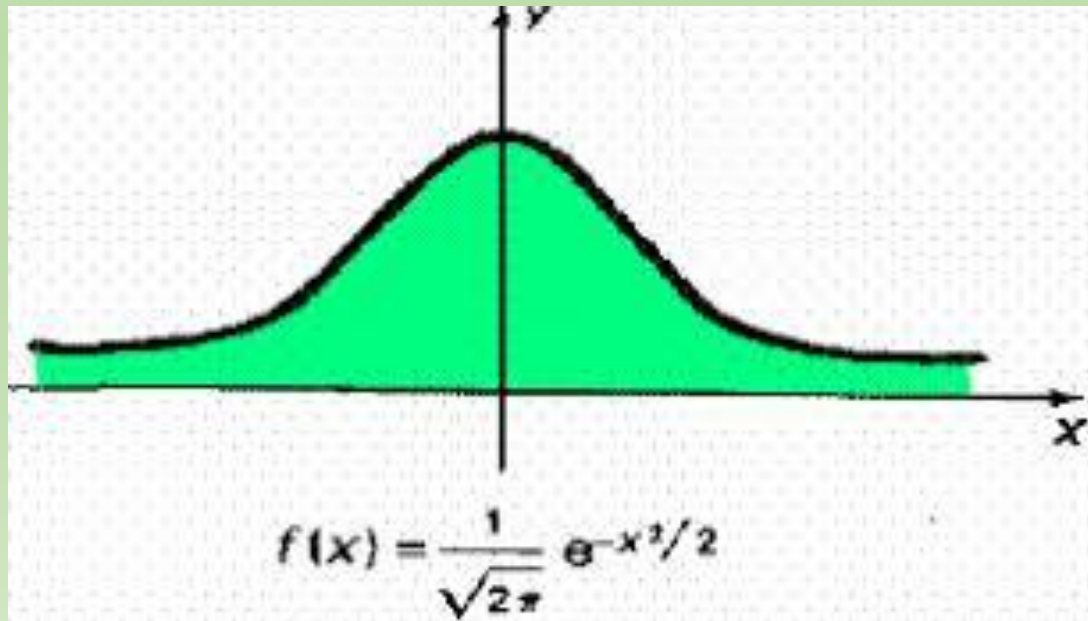
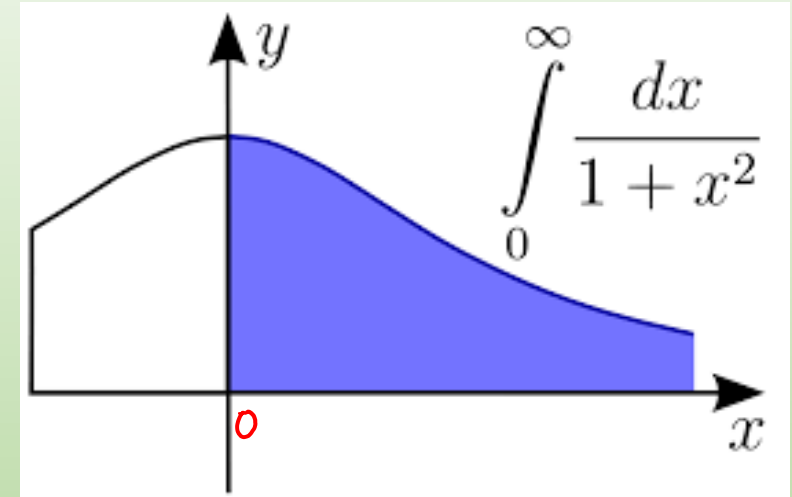
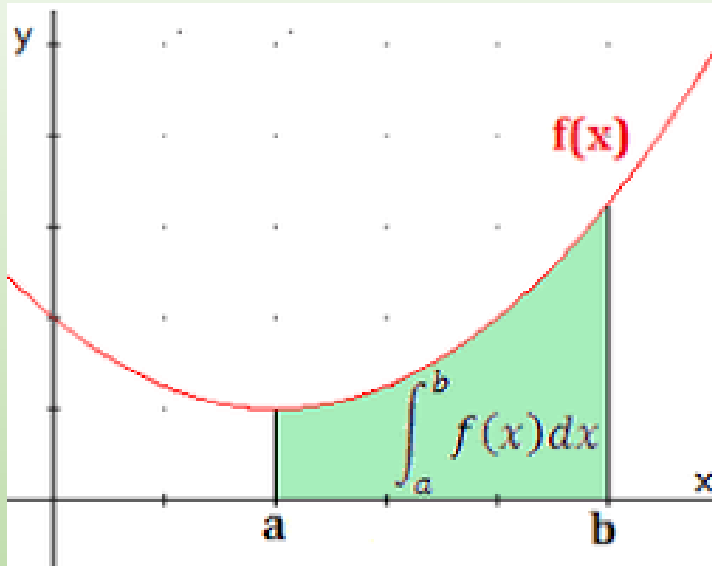


INTEGRALES IMPROPIAS

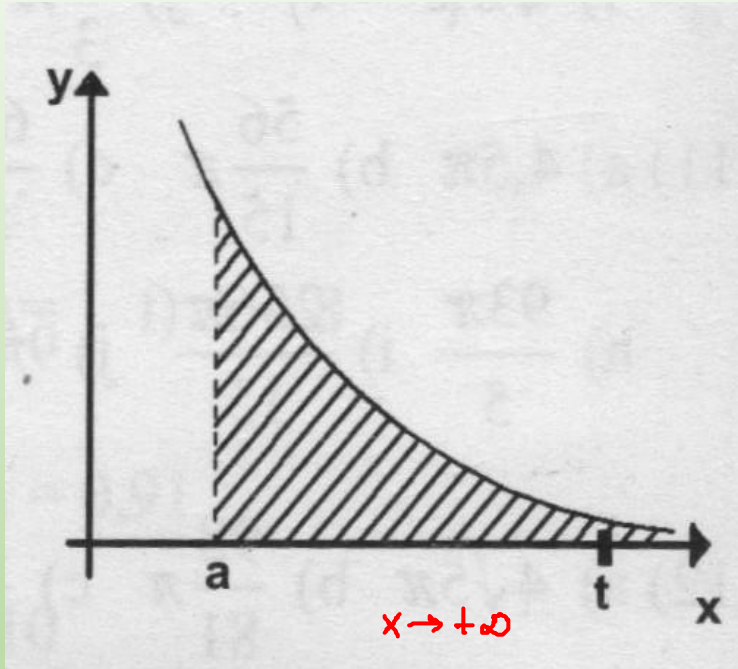


Para el cálculo de la integral definida, hemos exigido que la función f sea continua y acotada en el intervalo $[a,b]$.

Si eliminara alguna de estas condiciones, se puede generalizar la idea de integral definida mediante las llamadas:

**INTEGRALES
IMPROPIAS**

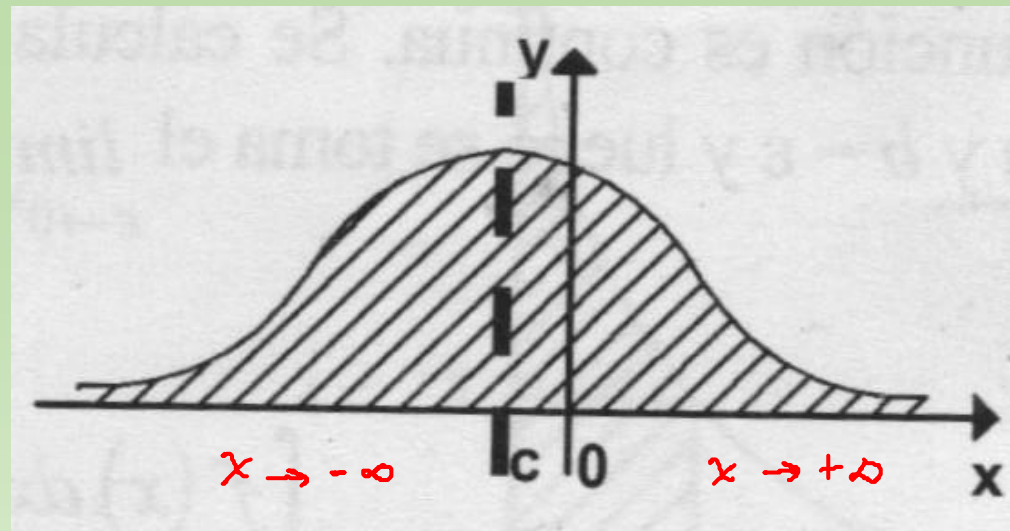
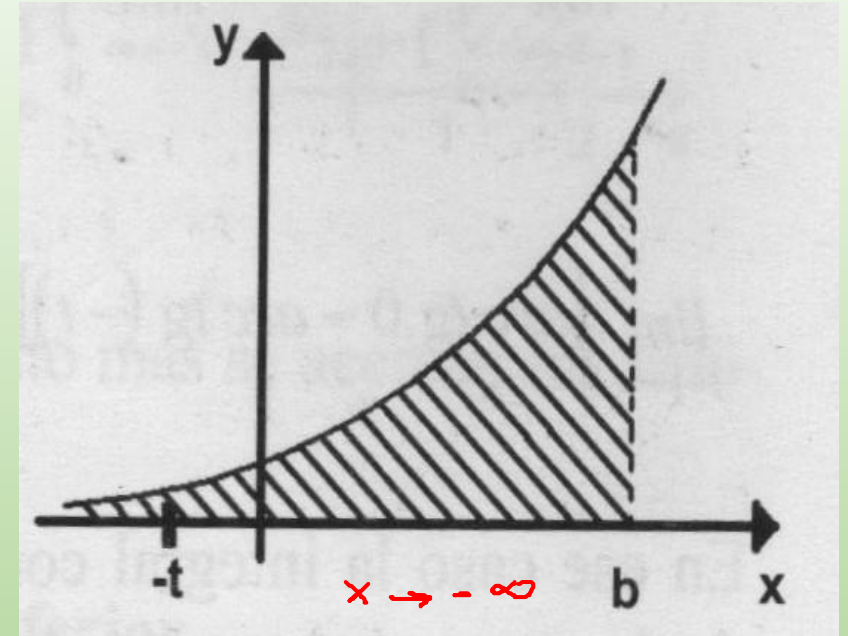
a) Impropia de 1º especie



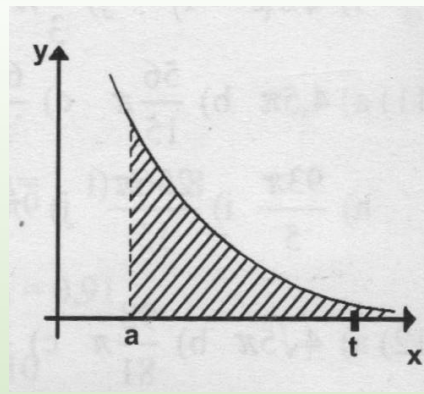
✓ f es continua en $[a; +\infty)$

✓ f es continua en $(-\infty; b]$

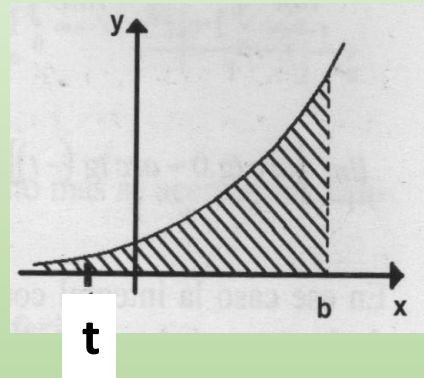
✓ f es continua en $(-\infty; +\infty)$



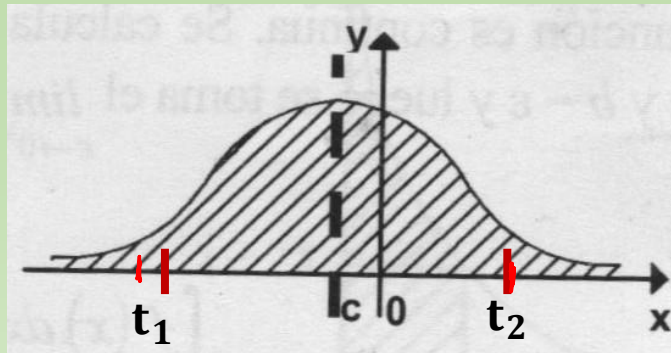
$$\text{a) } \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$$



$$\text{b) } \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$$



$$\text{c) } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \int_{t_1}^c f(x) dx + \lim_{t_2 \rightarrow +\infty} \int_c^{t_2} f(x) dx$$



Si al calcular el límite

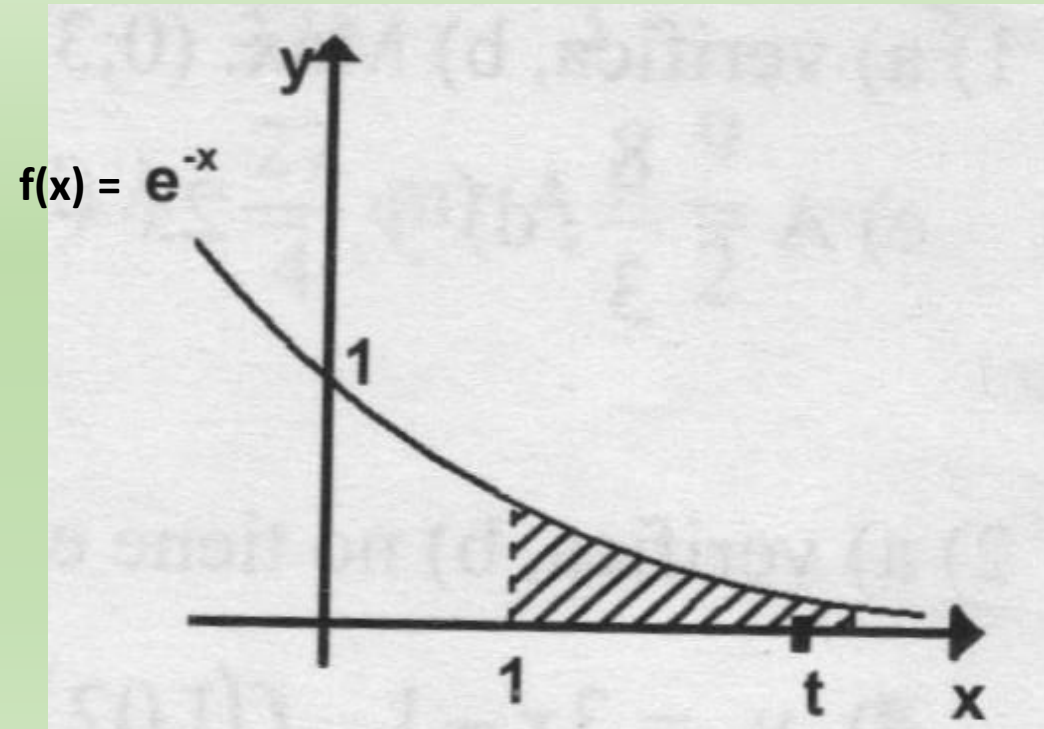
- ✓ L es finito, la integral es **convergente** y **converge a L**
- ✓ L es **infinito**, la integral es **divergente**
- ✓ Si el límite no existe la integral es oscilante

Ejemplos

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) \Big|_1^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} (-e^{-t} + e^{-1}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{e^t} + \frac{1}{e} \right)$$

$$= \frac{1}{e}$$

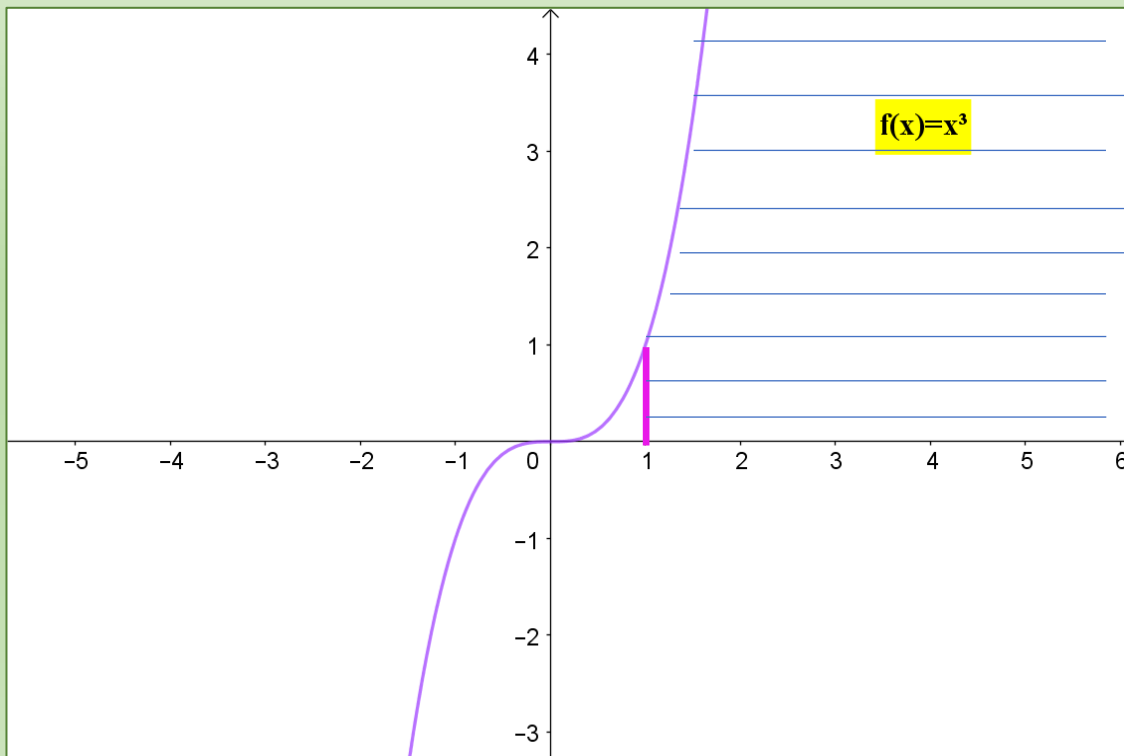
$$u = e^{-x} \rightarrow du = -e^{-x} dx$$



La integral converge a $1/e$

Como $f(x) > 0$ el resultado obtenido es el área bajo la curva.

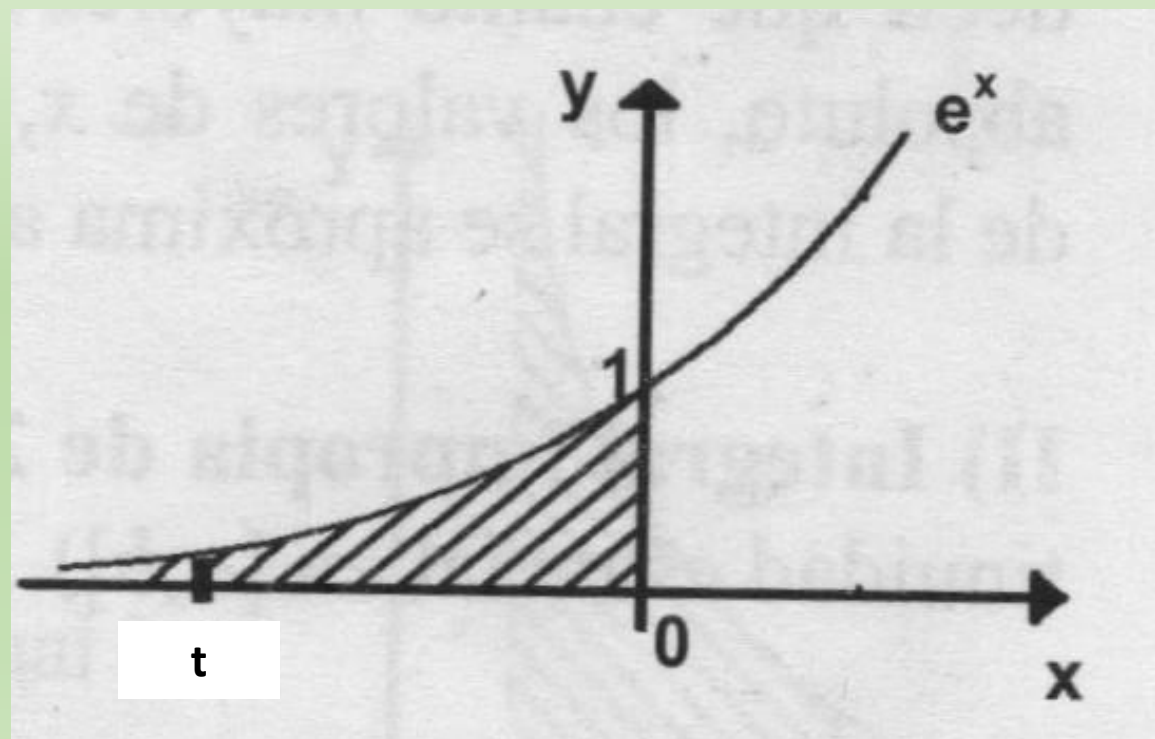
$$\int_1^{+\infty} x^3 dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t x^3 dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_1^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} t^4 - \frac{1}{4} \right) = +\infty$$



La integral diverge.

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 e^x dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} (e^x) \Big|_t^0 = \lim_{t \rightarrow -\infty} (e^0 + e^t) = 1 - 0 = 1$$

Converge



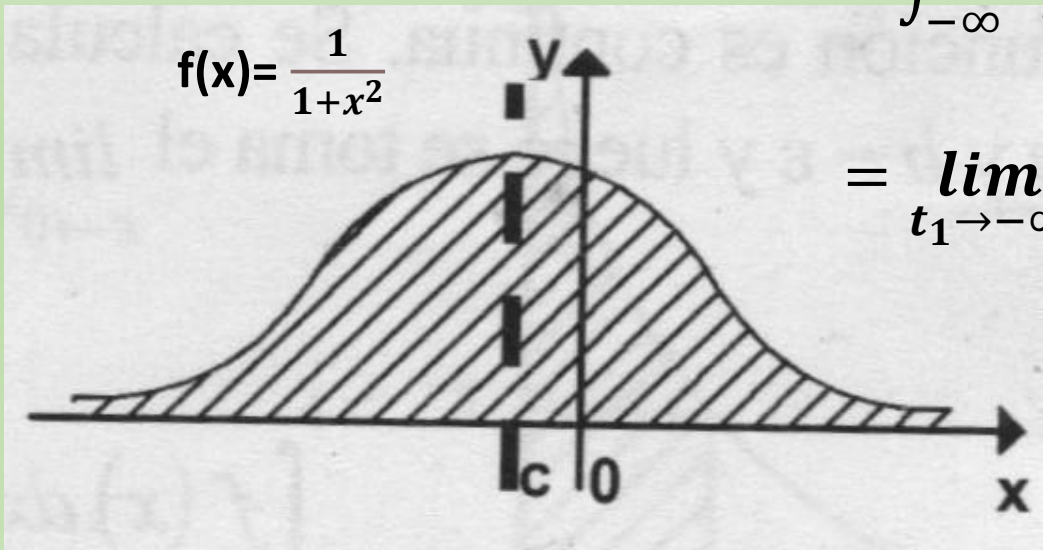
Como $f(x) > 0$ el resultado obtenido es el área bajo la curva.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \int_{t_1}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{t_2 \rightarrow +\infty} \int_0^{t_2} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \arctg x \Big|_{t_1}^0 + \lim_{t_2 \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_0^{t_2}$$

$$= \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} (\arctg 0 - \arctg t_1) + \lim_{t_2 \rightarrow +\infty} (\arctg t_2 - \arctg 0)$$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi$$

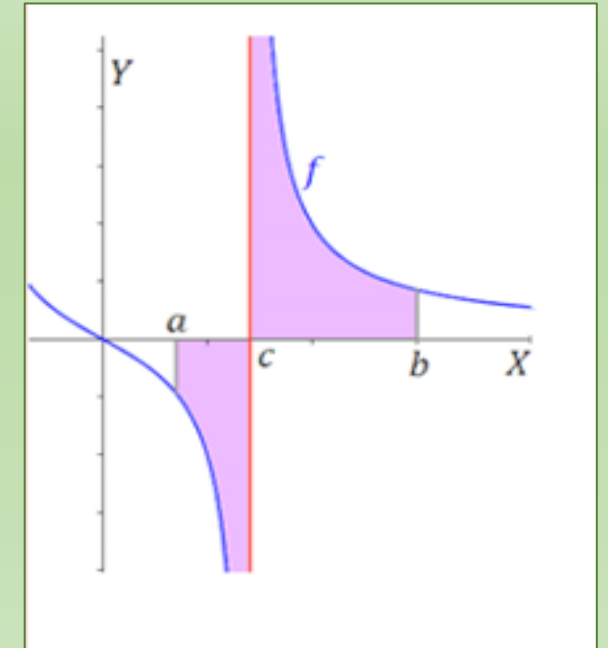
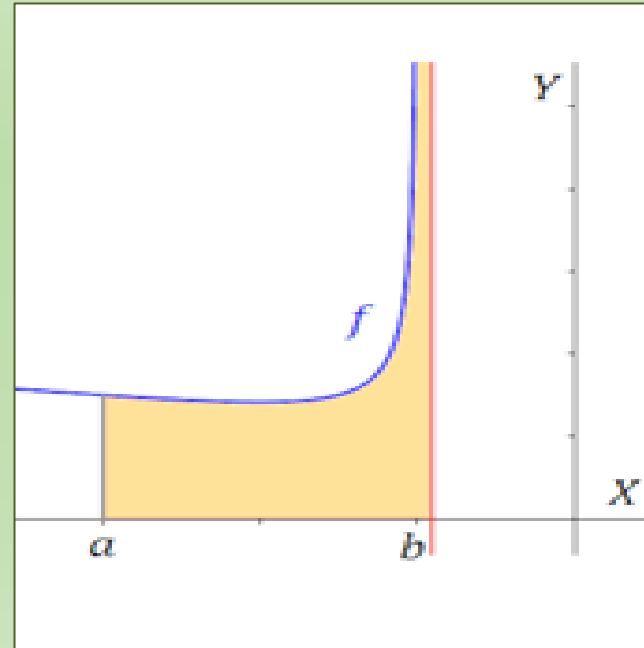
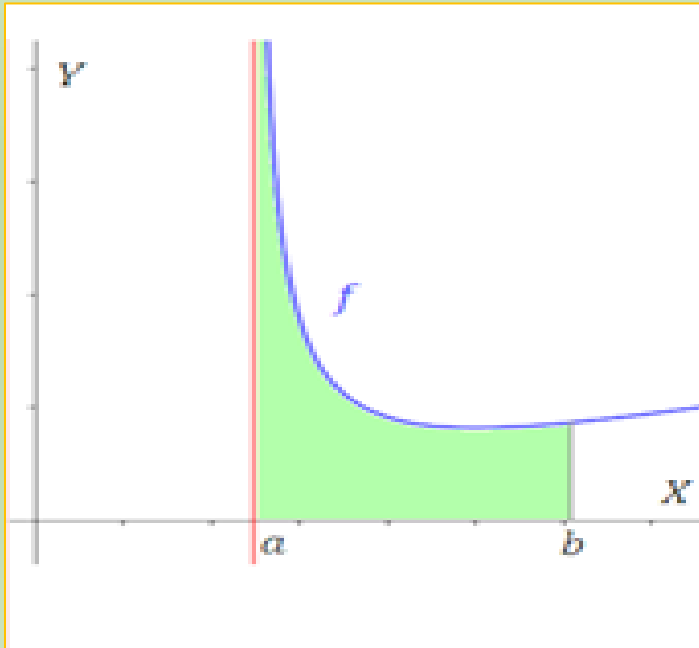


La integral converge a π

En este caso también es el área bajo la curva el resultado obtenido

b) Impropia de 2º especie

- ✓ La función tiene una DISCONTINUIDAD en el extremo del intervalo o en un punto interior a él

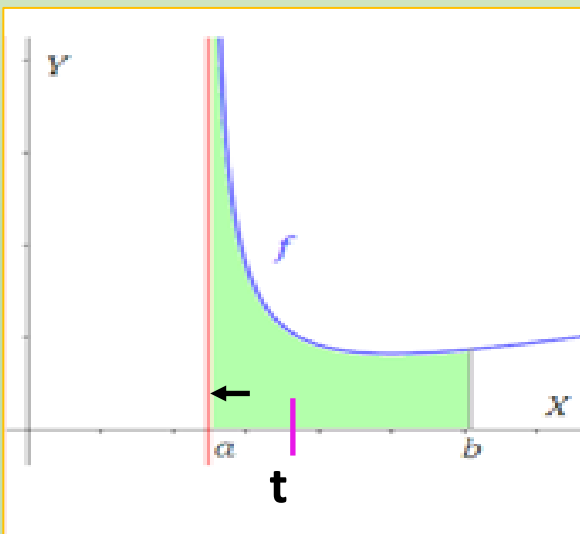


a)

La discontinuidad está en a

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \boxed{\int_t^b f(x)dx}$$

F(t)

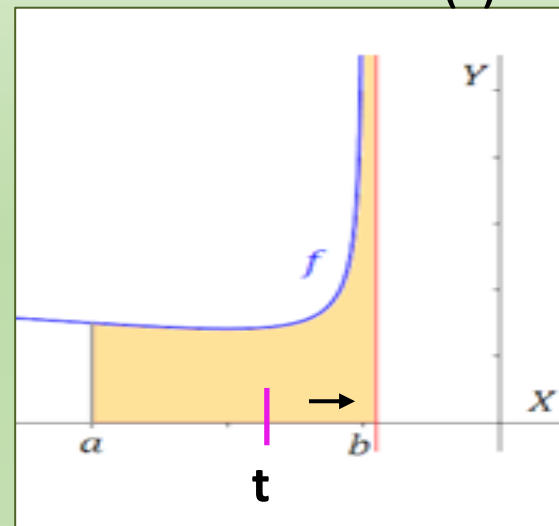


b)

La discontinuidad está en b

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \boxed{\int_a^t f(x)dx}$$

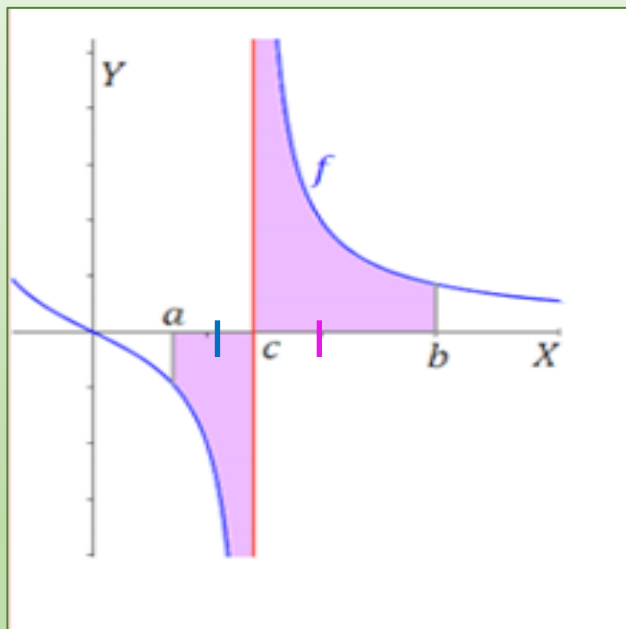
F(t)



Si el límite existe y es finito la integral impropia converge, si es infinito diverge y si no existe oscila.

c)

La discontinuidad está en $x = c$, punto interior del intervalo $[a,b]$



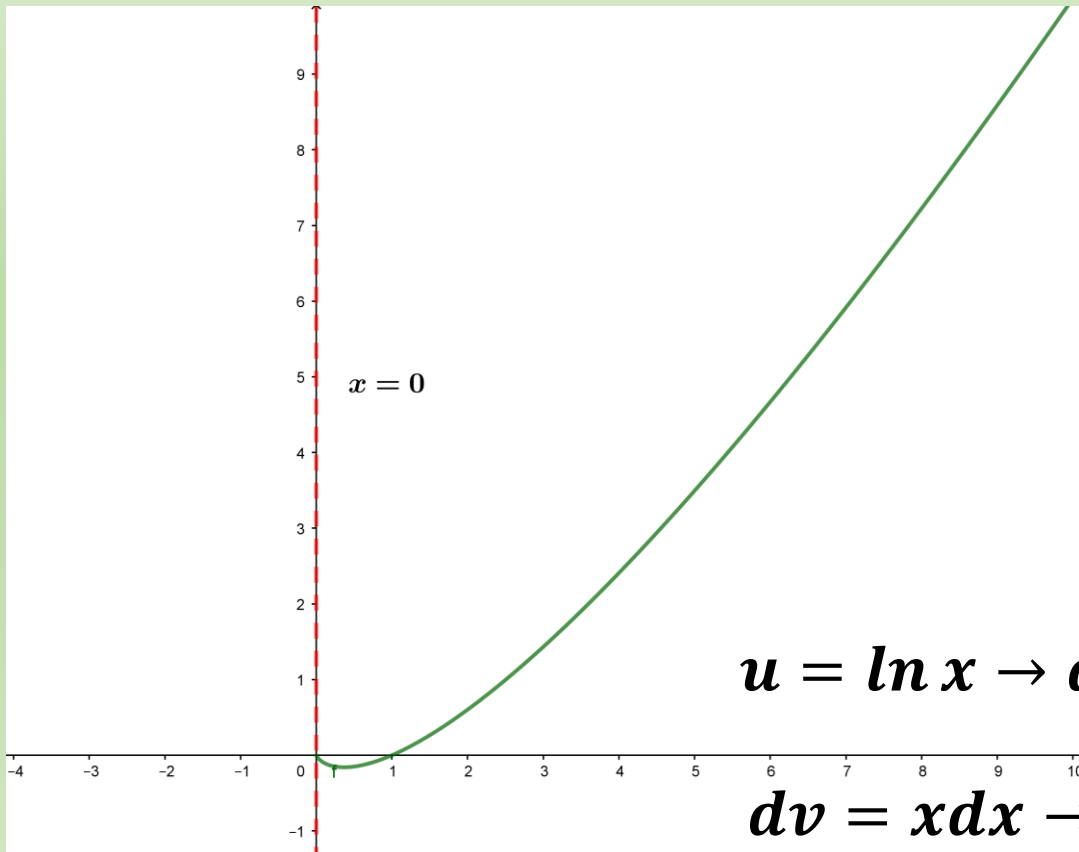
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{t_1 \rightarrow c^-} \overset{F(x)}{\int_a^{t_1} f(x) dx} + \lim_{t_2 \rightarrow c^+} \overset{G(x)}{\int_{t_2}^b f(x) dx}$$

Si ambos límites convergen la integral impropia converge, si por lo menos uno de los límites es infinito la integral diverge y si por lo menos uno de los dos no existe oscila.

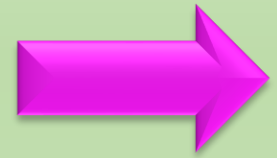
Ejemplos

$$\int_0^1 x \cdot \ln x \, dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 x \cdot \ln x \, dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 x \cdot \ln x \, dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} a^2 \ln a + \frac{1}{4} a^2 \right)$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} a^2 \ln a + \frac{1}{4} a^2 \right)$$



Cálculos Auxiliares



$$\int x \cdot \ln x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x \, dx$$

$$u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$
$$dv = x dx \rightarrow v = \frac{1}{2} x^2$$
$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2}}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\ln a}{\frac{1}{a^2}} \stackrel{L.H}{=} -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{a}}{-\frac{1}{3}a^{-3}} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{a}}{-\frac{1}{3a^3}} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow 0^+} (-3a^2) \\
&= -\frac{1}{4} \quad \text{Converge}
\end{aligned}$$

No representa el área bajo la curva

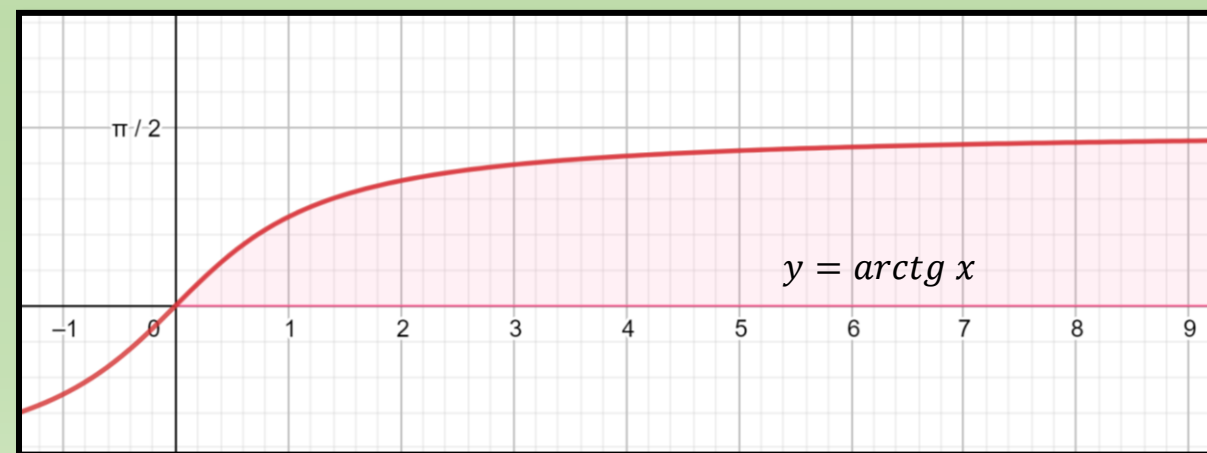
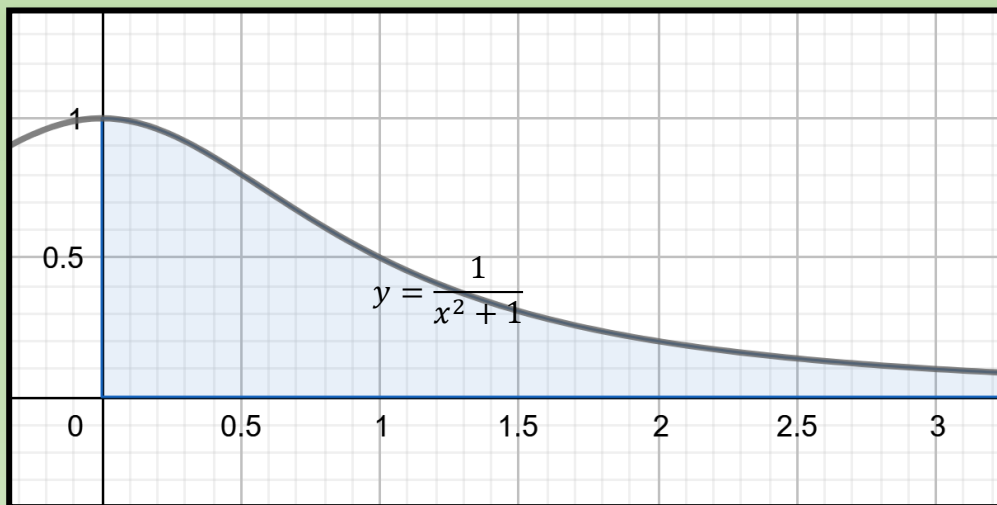
8-30) Resolver las siguientes integrales impropias e indique si son convergentes o divergentes

Recordemos:

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctg x$$

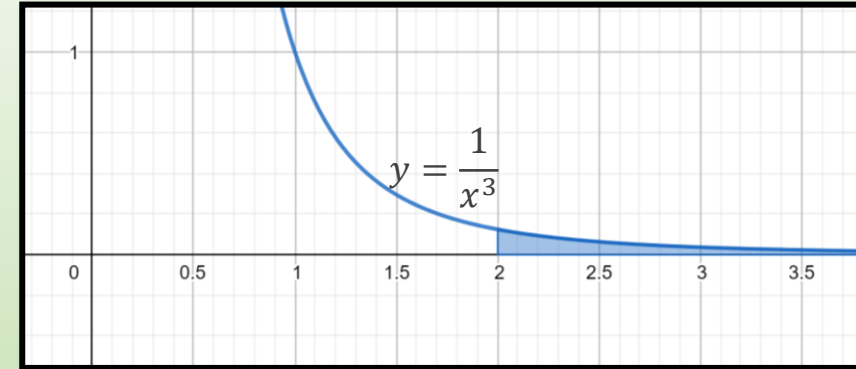
$$\text{a) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} =$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2 + 1} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctg b - \arctg 0) = \frac{\pi}{2} \quad \text{CONVERGE}$$



$$\text{d)} \quad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \int_2^{+\infty} x^{-3} dx$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b x^{-3} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{-2}}{-2} \right|_2^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2x^2} \Big|_2^b =$$



$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2b^2} - \left(-\frac{1}{2 \cdot 2^2} \right) \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{-\frac{1}{2b^2}}_0 + \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{8} u^2 \quad \text{CONVERGE}$$

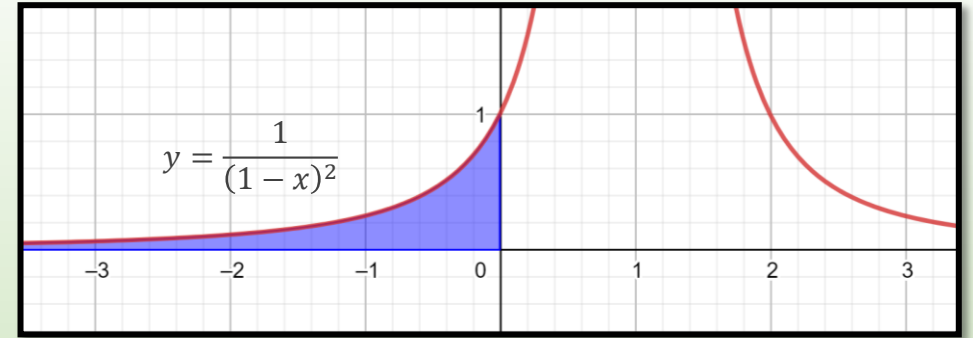
$$\text{e) } \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(1-x)^2} dx =$$

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{(1-x)^2} dx =$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{1-x} \right) \Big|_a^0$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{1-a} \right)$$

$$= \mathbf{1} \quad \text{CONVERGE}$$



Sustitución:

$$t = 1 - x$$

$$dt = -dx$$

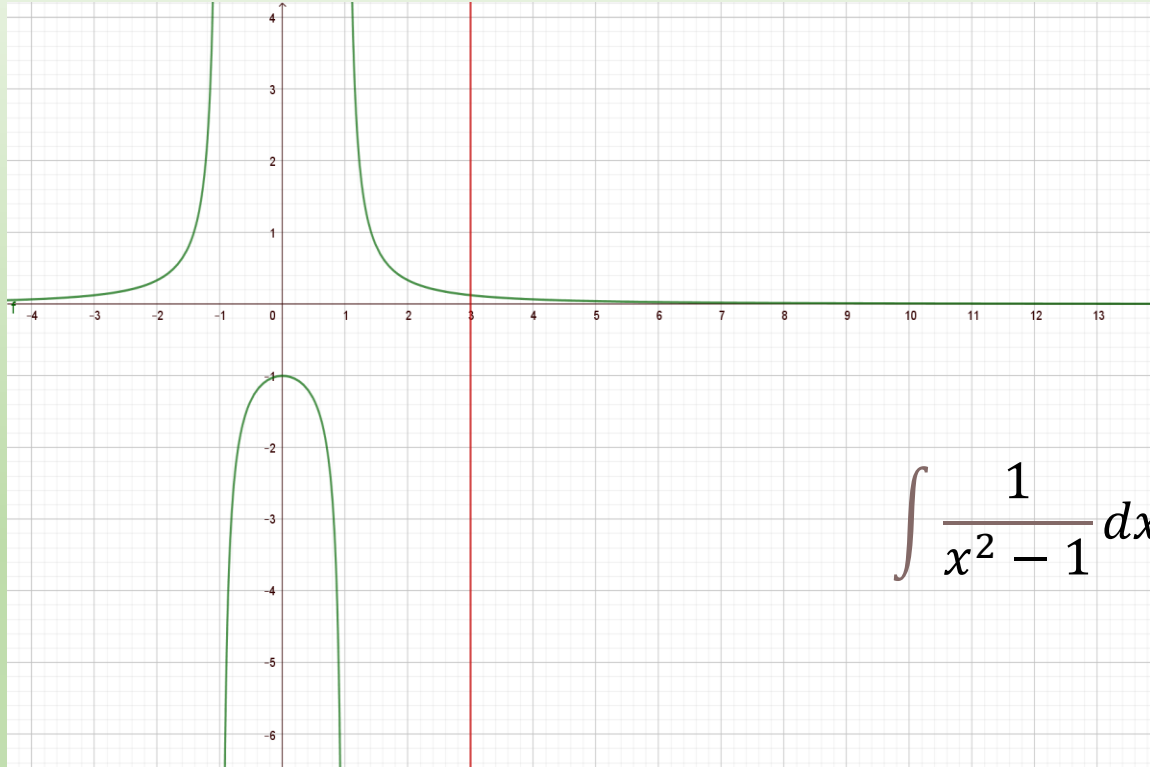
$$-dt = dx$$

$$\int \frac{1}{(1-x)^2} dx = - \int t^{-2} dt =$$

$$= - \frac{t^{-1}}{-1} = \frac{1}{t} = \frac{1}{1-x}$$

EJ-8-31

Hallar el área situada a la derecha de $x = 3$ y limitada por la curva de ecuación $\frac{1}{x^2 - 1}$ y el eje x.



$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 1} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_3^t \frac{1}{x^2 - 1} dx =$$

RESOLVEMOS POR FRACCIONES SIMPLES

(Puede ser por tabla)

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \int \frac{1}{(x + 1)(x - 1)} dx = \int \frac{A}{x + 1} dx + \int \frac{B}{x - 1} dx =$$

$$A = -1/2 \quad B = 1/2$$

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x - 1} dx = -\frac{1}{2} \ln|x + 1| + \frac{1}{2} \ln|x - 1|$$

$$A = \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_3^t \frac{1}{x^2-1} dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} \ln|t+1| + \frac{1}{2} \ln|t-1| + \frac{1}{2} \ln|3+1| - \frac{1}{2} \ln|3-1| \right)$$

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} \ln|t+1| + \frac{1}{2} \ln|t-1| + \frac{1}{2} \ln|4| - \frac{1}{2} \ln|2| \right) =$$

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\ln \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} + \ln \sqrt{\frac{4}{2}} \right) = \ln 1 + \ln \sqrt{2} = \ln \sqrt{2} \approx 0,34$$

CONVERGE

8-32) Hallar el área limitada por la curva de ecuación $y = \frac{1}{x \cdot (x-1)^2}$ y el eje x y situada en el semiplano $x \geq 2$

$$\text{Área} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{1}{x \cdot (x-1)^2}$$

$$\text{Área} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx$$

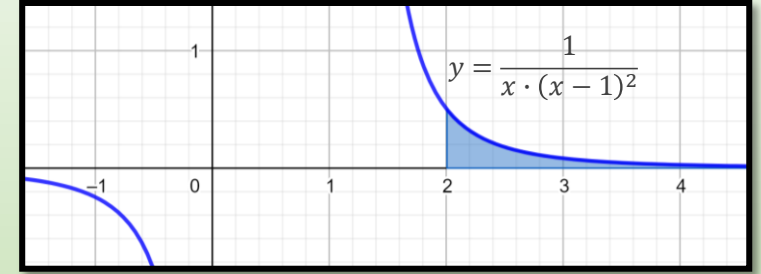
$$\text{Área} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} \right) \Big|_2^b$$

$$\text{Área} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\ln|b| - \ln|b-1|}_{\ln\left(\frac{b}{b-1}\right)} - \frac{1}{b-1} - \ln|2| + \ln|1| + 1 \right)$$

$\xrightarrow{0} \quad \quad \quad \xrightarrow{0}$

$\ln\left(\frac{b}{b-1}\right)$

Área = 1 - ln|2|



$$\int \frac{1}{x \cdot (x-1)^2} dx \rightarrow \text{Descomposición en fracciones simples}$$

$$\frac{1}{x \cdot (x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\frac{1}{x \cdot (x-1)^2} = \frac{A \cdot (x-1)^2 + B \cdot x \cdot (x-1) + C \cdot x}{x \cdot (x-1)^2}$$

$$x = 0 \rightarrow 1 = A$$

$$x = 1 \rightarrow 1 = C$$

$$x = 2 \rightarrow 1 = 1 + 2B + 2 \rightarrow -\frac{2}{2} = B$$

$$\int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \int t^{-2} dt = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x-1} \quad \left| \begin{array}{l} t = x-1 \\ dt = dx \end{array} \right.$$