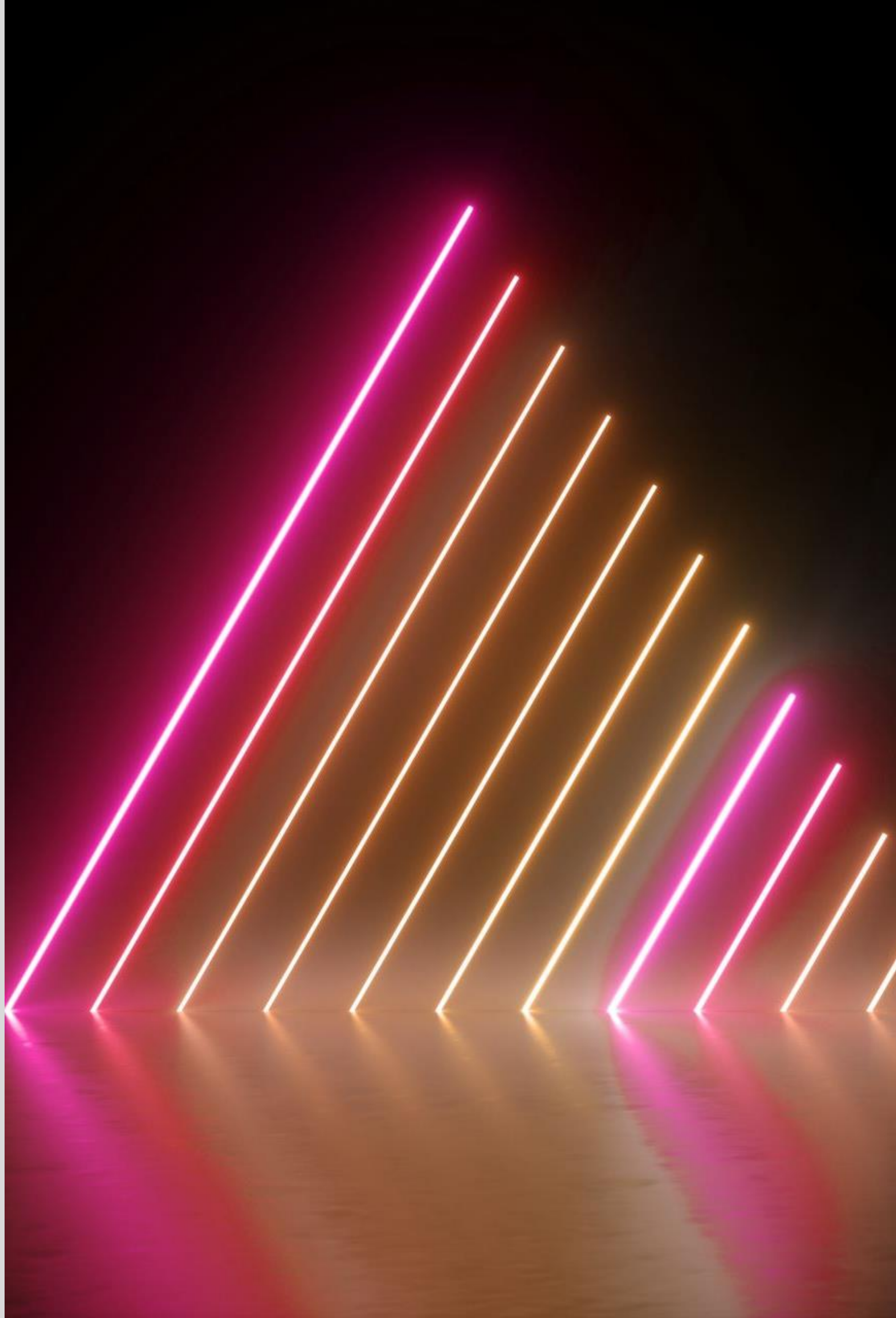
BASE Y DIMENSIÓN

Ejercicios integradores



Base de un espacio vectorial y ejercicios integrados.

Ya estudiamos:

- ✓ Conjunto generador
- ✓ Dependencia e independencia lineal de vectores.

Además, vimos que hay tres conceptos que están vinculados

- Combinación lineal
- Conjunto generador
- Dependencia e independencia lineal.

Hoy vamos a sumar uno más a este bloque: Base y dimensión de un espacio vectorial.

BASE

- Se llama base de un espacio vectorial V a todo conjunto L.I y generador de dicho espacio.

$\pi: x + y - z = 0$

- Base → L. independiente
- Base → Generador

$B = \{(0,1,1),(1,2,3)\}$ base

$B_1 = \{(0,1,1),(0,2,2),(1,2,3)\}$ no es base

LD

SC

- La base es la mínima cantidad de vectores bien elegidos para generar dicho espacio.

$B_2 = \{(0,1,1);(1,2,0)\}$

no es base de π → L.I; no generan π

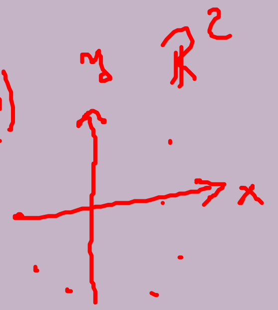
Ejemplos:

Determinar base y dimensión de los siguientes conjuntos:

$\vec{v} = (3,4) = 3(1,0) + 4(0,1)$

1) $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2\} \quad A = \mathbf{R}^2$

$B = \{(1,2) \,;\, (5,-1)\}$



Dos vectores no paralelos son base de este espacio.

$$B_1 = \{(1,4),(2,-3)\} \qquad Dim(A) = 2$$

¿Es la única base que podemos encontrar para el conjunto A?

La que estén formadas por los Versores fundamentales o canónicos. (Ya que son las que tienen más cantidad de ceros y facilitan los cálculos)

Esta base se llama: **Base canónica**

$$B_c = \{(1,0),(0,1)\}$$

DIMENSIÓN:

SE LLAMA ASÍ A LA CANTIDAD DE VECTORES QUE TIENE LA BASE.

Conclusión 1: Un espacio vector tiene infinitas bases.

$$B = \{(1,0,2);\ (1,1,1);\ (2,1,2)\}$$

$$\alpha(1,0,2) + \beta(1,1,1) + \gamma(2,1,2) = \bar{0} \quad \text{L.I ?}$$

SCD

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

2) $B = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3\} \quad B = \mathbf{R}^3$

Tres vectores L.I son base . Propongamos una base:

$$B_1 = \{(1,1,2),(3,1,-1),(4,2,0)\}$$

Sólo habría que verificar que son L.I ya que al ser 3 puede existir C.L entre ellos.

$n = 3$ } SCD

Hay varias formas de verificar esto, pero en todos los casos están asociadas a una única solución si resolvemos la C.L igualada al vector nulo.

- $\alpha(1,1,2 + \beta(3,1,-1) + \delta(4,2,0) = (0,0,0)$; si es SCD El determinante es distinto de 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2.2 - (-2).(-1) = 2$$

Dim(B) = 3

Desarrollo por F3

¿Qué base hubiese sido más fácil utilizar?
La canónica que en este caso sería:

$$B_c = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

Conclusión 2:

Mientras mayor sea la dimensión de un espacio más simple es utilizar la base canónica.

3) $D=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 / x+2y-z=0\}$ D es un plano que pasa por el origen.

- En este caso no trabajamos con todo el espacio sino con un subespacio. Base canónica no podemos utilizar.
- Dim D = 2, ya que la mínima cantidad de vectores que necesito para generar un plano son 2
- Para encontrar una base lo más simple es armar un vector genérico del subespacio.

Condición del subespacio: $x+2y-z=0$

$$x=-2y+z$$

$$\overline{x}=(-2y+z,y,z)$$

$$\overline{x}=(-2y,y,0)+(z,0,z)$$

$$\overline{x}=y(-2,1,0)+z(1,0,1)$$

$$B_D=\{(-2,1,0),(1,0,1)\}$$

Si despejaba otra letra hubiese obtenido otra base distinta. Si queremos verificar si el cálculo está bien hecho, reemplazamos los vectores obtenidos en la ecuación del plano y tienen que verificar dicha ecuación.

4) $E=\{(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4 / x=2y-z+t \wedge x+y+z=0\}$

No hay interpretación geométrica, pero si detectamos que hay dos condiciones:

$$\begin{cases} x-2y+z-t=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overline{x}=(-y-z\ ,y\ ,z,-3y)$$

$$\begin{cases} -3y-t=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

$$\to t=-3y$$

$$\to x=-y-z$$

$$\dim(E)=2$$

$$\boxed{B_E=\{(-1,1,0,-3),(-1,0,1,0)\}}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 2a \\ -a & a \end{pmatrix} \qquad b = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \qquad \dim(A) = 1$$

5) $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 3} \right\} \quad F = \mathbf{R}^{2\times 3}$

$$\bar{x} = (x, 2x+y, y) \qquad \dim(B) = 2$$

$$B = \{(1,2,0); (0,1,1)\}$$

- Dim (F) = 6 un vector por cada variable libre. Es casi imposible pensar una base para este espacio no canónica.

$$B_F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

TEOREMA SOBRE BASE:

LI

generan V

Sea $A = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, ..., \overline{v}_n\}$ base de un espacio vectorial V, entonces todo vector $\overline{u} \in V$ se puede escribir como **C.L única** de los vectores de la base A.

Base = {(1,0,1)}

Demostración:

Suponemos que $\overline{u} \in V$ puede escribirse a través de 2 C.L distintas usando los vectores de la base A

genera una recta

$(3,0,3) = \overset{3}{7}(1,0,1)$

$$\overline{u} = \alpha_1 \overline{v}_1 + \alpha_2 \overline{v}_2 + \alpha_3 \overline{v}_3 + ... + \alpha_n \overline{v}_n$$

$$\overline{u} = \beta_1 \overline{v}_1 + \beta_2 \overline{v}_2 + \beta_3 \overline{v}_3 + ... + \beta_n \overline{v}_n$$

---

restamos m.a.m

$$\overline{0} = (\underbrace{\alpha_1 - \beta_1}_{0})\overline{v}_1 + (\underbrace{\alpha_2 - \beta_2}_{0})\overline{v}_2 + ... + (\underbrace{\alpha_n - \beta_n}_{0})\overline{v}_n$$

Como A es base cada escalar vale 0

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0 \rightarrow \alpha_1 = \beta_1$$

$$\alpha_2 - \beta_2 = 0 \rightarrow \alpha_2 = \beta_2$$

.

.

.

$$\alpha_n - \beta_n = 0 \rightarrow \alpha_n = \beta_n$$

Contradicción. El teorema es válido.

1) Dado el conjunto

$$A=\{(1,k,0),(k,1,0)\}$$

a) Hallar el valor de k para que el conjunto sea L.D

b) Para el valor de k hallado describir geométricamente que genera. Escribir una base y su dimensión.

$\underline{\underline{SCI}}$

$\alpha(1,k,0)+\beta(k,1,0)=(0,0,0)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & 0 \\ 0 & 1-k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A)=1$

$n=2$

$1-k^2=0$

$k^2=1$

$|k|=\pm 1$

- a) Dos vectores son L.D si son proporcionales las componentes. (Son paralelos ya que viven en el espacio)

$$\frac{1}{k}=\frac{k}{1}$$

$$k^2=1$$

$$|k|=1$$

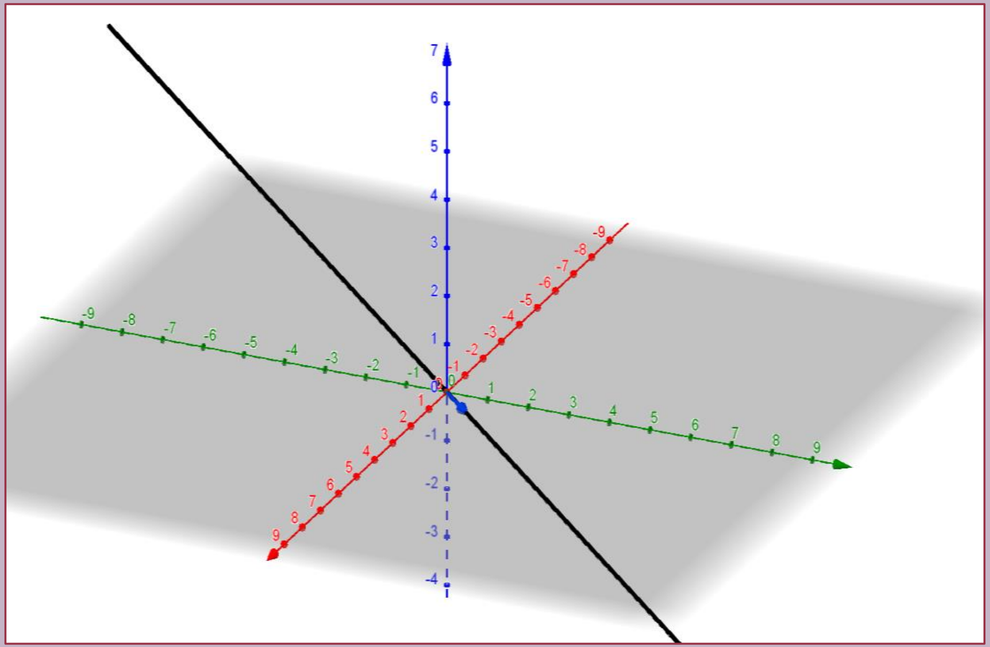
$$k=1 \vee k=-1$$

- Si k = 1 $gen(A) = \{(1,1,0),(1,1,0)\}$

Recta que pasa por el origen

$(x, y, z) = \lambda(1,1,0)\ \forall\lambda \in \mathbf{R}$ Dim(S) = 1

$B = \{(1,1,0)\}$



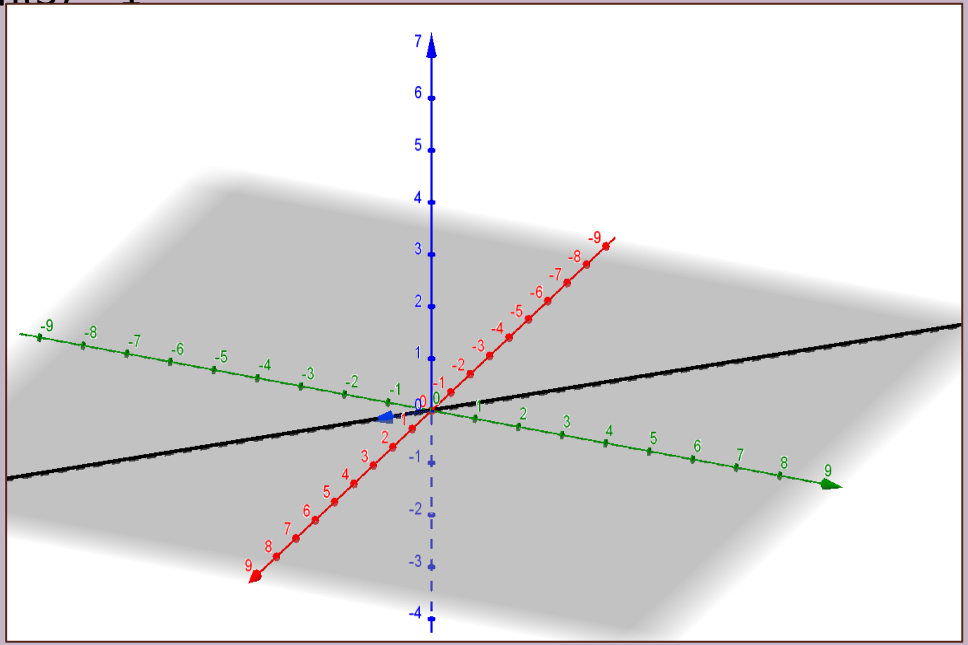
- Si k = -1 $gen(A) = \{(1,-1,0),(-1,1,0)\}$

Recta que pasa por el origen

$$(x, y, z) = \lambda(1,-1,0)\ \forall\lambda \in \mathbf{R}$$

$$B = \{(1,-1,0)\}$$

- Dim(S) = 1



Indicar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. En todos los casos justificar las respuestas.

Sea el espacio vectorial $(R^{2x2}, R, +, \cdot)$ y $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R^{2x2} / a = 3d \wedge b = 2c \right\}$ un subespacio.

(a) S es un subespacio de dimensión 3. F tiene 2 dim

$\bar{x} = \begin{pmatrix} 3d & 2c \\ c & d \end{pmatrix}$

(b) El conjunto $B \left\{ \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es un generador de S. V

(c) El conjunto $B` = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de S. V

(d) El conjunto C = $\left\{ \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\notin \text{ a } S} \right\}$ es un generador de S. F

(e) El conjunto $C` = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \right\}$ es una base de S. F

2) Sea V un Espacio vectorial. Indicar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas y Justificar. Si son falsas dar un contraejemplo, si es verdadero demostrar:

a) Si $\bar{v}$ es un vector no nulo de V, entonces $\{\overline{v}\}$ es L.I

Verdadera. Fue demostrada la clase anterior

b) Si $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son dos vectores cualesquiera de V entonces $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ es L.I

Falsa. Si son proporcionales o uno de ellos es el nulo no se cumple.

c) Si $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ son vectores de V tales que $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ es L I, $\{\bar{u}, \bar{w}\}$ es L I y $\{\bar{v}, \bar{w}\}$ es L I entonces $\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$ es L I en V

Falso, puede que $\overline{w} = \alpha\overline{u} + \beta\overline{v}$

d) Si $\{\bar{u}\ ,\bar{v}\ ,\bar{w}\}$ es un conjunto de vectores L I de V , entonces:

$\{\bar{u}+\bar{v}\ ,\bar{v}\ ,\bar{w},4\bar{w}\}$ **es L I en V**

Falso. El conjunto es L.D pues los dos últimos son proporcionales.

e) El $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$ es L.I $\Rightarrow \{\bar{a}-\bar{b},\bar{b},\lambda\bar{c}\}$ es L.I $\forall\ \lambda\ \in R$

Falso, Si $\lambda = 0$ el último vector es el nulo y eso lo transforma en L.D

f) $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\} \in\ R^3\ genera\ un\ sub(S) \wedge \dim(S)=1 \Rightarrow \lambda\bar{a}$ es un subespacio de dimensión $1\ \ \forall\ \lambda\ \in R$

Falso, pues puede ocurrir que $\bar{a}=\bar{0}\ \vee\ \bar{b}\ \parallel\ \bar{c}$

g) $(\bar{a}x\bar{b})\cdot\bar{c}=0$, entonces el subespacio generado por $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$ tiene dimensión 2

Falso, pues puede ocurrir que los tres sean paralelos y generan un sub. Dim 1

h)$\lambda\bar{u}$ genera una recta es $\Rightarrow \{\lambda\bar{u},\bar{v}\}$ es base de un plano

Falso, pues puede ocurrir que $\bar{v}\ \parallel\ \bar{u}$ y son L.D no son base.