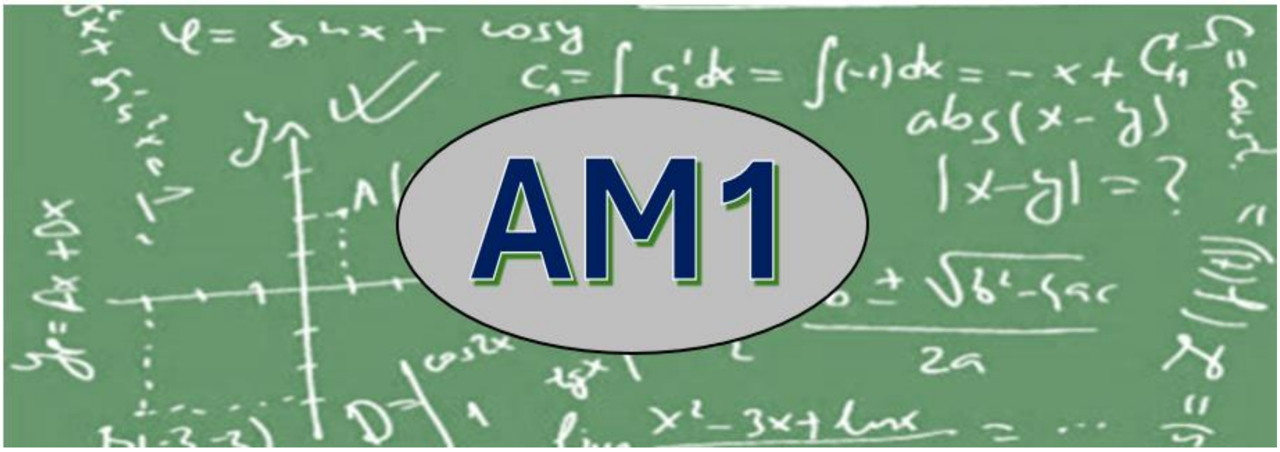


TRABAJO PRÁCTICO 8: INTEGRACIÓN DEFINIDA

ANÁLISIS MATEMÁTICO 1

UTN – Facultad Regional Haedo

TRABAJO PRÁCTICO 8: Integración Definida

Competencias

- Aplicar integrales para resolver situaciones problemáticas identificando el tipo de solución adecuada de acuerdo con el contexto ingenieril.
- Utilizar de manera efectiva las técnicas y herramientas de la ingeniería
- Aprender en forma continua y autónoma, utilizando los recursos de trabajo en clase, bibliográficos, digitales y multimediales.

Integral de Función Escalonada- Integral de Riemann
Teoremas y Propiedades del Cálculo Integral

Ej. 8-01 Calcular la suma de aproximación para la integral de la función dada, en el intervalo cerrado indicado y con el número de subintervalos señalado. Comparar los resultados calculando la primitiva de la función.

$f(x) = x^2$; [0; 8] para n = 2, n = 4, n=8

Teorema Fundamental del Cálculo Integral

Primera Parte *(derivada de la función integral)*

Si f es una función continua en [a, b] entonces

para $a \leq x \leq b$: la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable

y verifica $F'(x) = f(x)$ para todo x del intervalo.

Segunda Parte *(regla de Barrow)*

Si f es una función continua en el intervalo [a, b] y F una primitiva cualquiera,

entonces: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Ej. 8-02: En cada caso calcular F'(x)

a) $F(x) = \int_0^x \log(t^2+4)dt$. b) $F(x) = \int_0^x t^3 sent.dt$ c) $F(x) = \int_x^{10} (e^t - e^{-t}).dt$

Ej. 8-03: Considerar las funciones g y h definidas por $g(x) = \int_0^x f(u)du$ y $h(x) = \int_0^{g(x)} 3\, f(t)dt$ con f derivable tal que f (0) =2. Calcular h' (0).

Ej. 8-04: Calcular F'(x) para las siguientes funciones integrales:

$a)\ F(x) = \int_1^{x^3} \sqrt[3]{t^2+1}\, dt$ $b)\ G(x) = \int_2^{tgx} \frac{1}{1+t^2} dt$ $c)\ H(x) = \int_{-x}^{x} \cos(t^2+1)\, dt$

Ej. 8-05: hallar el valor de las integrales definidas, sobre los intervalos indicados en cada caso, aplicando la regla de Barrow:

a) $\int_0^1 x.e^x.dx =$ b) $\int_2^6 \frac{3+2x^2}{x^2}dx =$ c) $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx =$

d) $\int_1^2 \frac{4-x^3}{x^4}dx =$ e) $\int_1^3 \ln x.dx =$ f) $\int_{-2}^{5} (1-x-x^2)dx =$

<u>Ej. 8-06</u>

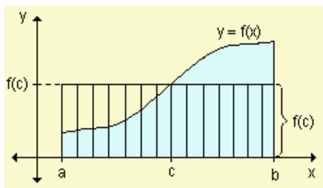
a) Sabiendo que $\int_1^x f(t)dt = x.\cos(\pi x)$, calcular f(x).
b) Sin resolver la integral, indicar dónde hay máximos y mínimos relativos de la función integral $F(x) = \int_0^x (t^2-1)dt$.
c) Sabiendo que F(x) es una primitiva de la función $f(x) = e^{2x^2}.4x$, determinar los extremos de F(x) y decidir si son máximos o mínimos.

<u>Ej. 8-07</u>

a) Sea $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$, calcular una aproximación de F (0,5) mediante un polinomio de Mac Laurin de tercer grado .
b) Calcular $\lim_{x\to 2}\left(\frac{\int_2^x \frac{sent}{t}dt}{\frac{x-2}{x}}\right)$
c) Clasificar la discontinuidad que presenta h(x) en x=1 siendo $h(x) = \frac{\int_0^{x-1}(t+4)dt}{x^2-1}$

<u>Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral</u>

Dada cualquier función f continua en el intervalo cerrado [a, b], existe un valor c en dicho intervalo tal que: $f(c) = \frac{\int_a^b f(x).dx}{b-a}$



La interpretación geométrica del Teorema permite observar que dicho punto c nos da en f(c) la altura que genera un rectángulo con área exacta igual al área bajo la curva, es decir:

$$\underbrace{f(c).(b-a)}_{\substack{base.altura \\ área\ del\ rectángulo}} = \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\substack{integral\ definida \\ área\ bajo\ la\ curva\ en\ el\ intervalo\ [a;b]}}$$

<u>Ej. 8-08</u> Obtenga el valor promedio de f en [a; b] y el valor de **x** que corresponde a dicho valor promedio: *y= 9-x²,* en [0;3]. Graficar.

<u>Ej. 8-9</u>: Dada la función $f(x) = x^2$, aplique el teorema del valor medio para hallar el punto c ϵ [0, 2] tal que dicha área limitada sea igual a la de un rectángulo de base 2 y altura f(c).

<u>Ej. 8-10</u>: Calcular el valor medio de la función $y=a.x^2$ en el intervalo [a; b].

Ej. 8-11:

Encontrar los valores reales de **b** tales que el valor medio de f(x)= 2+ 6x - $3x^2$ en el intervalo [0, **b**] sea igual a 3.

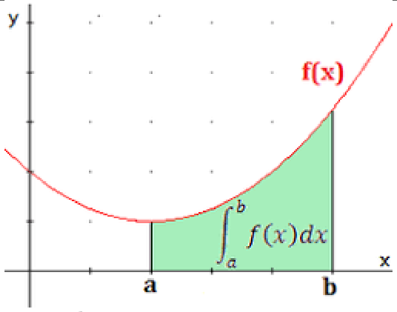
Ej. 8-12:

a) Suponga que la población mundial actual es de 5 mil millones y que la población dentro de **t** años está dada por la ley de crecimiento exponencial $p(t)= 5.10^6\, e^{0,023t}$. Hallar la población mundial promedio en los próximos 30 años.

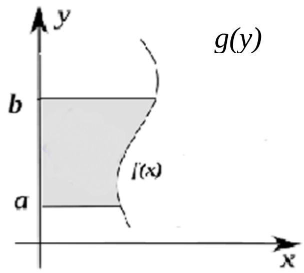
b) Se inyecta una dosis de 2 miligramos de cierta droga en el torrente sanguíneo de una persona. La cantidad de droga que queda en la sangre después de **t** horas está dada por $f(t)=2e^{-0.32t}$. Hallar la cantidad promedio de la droga en el torrente sanguíneo, durante las dos primeras horas.

c) La función $T(t) = 100 + 3t - 1/2t^2$ aproxima la temperatura a las t horas después de mediodía en un día típico de agosto en Las Vegas. Encontrar la temperatura media entre el mediodía y las 6 p.m.

Aplicación 1: Cálculo de Áreas (Coordenadas Cartesianas)



$$A = \int_a^b f(x).dx = F(b) - F(a)$$



$$A = \int_a^b g(y).dy = G(b) - G(a)$$

Ej. 8-13: Calcular el área encerrada por las curvas dadas y el eje de las x. En los casos indicados, utilizar el intervalo para la integración:

a) $y = \frac{1}{2}x^2 - 8$

b) $y = \frac{1}{2}x^2 + 4$; [-3,3]

c) $y = \cos x$; $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

d) $y = \frac{1}{x}$; [1, 3]

e) $y = -\frac{2}{x}$; [2, 4]

f) $y = \operatorname{sen} x. \cos x$; $[0, \frac{\pi}{2}]$

g) $y = \operatorname{sen}^2 x$; $[0, \frac{\pi}{2}]$

h) $y = \frac{\ln x}{x}$; [1, e]

i) $y = \sqrt{4+x}$; [0, 5]

Ej. 8-14: Se considera la función $g(x) = \begin{cases} x^2 & si\ -2 \leq x < 0 \\ 2x & si\ 0 \leq x < 2 \\ 10 - 3x & si\ 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$

Representarla y calcular el valor de las siguientes integrales definidas:

$I=\int_{-2}^{1} g(x)\,dx$ $J=\int_{1}^{4} g(x)\,dx$ $K=\int_{-2}^{4} g(x)\,dx$

<u>Ej. 8-15:</u> Calcular el área encerrada por las funciones y las rectas dadas:

a) $y = x^2 + 1$; $y = 0$; $x = -3$ y $x = 2$

b) $y = x^3$; $y = 0$; $x = 2$

c) $y = x^3 - 9$; $y = 0$; $x = -1$; $x = 2$

d) $y = arctg\, x$; $y = 0$; $x = 1$; $x = -1$

e) $y = 3x^2 - 2x$; $y = 0$; $x = -1$; $x = 1$

f) $y = \text{sen } x$; $y = 0$ (un período)

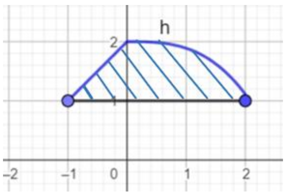
<u>Ej. 8-16:</u>

a) Calcular el área limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = |x-2|$

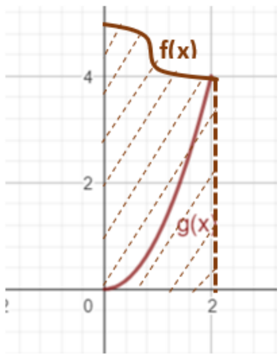
b) Comprobar que: $\int_0^2 |2x-1|\, dx = 5/2$

<u>Ej. 8-17</u>:

a) Sabiendo que el área de la región sombreada es 3/2, calcular $\int_0^2 h(x)dx =$



b) Sabiendo que el área de la región sombreada es 4 y que $g(x)=x^2$, calcular el área comprendida entre f(x) y g(x):



<u>Ej. 8-18</u>: Calcular el área encerrada por las curvas:

a) $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = -x^2 + 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = x - 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x^3 \\ y = 4.x \end{cases}$

d) $\begin{cases} y^2 = x - 1 \\ y = x - 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}.x^3 \\ y = x + 2 \\ x = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y = 2^x \\ y = 2^{-x} \\ y = 4 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2y^2 - 3y = x - 1 \\ y^2 - 2y = x - 3 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x = 4y^2 \\ x = 4(y-2)^2 \\ eje\ y \end{cases}$

i) $\begin{cases} y^2 = x + 4 \\ eje\ y \end{cases}$

<u>Ej. 8-19</u>: Calcular el área de las siguientes regiones

a) $\begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq 3.x + 4 \\ y \leq 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq x + 2 \\ y \leq -x + 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq -x^2 + 8 \\ y \geq 7x \end{cases}$

d) $\begin{cases} y \geq -\frac{1}{3}x + 1 \\ y \leq x + 1 \\ y \geq 5x - 15 \end{cases}$

Ej.8-20:

a) Determinar el valor de k>0, para que el área encerrada por las curvas dadas en el primer cuadrante y el eje x, sea la indicada.
   i) $y = kx + 5$; $x = k$. Área: 11/2   ii) $y = kx - x^2$. Área: 36

b) Hallar c>1, de modo que el área de la región limitada por las curvas $y = e^{2(x-5)}, y = e^{-2(x-5)}$ y la recta de ecuación $y=c$, sea igual a 1.

c) El área de la región limitada por las rectas $y = a.x$, $y = a^2$ y la curva $y = x^2$, es igual a 7/48. Calcular el valor de **a**.

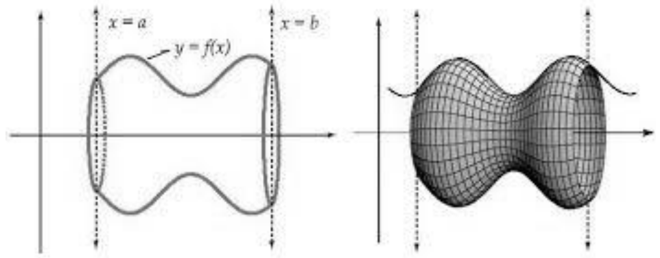
d) Hallar k para que $\int_{-2}^{6} f(x)dx = 1$ sí $f(x) = \begin{cases} x & -2 \leq x \leq 0 \\ 0{,}5 - kx & 0 < x \leq 4 \\ x - 4 & 4 < x \leq 6 \end{cases}$

e) Encontrar el número real b tal que la recta y=b divida la región limitada por las curvas $y=x^2$, y=4 en dos regiones con áreas iguales.

Aplicación 2: Cálculo de Volumen (Coordenadas Cartesianas)

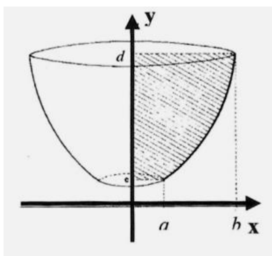
Volumen generado por y=f(x) girando alrededor del eje x, en un intervalo [a, b]

$$\boldsymbol{V_x = \pi \int_a^b f(x)^2 . dx}$$



Volumen generado por x=g(y) girando alrededor del eje y, en un intervalo [c, d]

$$\boldsymbol{V_y = \pi \int_c^d g(y)^2 . dy}$$



Ej. 8-21: Calcular el volumen engendrado por la figura encerrada por las curvas dadas, al girar alrededor del eje x.

a) $y = \frac{2}{3}x$; $y = 0$; $x = 2$; $x = 9$

b) $y = x^2$; $y = 0$; $x = -3$; $x = 3$

c) $y = x^2 + 3$; $y = 0$; $x = -2$; $x = 2$

d) $y = -x^2 + 4$; $y = 0$

e) $y^2 = 4x$; $y = 0$, $x = 4$

f) $y = 6 - 2x - x^2$; $y = 0$; $x = -1$; $x = 0$

Ej.8-22: Calcular el volumen del cuerpo generado por la figura encerrada por las curvas dadas, al girar alrededor del eje x:

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^2 + 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^2 + 3x \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = \frac{1}{32}x^3 \\ y^2 = x \end{cases}$

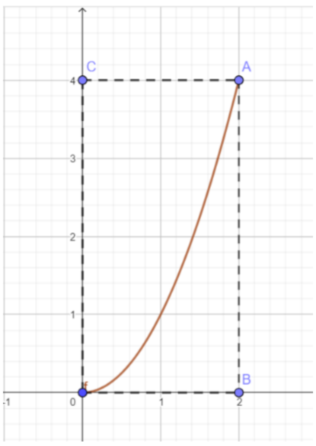
d) $\begin{cases} y = \frac{4}{x} \\ y = -x + 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} y = senx \\ y = \cos x \text{ (1er.cuadrante)} \\ x = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y = \sec x \\ y = tgx \\ x = 0 \, , \, x = 1 \end{cases}$

Ej. 8-23: Calcular el volumen del cuerpo, generado por la figura encerrada por las curvas dadas, al girar alrededor del eje y:

a) $\begin{cases} y = x^3 \\ y = 8 \\ x = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = arcsenx \\ y = \frac{\pi}{2} \\ x = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ y = 2 \quad ; \quad y = \frac{1}{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ y = 0 \quad ; \quad y = 4 \\ x = 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} y = x^{\frac{3}{2}} \\ y^2 = -x + 2 \\ y = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = 8x \end{cases}$

Ej. 8-24: La ecuación de la parábola representada en la figura es $y = x^2$.



Calcular el volumen generado cuando el área:

a) OAB gira alrededor del eje x
b) OAB gira alrededor del eje y
c) OAC gira alrededor del eje y
d) OAC gira alrededor del eje x

Ej.8-25:
Calcular el volumen generado por el área encerrada por las curvas $y = e^x$, $y = e$, $x = 0$ al girar alrededor de: a) El eje x b) el eje y

Ej.8-26: Calcular el volumen de:

a) Una esfera de radio r **b)** Un cono de altura h y radio de la base r

Ej. 8-27: Problemas de Aplicación:

a) Se te pide que diseñes una plomada de bronce que pese alrededor de 190 gr y decides darle la forma de un sólido de revolución que responde a la ecuación

$y = \frac{x}{12}\sqrt{36 - x^2}$. Hallar el volumen de la plomada. Si elegís bronce de 8,5 gr/cm^3 ¿Cuánto pesará la plomada?

b) Diseñas un tanque auxiliar de gasolina que debe caber bajo el fuselaje de un helicóptero para extender su alcance de vuelo. La forma del tanque resulta de hacer girar la curva $y = 1 - \frac{x^2}{16}$ con $-4 \le x \le 4$, alrededor del eje x. ¿Cuál será la capacidad del tanque?

Integrales Impropias o Generalizadas

Ej. 8-28: Resolver las siguientes integrales impropias e indique si son convergentes o divergentes.

a) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ b) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2+b^2x^2}$ c) $\int_0^{+\infty} e^{-x}.senx.\,dx$

d) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^3}$ e) $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(1-x)^2}dx$ f) $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$

g) $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2}$ h) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{senx}}dx$ i) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-1}$ j) $\int_4^5 \frac{dx}{(5-x)^{2/5}}$

k) $\int_2^3 \frac{dx}{x^2+x-6}$ l) $\int_0^1 x\ln x\,dx$ m) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ n) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4)^{3/2}}\,dx$

Ej. 8-29:

a) Hallar el área situada a la derecha de x =3 y limitada por la curva de ecuación $y = \frac{1}{x^2-1}$ y el eje x.

b) Hallar el área limitada por la curva de ecuación $y = \frac{1}{x.(x-1)^2}$ y el eje x y situada en el semiplano x $\ge$ 2.

c) Hallar el área de la región plana limitada por la gráfica de $f(x) = ln\,x$ y los ejes coordenados.

Ej. 8-30: Demostrar que el área del primer cuadrante limitada por $y = e^{-2x}$ es igual a $\frac{1}{2}$ (unidad de superficie) y que el volumen generado en la rotación de dicha área alrededor del eje x es $\frac{1}{4}\pi$ (unidad de volumen).

Ejercicios conceptuales Teórico-Práctico

Ej. 8-31: Resolver las siguientes situaciones problemáticas, aplicando conceptos y propiedades de integral definida:

a) Demostrar que: $\int_1^a \frac{1}{t}dt + \int_1^b \frac{1}{t}dt = \int_1^{ab} \frac{1}{t}dt$

b) Demostrar que los valores de las siguientes expresiones no dependen de x.

e) $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ ii) $\displaystyle\int_{-\cos x}^{senx} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

c) Siendo f integrable en el intervalo [-π,π], demostrar que el valor mínimo de:

$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - a\cos nx)^2\ dx$ es para $a = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx$

d) Suponer que el área de la región entre el gráfico de una función positiva, continua f y el eje x desde $x = a$ hasta $x = b$ es de 4 unidades cuadradas. Hallar el área entre las curvas $y = f(x)$ e $y = 2f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

Ej.8-01: Para n=2 → A~160,   para n=4 → A~168,   para n=8 → A~170

Ej. 8-02:
a) F'(x) = f(x) = $log(x^2+4)$ b) F'(x) = f(x) = x^3. sen x   c) F'(x) = f(x) =$e^{-x} - e^{x}$

Ej. 8-03: h'(0)=12

Ej. 8-04: a)F'(x)=$3x^2\sqrt[3]{x^6+1}$ b) G'(x)=1 c) H'(x)=$2\cos(x^2+1)$

Ej.8-05: a) 1   b) 9   c) 1-π/4   d) 7/6-ln2   e) 3ln3-2   f) –287/6

Ej. 8-06
a) $f(x) = \cos(\pi x) - x\pi\, sen(\pi x)$
b) En x=-1: máximo relativo;   En x=1: mínimo relativo
c) En x=0: mínimo relativo

Ej. 8-07: a) F (0,5) ≅ $\frac{11}{24}$ b) 2 sen (2)   c) discontinuidad evitable

Ej.8-08: V.P.= 6, en x=$\sqrt{3}$

Ej.8-09: c=2/$\sqrt{3}$

Ej. 8-10:   μ=$\frac{a}{3}(b^2+ab+a^2)$

Ej. 8-11: b_1 = 3/2+$\sqrt{5/4}$ b_2 = 3/2 - $\sqrt{5/4}$

Ej.8-12: a) Aprox. 6,44 mil millones   b) Aprox. 1,47 mg   c) 103°

Ej. 8-13: a) 128/3 b)33 c) 2 d) ln3 e) 2ln2 f) ½ g) π/4 h)1/2 i)38/3

Ej. 8-14: I=11/3 J=19/3 K=10

Ej. 8-15: a) 50/3 b) 4 c) 93/4 d) π/2 - ln2 e) 62/27 f) 4

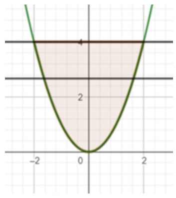
Ej. 8-16: a) 4,5

Ej.8-17: a) 3 b) 4/3

Ej. 8-18: a) 64/3 b)9/2 c) 8 d)9/2 e) 13/8 f) 16-6ln2   g) 9/2 h) 8/3 i)32/3

Ej. 8-19: a) 15/2 b)7/3 c) 89/6 d)8

Ej. 8-20: a) $i)1.028\ ii)\ 6$ b) c=e   c) $a=\sqrt[3]{-\frac{7}{8}}\quad y\quad a=\sqrt[3]{\frac{7}{8}}$



d) $k = \frac{11}{8}$ e) y=8/3

Ej. 8-21: a) π 2884/27 b) π 486/5 c) π 404/5 d) π 512/15 e) 32π f) π 668/15

Ej. 8-22: a) π 512/3 b) π 81/32 c) π 40/7 d) π 9 e) π ½ f) π

Ej. 8-23: a) π 96/5 b) π^2/4 c) 6π d) π 172/3 e) π 256/105 f) π 24/5

Ej.8-24: a) π 32/5 b) 8π c) 8π d) π 128/5

Ej.8-25: a) $\pi(e^2+1)/2$ b) $\pi(e-2)$

Ej.8-26: a) V_e=4/3 π $r^3 u^3$ b) V_c=1/3π $r^2 h\ u^3$

Ej.8-27: a) V=22.6195 cm^3 y P=192.27grs b) V=13.4042 u^3.

Ej.8-28: a) $\frac{\pi}{2}$ $b)\frac{\pi}{2|ab|}$ $c)\frac{1}{2}$ $d)\frac{1}{8}$ $e)1$ $f)1$ $g)\infty$ $h)2^{\frac{3}{4}}$ $i)-\infty$ $j)\frac{5}{3}$

$k)+\infty$ $l)-\frac{1}{4}$ $m)\,\pi$ $n)\,0$

Ej.8-29: $a)Arg\ Th$ (1/3) $\cong 0.347$ b) $1-\ln 2 \cong 0.307$ c) 1

Ej.8-30: *a)* Es correcto.