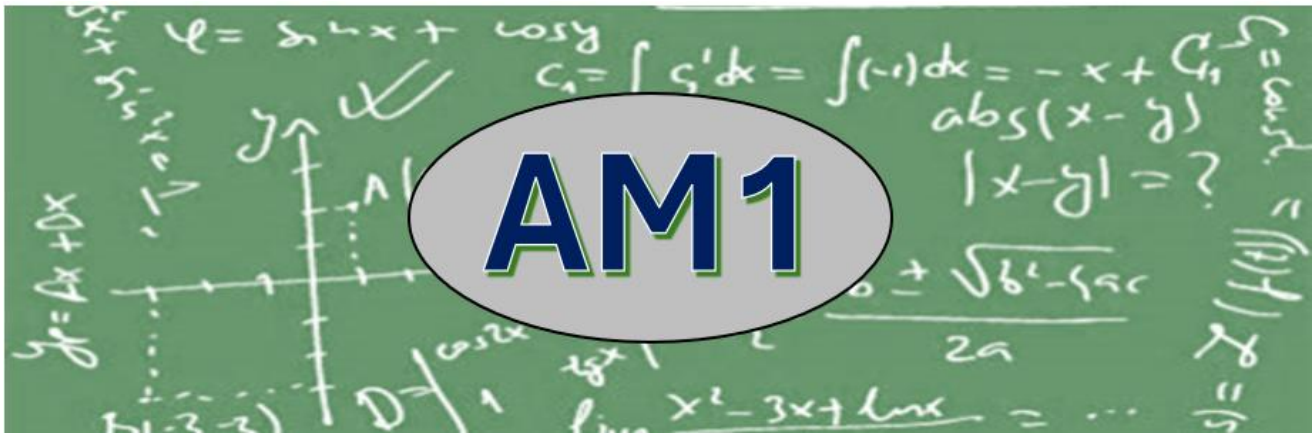


TRABAJO PRÁCTICO N.º 8: INTEGRAL DEFINIDA

ANÁLISIS MATEMÁTICO 1

UTN – Facultad Regional Haedo

TRABAJO PRÁCTICO 8: INTEGRAL DEFINIDA

Competencias

- Aplicar integrales para resolver situaciones problemáticas identificando el tipo de solución adecuada de acuerdo con el contexto ingenieril.
- Utilizar de manera efectiva las técnicas y herramientas de la ingeniería
- Aprender en forma continua y autónoma, utilizando los recursos de trabajo en clase, bibliográficos, digitales y multimediales.

Suma de Riemann

Ej. 8-01 Calcular una suma de aproximación para la integral de la función dada, en el intervalo cerrado indicado y con el número de subintervalos señalado.

f (x) = x^2; [0,8] para n = 2, n = 4, n = 8

Teorema Fundamental del Cálculo Integral

Primera Parte *(derivada de la función integral)*

Si f es una función continua en [a, b] entonces para a ≤ x ≤ b: la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable y verifica $F'(x) = f(x)$ para todo x del intervalo.

Segunda Parte *(regla de Barrow)*

Si f es una función continua en el intervalo [a, b] y F una primitiva cualquiera, entonces: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Ej. 8-02 En cada caso calcular F'(x)

a) $F(x) = \int_0^x \log(t^2+4)dt$. b) $F(x) = \int_0^x t^3 sent.dt$ c) $F(x) = \int_x^{10} (e^t - e^{-t}).dt$

Ej. 8-03 Considerar las funciones g y h definidas por $g(x) = \int_0^x f(u)du$ y $h(x) = \int_0^{g(x)} 3\, f(t)dt$ con f derivable tal que f (0) = 2. Calcular $h'(0)$

Ej. 8-04 Calcular F'(x) para las siguientes funciones integrales

a) $F(x) = \int_1^{x^3} \sqrt[3]{t^2+1}\ dt$; b) $G(x) = \int_1^{tg\,x} \frac{1}{t^2+1}\ dt$; c) $H(x) = \int_{-x}^{x} \cos(t^2+1)\ dt$

Ej. 8-05 Hallar el valor de las integrales definidas, sobre los intervalos indicados en cada caso, aplicando la regla de Barrow:

a) $\int_0^1 x.e^x.dx =$ b) $\int_2^6 \frac{3+2x^2}{x^2}dx =$ c) $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx =$

d) $\int_1^2 \frac{4-x^3}{x^4}dx =$ e) $\int_1^3 \ln x.dx =$ f) $\int_{-2}^5 (1-x-x^2)dx =$

Ej. 8-06

a) Sabiendo que $\int_1^x f(t)dt = x.\cos(\pi x)$, calcular f(x)

b) Aplicando el T.F.C.I, indicar dónde hay extremos relativos de la función integral $\int_0^x (t^2-1)dt$

c) Sabiendo que F(x) es una primitiva de la función f(x) = $e^{2x^2}.4x$, determinar los extremos de F (x) y decidir si son máximos o mínimos.

Ej. 8-07

a) Sea $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$, calcular una aproximación de F (0,5) mediante un polinomio de Mac Laurin de tercer grado

b) Calcular los siguientes limites: i) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{\int_2^x \frac{sen\ t}{t}}{\frac{x-2}{x}}\right)$; ii) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{\ln x.\int_2^x \frac{sen\ t}{t}dt}{x^2-4}\right)$

c) Clasificar la discontinuidad que presenta h(x) = $\frac{\int_0^{x-1}(t+4)dt}{x^2-1}$

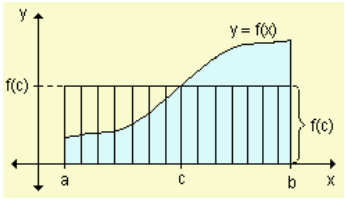
d) Si g es continua y g' (2) = 4, calcular $\lim_{x\to 2}\frac{\int_{e^2}^{e^x}[g(\ln t)-g(2)]dt}{(x-2)^2}$.

e) Encontrar una función f y un número a tal que: 6+$\int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\ dt = 2\sqrt{x}$ para $x > 0$.

f) Encontrar el intervalo sobre el cual la curva y=$\int_0^x \frac{1}{1+t+t^2}\ dt$ es cóncava positiva. ¿Tiene punto de inflexión? Aplicar el teorema fundamental

Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral

Dada cualquier función f continua en el intervalo cerrado [a, b], existe un valor c en dicho intervalo tal que: $f(c) = \frac{\int_a^b f(x).dx}{b-a}$



La interpretación geométrica del Teorema permite observar que dicho punto c nos da en f(c) la altura que genera un rectángulo con área exacta igual al área bajo la curva, es decir:

$$\underbrace{f(c).(b-a)}_{\substack{base.altura \\ área\ del\ rectángulo}} = \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\substack{integral\ definida \\ área\ bajo\ la\ curva\ en\ el\ intervalo\ [a;b]}}$$

Ej. 8-08 Obtenga el valor promedio de f en [a; b] y el valor de **x** que corresponde a dicho valor promedio: $y= 9-x^2$, en [0;3]. Graficar.

Ej. 8-09: Dada la función $f(x) = x^2$, aplique el teorema del valor medio para hallar el punto c ∈ [0, 2] tal que dicha área limitada sea igual a la de un rectángulo de base 2 y altura f(c).

Ej. 8-10: Calcular el valor medio de la función $y=a.x^2$ en el intervalo [a; b].

Ej. 8-11: Encontrar los valores reales de **b** tales que el valor medio de $f(x)= 2+ 6x - 3x^2$ en el intervalo [0, **b**] sea igual a 3.

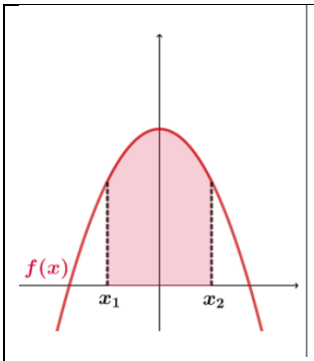
Ej. 8-12:

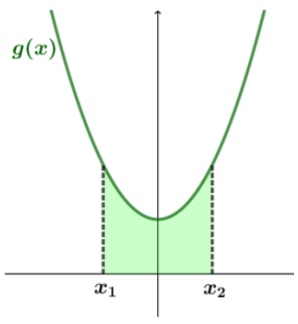
a) Suponga que la población mundial actual es de 5 mil millones y que la población dentro de **t** años está dada por la ley de crecimiento exponencial $p(t)=5.10^6\ e^{0,023t}$.
Hallar la población mundial promedio en los próximos 30 años.

b) Se inyecta una dosis de 2 miligramos de cierta droga en el torrente sanguíneo de una persona. La cantidad de droga que queda en la sangre después de **t** horas está dada por $f(t)=2e^{-0.32t}$. Hallar la cantidad promedio de la droga en el torrente sanguíneo, durante las dos primeras horas.

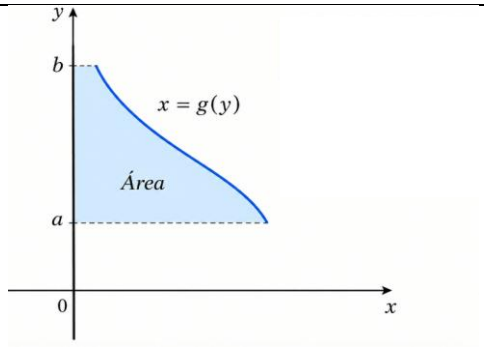
c)La función $T(t) = 100+3t-1/2t^2$ aproxima la temperatura a las t horas después del mediodía en un día de agosto en Las Vegas. Encontrar la temperatura media entre el mediodía y las 6 p.m.

Aplicación 1: Cálculo de Áreas (Coordenadas Cartesianas)





$$A = \int_a^b f(x).dx = F(b) - F(a)$$



$$A = \int_c^d g(y).dy = G(b) - G(a)$$

Ej. 8-13: Calcular el área encerrada por las curvas dadas y el eje de las x. En los casos indicados, utilizar el intervalo para la integración:

a) $y = \frac{1}{2}x^2 - 8$

b) $y = \frac{1}{2}x^2 + 4$; [-3,3]

c) y = cos x; $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

d) $y = \frac{1}{x}$; [1, 3]

e) $y = -\frac{2}{x}$; [2, 4]

f) y = sen x. cos x; $[0, \frac{\pi}{2}]$

g) $y = \text{sen}^2 x$; $[0, \frac{\pi}{2}]$

h) $y = \frac{\ln x}{x}$; [1, e]

i) $y = \sqrt{4+x}$; [0, 5]

Ej. 8-14: Se considera la función $g(x) = \begin{cases} x^2 & si \ -2 \le x < 0 \\ 2x & si \ 0 \le x < 2 \\ 10 - 3x & si \ 2 \le x \le 4 \end{cases}$

Representarla y calcular el valor de las siguientes integrales definidas:

$I = \int_{-2}^{1} g(x)\,dx$ $\quad$ $J = \int_{1}^{4} g(x)\,dx$ $\quad$ $K = \int_{-2}^{4} g(x)\,dx$

Ej. 8-15: Calcular el área encerrada por las funciones y las rectas dadas:

a) $y = x^2 + 1$; y = 0; x = -3 y x = 2

b) $y = x^3$; y = 0; x = 2

c) $y = x^3 - 9$; y = 0; x = -1; x = 2

d) $y = arctg\ x$; y = 0; x = 1; x = -1

e) $y = 3x^2 - 2x$; y = 0; x = -1; x = 1

f) y = sen x; y = 0 (un período)

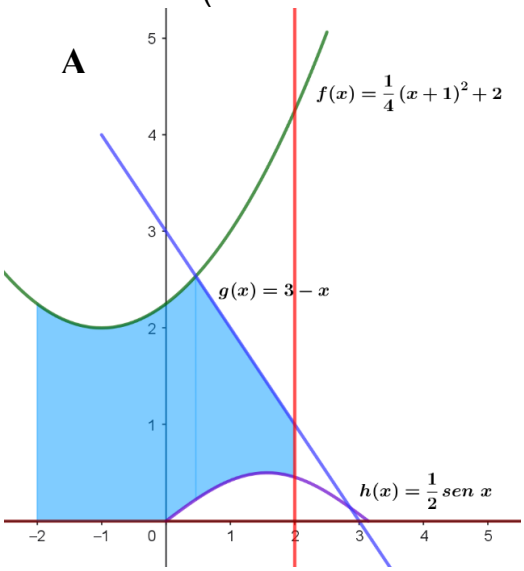
Ej. 8-16

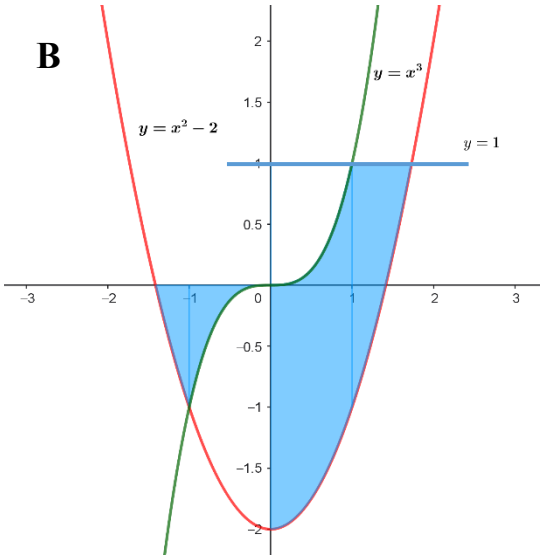
a) Calcular el área limitada por las curvas: $y = x^2$ e $y = |x-2|$

b) Calcular el área limitada por la curva $y = |2x - 1|$ en el intervalo [0,2]

Ej. 8-17

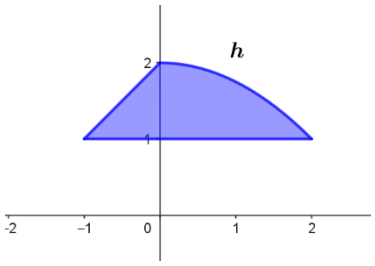
a) Plantear las integrales necesarias para calcular el área de la región sombreada. (No es necesario resolver las integrales y obtener el área)



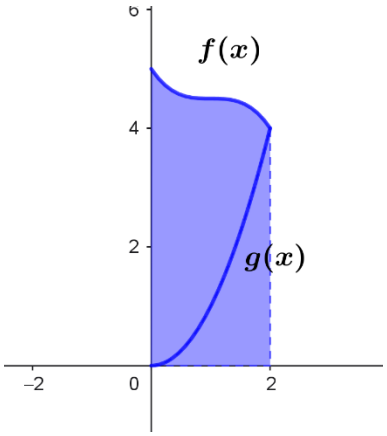


Ej. 8-18

a) Sabiendo que el área de la región sombreada es 3/2, calcular $\int_0^2 h(x)dx$



b) Sabiendo que el área de la región sombreada es 9 y que $g(x) = x^2$, calcular el área comprendida entre f(x) y g(x)



Ej. 8-19: Calcular el área encerrada por las curvas:

a) $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = -x^2 + 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = x - 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x^3 \\ y = 4.x \end{cases}$

d) $\begin{cases} y^2 = x - 1 \\ y = x - 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}.x^3 \\ y = x + 2 \\ x = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y = 2^x \\ y = 2^{-x} \\ y = 4 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2y^2 - 3y = x - 1 \\ y^2 - 2y = x - 3 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x = 4y^2 \\ x = 4(y-2)^2 \\ eje\ y \end{cases}$

i) $\begin{cases} y^2 = x + 4 \\ eje\ y \end{cases}$

Ej. 8-20: Calcular el área de las siguientes regiones

a) $\begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq 3.x + 4 \\ y \leq 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq x + 2 \\ y \leq -x + 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq -x^2 + 8 \\ y \geq 7x \end{cases}$ d) $\begin{cases} y \geq -\frac{1}{3}x + 1 \\ y \leq x + 1 \\ y \geq 5x - 15 \end{cases}$

Ej.8-21:

a) Determinar el valor de k>0, para que el área encerrada por las curvas dadas en el primer cuadrante y el eje x, sea la indicada.

i) $y = kx + 5;\ x = k$. Área: 11/2 ii) $y = kx - x^2$. Área: 36

b) Hallar c>1, de modo que el área de la región limitada por las curvas $y = e^{2(x-5)}, y = e^{-2(x-5)}$ y la recta de ecuación *y=c*, sea igual a 1.

c) El área de la región limitada por las rectas $y = a.x,\ y = a^2$ y la curva $y = x^2$, es igual a 7/48. Calcular el valor de **a**.

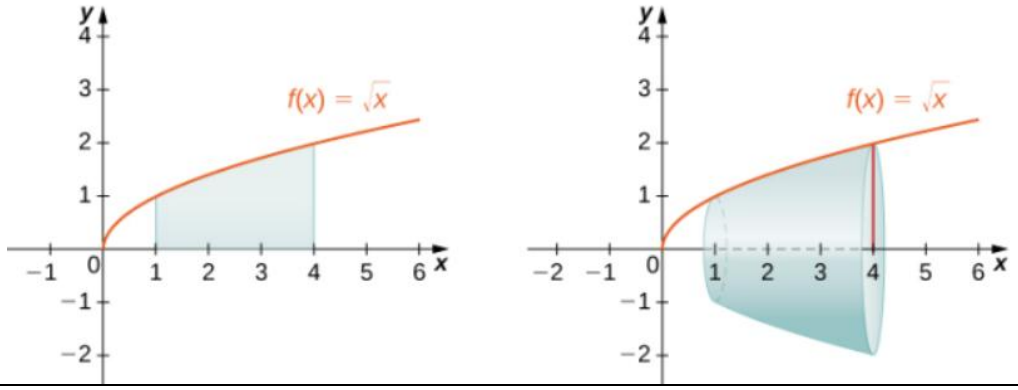
d) Hallar k para que $\int_{-2}^{6} f(x)dx = 1$ sí f(x)= $\begin{cases} x & -2 \leq x \leq 0 \\ 0{,}5 - kx & 0 < x \leq 4 \\ x - 4 & 4 < x \leq 6 \end{cases}$

e) Encontrar el número real b tal que la recta y=b divida la región limitada por las curvas y=x^2; $y = 4$ en dos regiones de áreas iguales.

Aplicación 2: Cálculo de Volumen (Coordenadas Cartesianas)

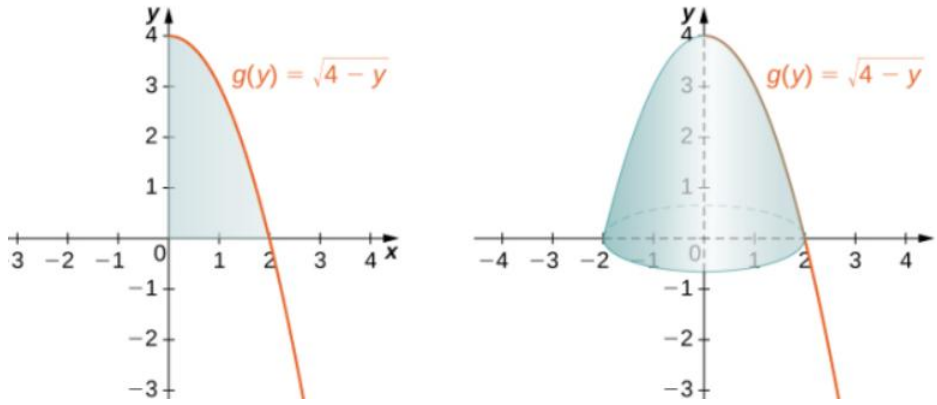
Volumen generado por y=f(x) girando alrededor del eje x, en un intervalo [a, b]

$$V_x = \pi \int_a^b f(x)^2 . dx$$



Volumen generado por x=g(y) girando alrededor del eje y, en un intervalo [c, d]

$$V_y = \pi \int_c^d g(y)^2 . dy$$



Ej. 8-22: Calcular el volumen engendrado por la figura encerrada por las curvas dadas, al girar alrededor del eje x.

$a) y = \frac{2}{3}x; y = 0; x = 2; x = 9$

$b) y = x^2; y = 0; \quad x = -3 \quad ; \quad x = 3$

$c) \quad y = x^2 + 3; y = 0 \quad ; x = -2 \quad ; x = 2$

$d) \quad y = -x^2 + 4 \quad ; \quad y = 0$

$e) \quad y^2 = 4x \quad ; \quad y = 0 \quad , \quad x = 4$

$f) y = 6 - 2x - x^2; y = 0; x = -1; x = 0$

Ej.8-23: Calcular el volumen del cuerpo generado por la figura encerrada por las curvas dadas, al girar alrededor del eje x:

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^2 + 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^2 + 3x \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = \frac{1}{32}x^3 \\ y^2 = x \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = \frac{4}{x} \\ y = -x + 5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = senx \\ y = \cos x \\ x = 0 \end{cases}$ (1er.cuadrante)

f) $\begin{cases} y = \sec x \\ y = tgx \\ x = 0 \, , \, x = 1 \end{cases}$

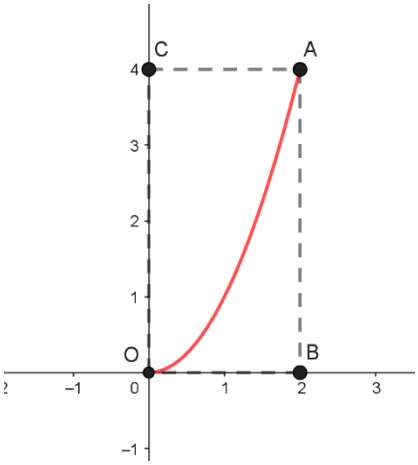
Ej. 8-24: Calcular el volumen del cuerpo, generado por la figura encerrada por las curvas dadas, al girar alrededor del eje y:

a) $\begin{cases} y = x^3 \\ y = 8 \\ x = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = arcsen\,x \\ y = \dfrac{\pi}{2} \\ x = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = \dfrac{2}{x} \\ y = 2 \quad ; \quad y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ y = 0 \quad ; \quad y = 4 \\ x = 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} y = x^{\frac{3}{2}} \\ y^2 = -x + 2 \\ y = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = 8x \end{cases}$

Ej. 8-25: La ecuación de la parábola representada en la figura es $y = x^2$.

Calcular el volumen generado cuando el área:



a) OAB gira alrededor del eje x
b) OAB gira alrededor del eje y
c) OAC gira alrededor del eje y
d) OAC gira alrededor del eje x

Ej.8-26: Calcular el volumen generado por el área encerrada por las curvas $y = e^x$, $y = e$, $x = 0$ al girar alrededor de: a) El eje x b) el eje y

Ej.8-27: Calcular el volumen de:

a) Una esfera de radio r **b)** Un cono de altura h y radio de la base r

Integrales Impropias o Generalizadas

Ej. 8-28: Resolver las siguientes integrales impropias e indique si son convergentes o divergentes.

$a) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} dx$ $b) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2+b^2x^2}$ $c) \int_0^{+\infty} e^{-x}.senx.\ dx$ $d) \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^3}$

$f) \int_{-\infty}^{0} e^x dx$ $g) \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2}$ $h) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{senx}} dx$ $i) \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-1}$

$j) \int_4^5 \frac{dx}{(5-x)^{2/5}}$ $\quad k)\ \int_2^3 \frac{dx}{x^2+x-6}$ $\quad l) \int_0^1 x \ln x \, dx$ $\quad n)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4)^{3/2}} dx$

Ej. 8-29:

a) Hallar el área situada a la derecha de $x = 3$ y limitada por la curva de ecuación $y = \frac{1}{x^2-1}$ y el eje x.

b) Hallar el área limitada por la curva de ecuación $y = \frac{1}{x.(x-1)^2}$ y el eje x y situada en el semiplano x ≥ 2.

c) Hallar el área de la región plana limitada por la gráfica de $f(x) = \ln x$ y los ejes coordenados.

d)Demostrar que el área del primer cuadrante limitada por $y = e^{-2x}$ es igual a $\frac{1}{2}$ (unidad de superficie) y que el volumen generado en la rotación de dicha área alrededor del eje x es $\frac{1}{4}\pi$ (unidad de volumen).

e) Suponer que el área de la región entre el gráfico de una función positiva, continua f y el eje x desde $x = a$ hasta $x = b$ es de 4 unidades cuadradas. Hallar el área entre las curvas $y = f(x)$ e $y = 2f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$.

EJERCICIOS INTEGRADORES DE LA UNIDAD 8

1-Dada la igualdad g(x). $(\frac{1}{2}x^2 + 3) = 2x^2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\int_1^{x^2} g(\sqrt{u})\, du$ tal que g es una función continua y derivable para todo x >0, se pide:

a) Analizar la convergencia de $\int_1^{+\infty} g'(x)dx$
b) Determinar la función g(x) tal que g $(1) = 1$

2-Calcular el área limitada por la curva de f(x) = $x.e^{\frac{-x^2}{2}}$ y su asíntota

3- Calcular $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ si f es continua en [1; ∞) y satisface la ecuación $\frac{1}{x^2} + \int_1^{\ln x} f(e^t)dt = \frac{1}{x^3}$

4-Sea la función $F(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{1+t}$ dt, x≥ 0. Sea desea estudiar el comportamiento de la cantidad acumulada F(x), para ello:

a) Obtener una aproximación polinómica de grado 3 de F (0,2)

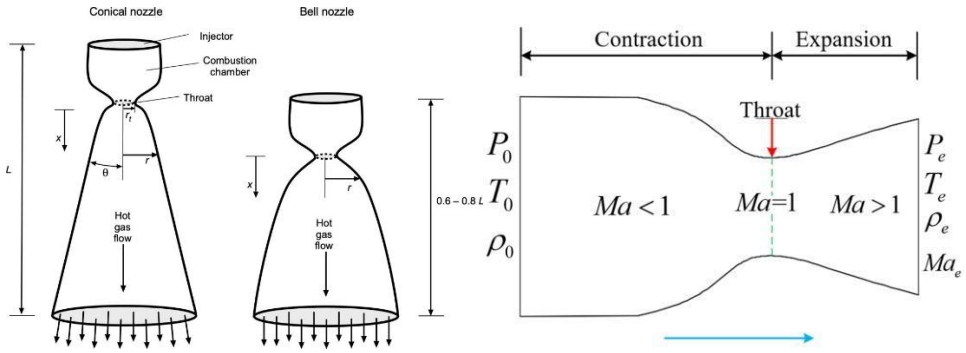
5-Situación problemática: Diseño de una tobera de descarga

Un equipo de ingeniería está diseñando una **tobera de descarga** para un sistema industrial. En una primera aproximación, el perfil longitudinal del radio de la tobera puede modelarse mediante la función

$$r(x) = xe^{-x},\ x \geq 0,$$

donde x representa la posición a lo largo de la tobera, medida en metros, y $r(x)$su radio, también expresado en metros.

NOTA: Una **tobera** es un conducto cuya geometría está diseñada para **acelerar y dirigir un fluido** (gas o líquido) hacia una salida.



Podes imaginarla como un **conducto con una forma determinada**:

entrada ⟶ tobera ⟶ salida

El fluido entra por un extremo y, debido a la geometría de la tobera, puede **aumentar su velocidad** y salir en una dirección determinada.

Para simplificar el análisis cerca de la entrada de la tobera, el equipo desea:

a) Determinar el **polinomio de Maclaurin de grado 4** de $r(x)$. Utilizarlo para obtener una aproximación del radio en una posición próxima a $x = 0$.

b) Determinar el **área de la región comprendida entre el perfil de la tobera y el eje** x desde $x = 0$ hasta una longitud L.

c)Determinar el volumen correspondiente a una tobera de longitud infinita mediante el estudio de la **integral impropia**

d) Para una tobera de longitud $L = 2$, aplicar el **Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral** a la función $r(x)$en el intervalo $[0, 2]$. Determinar la existencia de un punto $c \in (0, 2)$ tal que

$$\int_0^2 r\,(x)\,dx = 2r(c).$$

Interpretare físicamente el significado de ese punto c.

e) Comparar el valor exacto del área obtenido en el inciso b) con el valor aproximado (Realizar la integración de P(x)) que se obtiene utilizando el **polinomio de Maclaurin** del inciso a). Analice la calidad de la aproximación.

ALGUNAS RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

Ej.8-01 a) Tomando extremos derechos n =2 / 320; n=4 / 240; n=8 / 204 b) Tomando extremos izquierdos n=2/ 64; n= 4 / 112; n= 8 /140
Ej. 8-02 a) $F'(x) = f(x) = log(x^2 + 4)$ b) $F'(x) = f(x) = x^3.sen\,x$
c) $F'(x) = f(x) = e^{-x} - e^{x}$

Ej. 8-03 $h'(0) = 12$

Ej. 8-04 a) $3x^2\sqrt[3]{x^6+1}$ b) 1 c) $2\cos(x^2+1)$

Ej.8-05
a) 1; b) 9; c) 1-π/4; d) 7/6-ln2; e) 3ln3-2; f) –287/6

Ej. 8-06 a) $f(x) = cos\,(\pi x) - \pi x sen\,(\pi x)$; b) Minino local en $x = 1$; Maximo local en $x = -1$; Minino local en $x = 0$

Ej. 8-07 a) F (0,5)≈0,461458; b) $1)\frac{1}{2}\,sen\,2$ $2)\frac{1}{8}\ln 2\,.sen\,2$; c) Discontinuidad evitable de salto finito en $x = \pm 1$; d) $2e^2$; e) $f(x) = x\sqrt{x}$; $a = 9$; f) Concavidad positiva = $(-\infty, -1/2)$

Ej.8-08: V.P.= 6, en $x = \sqrt{3}$

Ej.8-09: $c = 2/\sqrt{3}$

Ej. 8-10: $\mu = \dfrac{\frac{a}{3}(b^3 - a^3)}{b-a}$

Ej. 8-11: $b_1 = 3/2 + \sqrt{5/4}$ $b_2 = 3/2 - \sqrt{5/4}$

Ej. 8-12: a) Aprox. 6,44 mil millones; b) Aprox. 1,47 mg; 103 °F

Ej. 8-13: a) 128/3 b)33 c) 2 d) ln3 e) 2ln2 f) ½ g) π/4 h)1/2 i)38/3

Ej. 8-14: $I = 11/3$, $J = 5$; $K = 14/3$

Ej. 8-15: a) 50/3 b) 4 c) 93/4 d) π/2 - ln2 e) 62/27 f) 4

Ej. 8-16: a) 4,5; b) 2,5

Ej. 8-17: a) 3; b) 19/3

Ej. 8-19: a) 64/3 b)9/2 c) 8 d)9/2 e) 13/8 f) 16-6ln2 g) 9/2 h) 8/3 i)32/3

Ej. 8-20: a) 15/2 b)7/3 c) 89/6 d)8

Ej. 8-21: a) $i)1\ ii)\ 6$ b) c=e c) $a=\sqrt[3]{-\frac{7}{8}}$ y $a=\sqrt[3]{\frac{7}{8}}$ d) $k=\frac{11}{8}$ e) b= $2\sqrt[3]{2}$

Ej. 8-22: a) π 2884/27 b) π 486/5 c) π 404/5 d) π 512/15 e) 32 π f) π 668/15

Ej. 8-23: a) π 512/3 b) π 81/32 c) π 40/7 d) π 9 e) π ½ f) π

Ej. 8-24: a) π 96/5 b) π^2 /4 c) 6 π d) π 172/3 e) π 256/105 f) π 24/5

Ej.8-25: a)π32/5 b) 8π c) 8π d)π128/5

Ej.8-26: a) $\pi/2(e^2+1)$ $b)\ \pi(e-2)$

Ej.8-27: a) $V_e=4/3\ \pi\ r^3u^3$ b) $V_c=1/3\pi\ r^2h\ u^3$

Ej.8-28: a) $\frac{\pi}{2}$ $b)\frac{\pi}{2|ab|}$ $c)\frac{1}{2}$ $d)\frac{1}{8}$ $e)1$ $f)1$ $g)-\infty$ $h)2^{\frac{3}{4}}$
$i)-\infty$ $j)\frac{5}{3}$ $k)+\infty$ $l)-\frac{1}{4}n)\ \pi$

Ej.8-29: $a)\frac{1}{2}\ln 2$ b) $1-\ln 2\cong 0.307$ c) 1 d) 4

RESPUESTAS DE EJERCICIOS INTEGRADORES

1-a) La integral $\int_1^\infty g'(x)\,dx$ divergente; b) $g(x)=4\ln(\frac{x^2+6}{7})+1$ (con $g(1)=1$).

2-Área = 2

3-f(x) = $\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}$; 1/2

4-a) P(x)= $x-x^2+\frac{5}{6}x^3$; $F(0{,}2)\approx 0{,}1\hat{6}$.

5-**Tobera de descarga**
a) P(x)=$x-x^2+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{6}x^4$
b) A(L)=$1-e^{-L}(L+1)$
c) V=$\frac{\pi}{4}$
d) r(c)= $\frac{1-3e^{-2}}{2}$
e) La aproximación de Maclaurin es buena cerca de $x=0$ y deteriora al aumentar L.
P(x)≈ $0{,}2\hat{6}$ A(x)≈ 0,59399