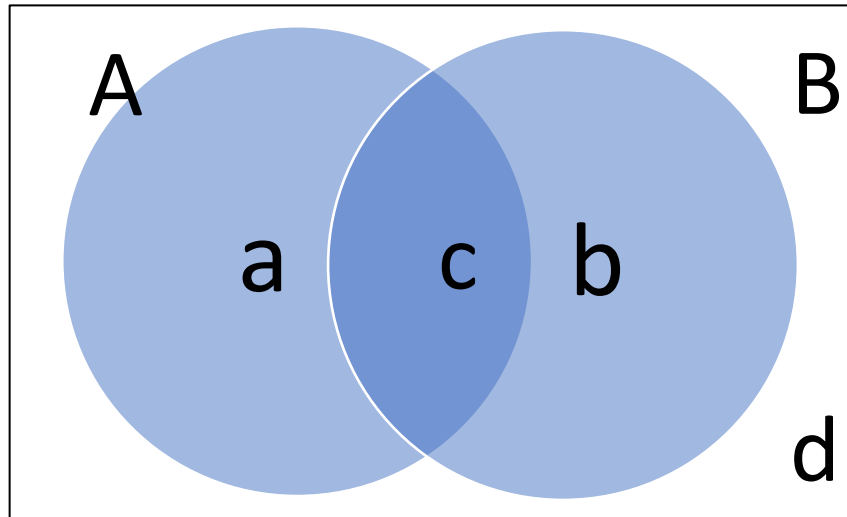


Probabilidad Condicionada

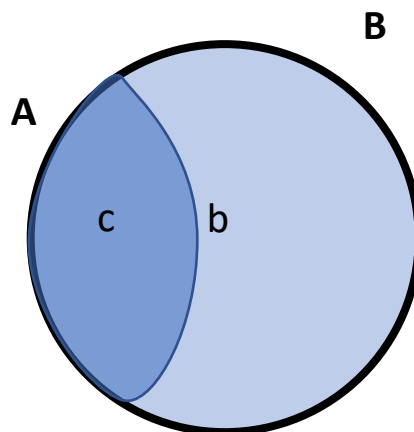
Repasemos algunos conceptos vistos de probabilidad y sus axiomas mediante el siguiente ejemplo genérico:



Siendo $\# A = a+c$ $\# B = b+c$ $\# (A \cap B) = c$ $\# S = a+b+c+d$

$$P(A) = \frac{a+c}{a+b+c+d} \quad P(B) = \frac{b+c}{a+b+c+d} \quad P(A \cap B) = \frac{c}{a+b+c+d} \quad (1)$$

Supongamos que alguien me dice que el suceso B se dio, ocurrió. Esto nos está dando información, cosa que hace cambiar nuestro marco de referencia. Nuestro Espacio Muestral, ha cambiado al suceso B el cual incluye una parte del suceso A (lo que correspondía a la intersección de ambos sucesos).



La probabilidad ahora del suceso A está condicionada a que el suceso B se dio, ocurrió. Eso lo identificamos con $P(A/B)$, “probabilidad de A condicionada a la ocurrencia de B” o “probabilidad de A sabiendo que B ocurrió”.

$$P(A/B) = \frac{c}{b+c}$$

Si dividimos tanto el numerador como el denominador por un mismo número el cociente no cambia:

$$P(A/B) = \frac{c}{b+c} = \frac{\frac{c}{a+b+c+d}}{\frac{b+c}{a+b+c+d}} \quad (2)$$

Si vemos los resultados anteriores dados en (1) y los aplicamos en (2) nos queda que:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

De la misma forma, podemos deducir que:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

En el cálculo de las probabilidades de algunos sucesos, el valor de dicha probabilidad variará en función del conocimiento de determinadas informaciones relativas a estos sucesos.

Ejemplo: Si disponemos de una urna que contiene cuatro bolas numeradas del 1 al 4, extraemos una bola y seguidamente la volvemos a introducir para realizar una segunda extracción, la probabilidad de extraer, por ejemplo, la bola número 3 en la segunda extracción es la misma que en la primera.

En cambio, si realizamos el mismo proceso sin reemplazar la bola extraída la probabilidad de extraer, por ejemplo, la bola número 3 en la segunda extracción dependerá de la bola extraída en primer lugar.

Entonces, sean A y B dos sucesos tal que $P(A) \neq 0$, se llama **Probabilidad de B condicionada a A** , $P(B/A)$, a la probabilidad de B tomando como espacio muestral A , es decir, la probabilidad de que ocurra B dado que ha sucedido A .

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

De esta igualdad, se deduce: $P(B \cap A) = P(B/A) \cdot P(A)$

Ejemplo: Consideremos el experimento de "lanzar un dado al aire". Calculemos, por ejemplo, la probabilidad de obtener un 3 sabiendo que previamente ya ha salido un número impar.

Podemos entonces definir los sucesos $A = \{\text{sacar 3}\}$ y $B = \{\text{sacar 1, 3 o 5}\}$; entonces, $P(A/B) = 1/3$ puesto que, si sabemos que ha salido un número impar, los casos posibles ahora son 3 y los casos favorables al suceso A sólo 1.

Ejercicio:

Se lanzan dos dados:

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma de puntos igual a 7?
- Si la suma de puntos ha sido 7, ¿cuál es la probabilidad de que en alguno de los dados haya salido un tres?

Solución:

Sean los sucesos $A=\{\text{la suma de los puntos es } 7\}$ y $B=\{\text{en alguno de los dados ha salido un tres}\}$.

- Los casos posibles al lanzar dos dados son 36 y los casos favorables al suceso A son los seis siguientes: $\{(1,6); (2,5); (3,4); (4,3); (5,2); (6,1)\}$. Por tanto, $P(A) = 6/36 = 1/6$
- En este caso, el suceso B/A es salir en algún dado 3, si la suma ha sido 7. Observamos que esta situación ocurre en las parejas $(3,4)$ y $(4,3)$. Por tanto, $P(B/A) = 2/6 = 1/3$

El conocimiento de que ha ocurrido el suceso A modifica, en algunas ocasiones, la probabilidad del suceso B , pero en otras no. Los sucesos en los que, conociendo que uno ha ocurrido, no se modifica la probabilidad del otro, decimos que son **independientes** y, si se modifica, decimos que son **dependientes** entre sí.

Decimos que dos sucesos A y B son **independientes** entre sí si la ocurrencia de uno de ellos no modifica la probabilidad del otro, es decir, si

$$P(B/A) = P(B) \quad \text{o} \quad P(A/B) = P(A)$$

Ejemplo: El suceso estatura de los alumnos de una clase y el suceso color del cabello son independientes: el que un alumno sea más o alto o más bajo no influye en su color de cabello, ni viceversa.

Veamos otro **ejemplo**: la probabilidad de que al tirar una moneda al aire salga cara (suceso B) condicionada a que el lanzador sea zurdo (suceso A), es igual a la propia probabilidad del suceso B , o que la probabilidad que el lanzador sea zurdo (suceso A) condicionada a que al tirar una moneda al aire salga cara (suceso B) es igual a la propia probabilidad del suceso A .

Como consecuencia inmediata de la definición se tiene que:

$$P(B/A) = P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{Despejando,} \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Dos sucesos A y B son independientes si se cumple: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Analogamente:

Tres sucesos A , B y C son independientes si se cumplen a la vez:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Decimos en cambio que dos sucesos A y B son **dependientes** entre sí si la ocurrencia de uno de ellos modifica la probabilidad del otro, es decir, si

$$P(B/A) \neq P(B) \quad \text{o} \quad P(A/B) \neq P(A)$$

Que la probabilidad sea distinta cuando se la condiciona, puede significar que ésta aumente o que disminuya. Por ejemplo, si lanzo un dado y, sin verlo, alguien me informa que salió un número impar, la probabilidad de que haya salido el número 2 es cero, disminuyó su probabilidad (antes de tener información del suceso “salir número impar” la probabilidad de salir el 2 era $1/6$). En cambio, la probabilidad de que haya salido el número 5 aumentó a $1/3$ (antes de la información dada, que cambia mi referencia, su probabilidad era $1/6$).

Ejercicio:

Se consideran dos sucesos, A y B , asociados a un experimento aleatorio con $P(A)=0.7$; $P(B)=0.6$; $P(\bar{A} \cup \bar{B})=0.58$:

- ¿Son independientes A y B ?
- Si $M \subset A$, ¿cuál es el valor de $P(\bar{M} / \bar{A})$?

Solución:

- Para ver si son independientes, comprobaremos si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Tengamos en cuenta que $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$

y por lo tanto, $P(A \cap B) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - 0.58 = 0.42$

Como por otro lado, $P(A) \cdot P(B) = 0.7 \cdot 0.6 = 0.42$

luego, A y B son independientes, pues $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.42$

- Si $M \subset A \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{M}$ y por tanto $P(\bar{M} / \bar{A}) = \frac{P(\bar{M} \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(\bar{A})}{P(\bar{A})} = 1$