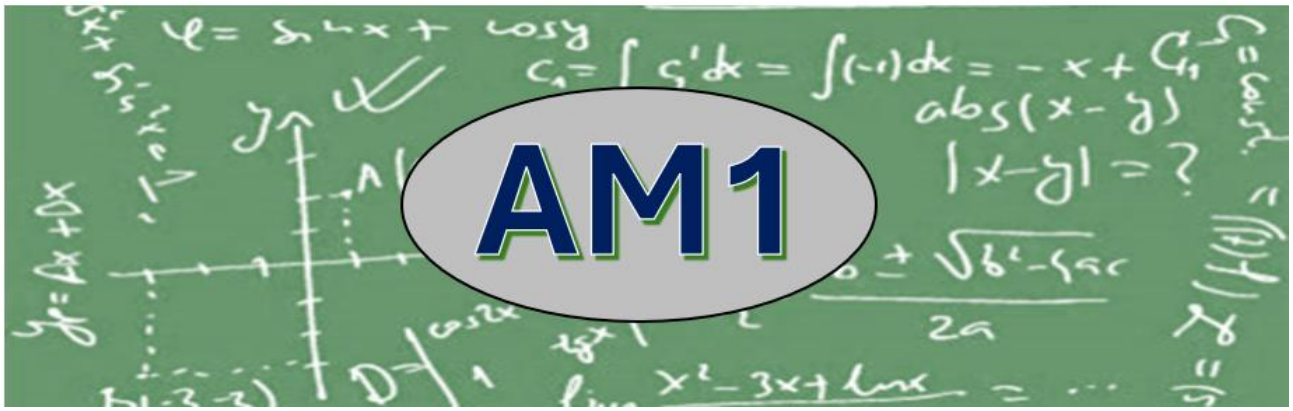


TRABAJO PRÁCTICO N° 4: APROXIMACION DE FUNCIONES POLINOMIOS DE TAYLOR Y MAC LAURIN

ANÁLISIS MATEMÁTICO 1

UTN – Facultad Regional Haedo

TRABAJO PRÁCTICO N.º 4

POLINOMIOS DE TAYLOR Y MAC LAURIN

COMPETENCIAS

- Identificar, formular y resolver situaciones problemáticas que involucren distintos tipos de funciones mediante polinomios de Taylor y Mac Laurin
- Utilizar de manera efectiva las técnicas y herramientas de la ingeniería
- Aprender en forma continua y autónoma, utilizando los recursos de trabajo en clase, bibliográficos, digitales y multimediales.
- Comunicar con efectividad sus producciones en forma escrita u oral, fundamentadas en el marco teórico correspondiente.

Ej.4-01

Determinar el orden de contacto entre los siguientes pares de curvas en su punto de intersección.

Graficar con GeoGebra en un mismo sistema de ejes y analizar visualmente la semejanza entre ellas en un entorno del punto.

a) $\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y = -x^2 + 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = \text{sen } x \\ y = x - x^3/6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = \ln(x+1) \\ y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = x^3 + e^{\frac{-1}{x^2}} \\ y = x^3 + x^4 \end{cases}$

Ej.4-02

Hallar las ecuaciones de la recta tangente y de la parábola osculatriz de cada curva, en el punto $x_0 = 0$. Representar en GeoGebra las curvas y sus aproximaciones.

a) $y = 3x^2 + 2x - 1$ b) $y = e^{-x}$ c) $y = \ln(x+1)$

Ej.4-03

Hallar a, b y c ∈ **R** tal que $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = ax^2 + bx + c$ tengan orden de contacto 2 en $x_0 = 1$

Ej.4-04

Completa el siguiente cuadro según corresponda, tomando n = 4

Función	Polinomio de Mac Laurin	Expresión del Término Complementario
$sen\ x$		
$cos\ x$		
e^x		
$ln(x+1)$		
$\sqrt{x+1}$		

Ej.4-05
Hallar el Polinomio de Taylor de orden 3 centrado en el valor de x_0 indicado, para las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x}$ en $x_0 = 1$

b) $y = cos(2x - 6)$ en $x_0 = 3$

c) $y = \frac{2}{1+x}$ en $x_0 = 0$

d) $y = sen(\pi x)$ en $x_0 = 1$

Ej.4-06:
Hallar el Polinomio de Mac Laurin de orden 5 para $f(x) = e^x$, y acotar el error cometido al aproximar el valor de $e^{0.5}$, e y e^2 con dicho polinomio. Comparar los errores y analizar el porqué de esta diferencia.

Ej.4.07:
Aplicar la fórmula de Mac Laurin a la función $y = \sqrt{1 + x}$, cuando $n = 2$ y acotar el error que se comete con la aproximación de segundo orden al calcular $\sqrt{1{,}2}$

Ej.4-08:
Sea $f(x) = e^{x+1}$, calcular aproximadamente $e^{1,5}$ utilizando el polinomio de Taylor de orden 2 en $x_0 = 0$, acotando el resto para estimar el error que se comete.

Ej.4-09:
Hallar el Polinomio de Mac Laurin para $f(x) = sen\, x$ y usarlo para calcular con cinco decimales exactos $sen\, 3°$.

Ej.4-10:
a) Hallar el Polinomio de Mac Laurin de $f(x) = ln(x + 1)$ y usarlo para calcular $ln(1,1)$ con cinco decimales exactos.
b) Utilizando el resto de Lagrange hallar el menor grado de un polinomio que asegure un error menor que 10^{-5} y comparar con el grado del polinomio obtenido del ítem a)

Ej.4-11:
Si $f(x) = sen(ax + b)$, con $b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ determinar los valores reales de a y de b si su polinomio de Mac Laurin de orden uno es $P(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + 4x)$.

Ej.4-12:
Sabiendo que $a.\ln(bx + 1) \cong -\frac{15}{2}(2x + 3x^2)$ hallar los valores reales de a y de b.

Ej.4-13: Sea $f(x) = ln(kx)$, hallar el valor real de k de modo que el polinomio de orden dos que aproxima a dicha función en x = 3 es $P_2(x) = ln\,6 + f'(3)(x - 3) + \frac{f''(3)}{2!}(x - 3)^2$. Usar dicho polinomio para calcular ln (7) y estimar el error cometido en dicha aproximación.

Ej.4-14:
Si el polinomio de Taylor para la función ***f***, de orden ***2*** en ***x=5***, es: $P(x) = 3 - (x - 5) + 9\,(x - 5)^2$, hallar el polinomio de Taylor de orden ***2*** en $\boldsymbol{x = 1}$ de: $g(x) = \frac{2}{4 - f(5x)}$

Ej.4-15:

Hallar los valores reales de h y k de modo tal que el polinomio de Mac Laurin de orden 2 de $f(x) = h.ln(1 + k.x)$ sea $P_2(x) = 2x - 2x^2$.

Ej.4-16:

Sea $g(x) = a\sqrt{1 + bx}$. Hallar a y b tales que el polinomio de Mac Laurin de orden 2 de g sea $Q(x) = 2 + 2x - x^2$.

Aplicaciones

Ej.4-17:

Determinar una raíz aproximada de la ecuación, mediante el desarrollo del polinomio de Taylor de orden 2, centrado en el valor indicado:

a) $e^x = -x + 2$ en $x_0 = 0$ b) $\ln x^2 - \frac{5}{16}x^2 = 0$ en $x_0 = 1$

Ej.4-18:

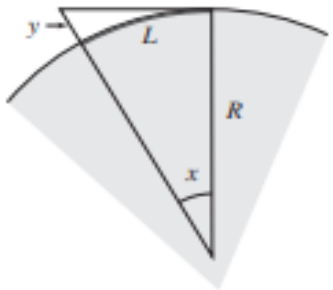
Con el **CAS** de GeoGebra calcule los polinomios de Taylor para verificar los siguientes límites utilizando el Término complementario en su forma infinitesimal (deberá determinar por su cuenta el orden del polinomio necesario en cada caso):

a) $\lim_{x\to 0} \frac{senx - x}{x^2} = 0$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{x - senx}{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2} = 1$ c) $\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x) - x}{1 - cos\left(\frac{1}{2}x\right)} = -4$

Ej.4-19:

Problema 1

Al nivelar una larga autopista de longitud L, debe hacerse una compensación con respecto a la curvatura de la Tierra. La corrección de nivelación está dada por la función $\boldsymbol{y = R\,sec(L/R) - R}$, donde R es el radio de la Tierra medido en millas.



Si $P_2(x)$ es el polinomio de Mac Laurin de segundo orden para $f(x) = sec\,x$, utiliza $sec\,x \approx P_2(x)$ para determinar la corrección aproximada del nivelado para x cercanos a 0.
Encuentra el número de pulgadas de la corrección del nivelado que se necesita para una autopista de 1 milla. Emplear R= 4000 millas.

Problema 2

Una empresa de logística utiliza cámaras de visión artificial para detectar congestión en las rutas.
La probabilidad instantánea de que un camión quede detenido por atasco en función de la densidad de vehículos d(vehículos por km) se aproxima mediante:

$$P(d) = 1 - e^{-0.05d}$$

$P(d)\in$ [0,1] es la probabilidad instantánea de detención. EL modelo es válido para densidades moderadas.
Cuando la ruta tiene una densidad cercana a **20 vehículos/km**, la empresa quiere sustituir $P(d)$por un polinomio sencillo para cálculos rápidos en el sistema de control.

a) Obtener el polinomio de Taylor de orden 2 de $P(d)$alrededor de $d = 20$. (Se recomienda el cambio de variable $h = d - 20$.)
b) Usar el polinomio obtenido para estimar la probabilidad de detención cuando:

1) $d = 19$ vehículos/km 2) $d = 22$ vehículos/km

c) Dar una cota del error para d= 19
d) Calcular el valor real $P(19)$.
e) Hallar el error absoluto y verificar si está dentro de la cota del resto.
f) ¿Qué ventaja tiene para la empresa usar un polinomio en vez de la función exponencial?

EJERCICIOS INETRADORES DE LA UNIDAD 4

Ej.1)

Establecer si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsa. Justificar

a) Cuando 0< x<0,01, la función f(x) = e^x se puede remplazar por 1+ x con un error menor al 0.6% del valor de la función.

b) Si f es una función par, entonces su polinomio de Mac Laurin de orden n contiene sólo términos con potencias impares.

c) $P(x) = 2 + 5x$ es el polinomio de Mac Laurin de mayor orden que se puede asociar a la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 5x + 2 & si\ x \leq 0 \\ -x^3 + 5x + 2 & si\ x > 0 \end{cases}$$

Ej.2)

Problema 1-Ingenieria Aeronáutica/Aeroespacial

En el banco de pruebas de un túnel de viento, para ciertos modelos simplificados de respuesta rápida a variaciones del ángulo de ataque x(en radianes) se utiliza la función

$$f(x) = 1 - e^{-x}$$

que modela una respuesta acumulativa normalizada (por ejemplo, fracción de una velocidad límite alcanzada). Para cálculos rápidos y estimaciones se pide:



1. Obtener el polinomio de Taylor de orden 3 de f centrado en $x_0 = 0$ y aproximar f (0.2 = 11, 45º)
2. Usar el **resto de Lagrange** y dar una **cota superior** para | $R_3(0.2)$ | para hallar el error cometido al aproximar la función mediante un polinomio de Taylor.
3. Sabiendo que se requiere una tolerancia del 1% del valor de la función, decidir si el polinomio de Taylor de orden 3 proporciona una aproximación aceptable para f (0,2). Justificar
4. Utilizando el mismo criterio de tolerancia del 1% del valor de la función considerado en el inciso anterior, analizar si el polinomio de Taylor de orden 3 puede emplearse para estimar la fracción de velocidad límite alcanzada cuando x=0,6 rad. Justificar.

Problema 2-Ingenieria Ferroviaria

En los trenes eléctricos **CSR chinos** que circulan en la línea **Sarmiento** de Buenos Aires, la potencia eléctrica que demanda el motor depende fuertemente de la pendiente del terreno. Cuando la pendiente (en radianes) es pequeña, la potencia necesaria puede modelarse como:



$$P(\theta) = P_0\, e^{k\text{sen }\theta}$$

donde:

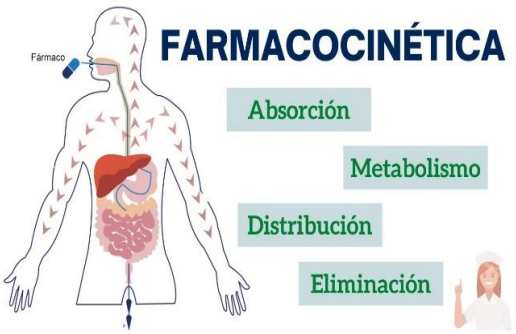
- $P(\theta)$es la potencia instantánea (en kW),
- $P_0 = 3000$kW es la potencia base en terreno llano,
- $k = 0.5$ es un coeficiente que depende del tipo de locomotora,
- θ es el ángulo de pendiente (en radianes).

Durante un estudio de consumo energético, un ingeniero necesita estimar la potencia para una pendiente de $\theta = 0.1$ rad, y además **determinar a qué ángulo la potencia se incrementa un 5% respecto del plano**.

1.Expandir $P(\theta) = 3000\, e^{0.5\text{sen }\theta}$en torno a $\theta = 0$ hasta orden **2** y usar esa aproximación para estimar $P(0.1)$.
2.Encuentra una **cota para el error** usando el **resto de Lagrange**
3. ¿El error aproximado y el error real son significativos para los cálculos de consumo energético? Para dar una respuesta completa tener en cuenta si el **Error absoluto** es menor a 1 kW ya que el tren trabaja con miles kilowatts.
Error relativo=$\frac{|\text{Valor real} - \text{Valor aproximado}|}{\text{Valor real}} \times 100\%$, si es mucho menor al 1%, (incluso menor al 0.1%), se puede decir que no afecta decisiones de operación o cálculo de energía.
4.Usar el polinomio obtenido y determinar el valor aproximado de θ(en radianes) para el cual la potencia aumenta un 5%.

Problema 3- Bioingeniería

En farmacocinética (área clave de la bioingeniería), la concentración de un fármaco en el torrente sanguíneo después de una inyección intravenosa se modela comúnmente por la ecuación $\boldsymbol{C(t) = C_0 e^{-kt}}$, donde:



- $C(t)$es la concentración en mg/L en el tiempo t(en horas),
- C_0es la concentración inicial
- k es la constante de eliminación del fármaco

Esta modelo ayuda a los bioingenieros a predecir cuánto tiempo dura el efecto terapéutico del fármaco en el cuerpo. Para tiempos cortos después de la inyección (cuando $\boldsymbol{k\,t}$ *es pequeño), podemos aproximar la función exponencial usando Polinomio de Taylor para simplificar cálculos en dispositivos portátiles o simulaciones rápidas*.

En farmacocinética, la concentración plasmática de **paracetamol** después de una administración intravenosa puede modelarse por

$$C(t) = 10\, e^{-0.3t}$$

1.Encuentra el polinomio de Taylor de orden 2 asociado a la función $C(t)$ alrededor de $t = 0$.
2. Calcular en forma aproximada la concentración del fármaco para t = 0.2 h
3. Estimar el error al utilizar la aproximación con el resto de Lagrange
4.Calcular el error absoluto, comparando el valor exacto de $C(0.2)$ con el valor de la aproximación.
5. Supongamos que queremos encontrar el tiempo t en el cual la concentración cae al 95% de C_0, que indica el inicio de la pérdida de eficacia terapéutica. Utiliza la aproximación lineal para resolver la ecuación aproximada.
6.Compara el tiempo t aproximado del inciso 5) con el valor exacto obtenido. ¿Qué implica esta diferencia para un bioingeniero diseñando un protocolo de dosificación? (Tener en cuenta que el Paracetamol tiene **ventana terapéutica amplia** y **vida media 2 h).**

Problema 4-Ingenieria industrial

En ingeniería industrial, la curva de aprendizaje modela cómo la eficiencia de producción mejora con el tiempo a medida que los trabajadores ganan experiencia. Un modelo común

es $P(t) = P_{\max}(1 - e^{-kt})$, donde:



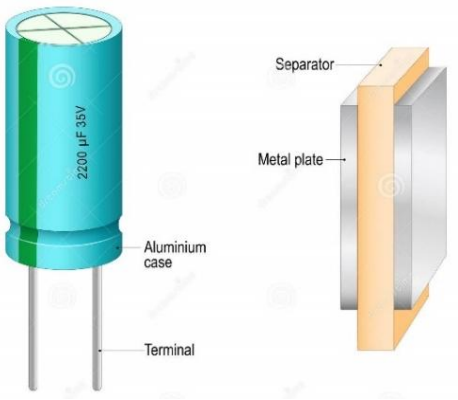
- $P(t)$es la tasa de producción (unidades por hora) en el tiempo t (en horas de entrenamiento),
- $P_{\max}$es la tasa máxima de producción. Utilizaremos 50 unidades/hora.
- k es la constante de aprendizaje. Utilizaremos 0,1 h^{-1} para un proceso típico.

Este modelo ayuda a los ingenieros industriales a predecir tiempos de producción y optimizar recursos en fábricas. Para tiempos cortos de entrenamiento (cuando ktes pequeño), podemos aproximar la función exponencial usando series de Taylor para estimaciones rápidas en planificación de operaciones.

1.Encuentra el polinomio de Taylor de orden 3 para la función $P(t)$ expandido alrededor de $t = 0$.
2.Calcular $\mathrm{P}_3(1)$. ¿Cómo se interpreta esta aproximación para los primeros momentos del proceso de aprendizaje?
3.Estimar el resto para el polinomio de orden 3 en $t = 1$ hora.
4.Calcula el error absoluto comparando el valor exacto de $P(1)$con la aproximación.
5.Supongamos que queremos encontrar el tiempo t en el que la producción alcanza el 20% de $P_{\max}$, lo cual indica un punto clave para evaluar el entrenamiento inicial. Usa la aproximación lineal para resolver la ecuación aproximada.
6.Compara el tiempo t aproximado del inciso 5) con el valor exacto obtenido resolviendo la ecuación exponencial. ¿Qué implica esta diferencia en error para un ingeniero industrial planificando turnos de producción?

Problema 5-Ingenieria electrónica

La descarga de un capacitor en un circuito RC (resistencia-capacitancia) se modela por la ecuación $V(t) = V_0 e^{-t/\alpha}$, donde:



- $V(t)$es el voltaje a través del capacitor en el tiempo t(en segundos),
- V_0es el voltaje inicial. Utilizaremos 5 V),
- $\alpha = RC$ es la constante de tiempo, utilizaremos 0.5 s para un circuito típico con R = 1 kΩ y C = 500 µF).

Este modelo es fundamental para diseñar temporizadores, filtros y circuitos de control en dispositivos electrónicos. Para tiempos cortos después de iniciar la descarga (cuando $\frac{t}{\alpha}$ es pequeño), podemos aproximar la función exponencial usando series de Taylor para simplificar cálculos en análisis manuales o simulaciones básicas.

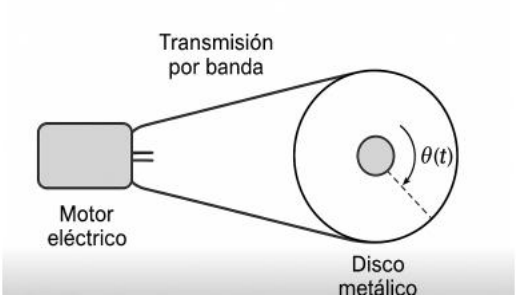
1. Encuentra el polinomio de Taylor de orden 3 para *V*(t) expandido alrededor de $t = 0$.

2.Usa el polinomio para aproximar $V(0.1)$. ¿Cómo se interpreta esta aproximación para tiempos iniciales en la descarga del capacitor?
3. Estima el resto para el polinomio de orden 3. Luego, calcula el error absoluto comparando el valor exacto de $V(0.1)$ con la aproximación.
4.Supongamos que queremos encontrar el tiempo t en el que el voltaje cae al 90% de V_0 lo cual es un umbral común para detectar el "final" de la descarga en aplicaciones como sensores. Usa una aproximación cuadrática para resolver la ecuación aproximada (elige la raíz positiva relevante).
5.Compara el tiempo t aproximado del inciso 4) con el valor exacto obtenido. ¿Qué implica esta diferencia en error para un ingeniero electrónico diseñando un circuito de temporización?

Problema 6- Ingeniería mecánica

En un banco de pruebas, un motor eléctrico hace girar un disco metálico mediante una transmisión por banda.
El ángulo que gira el disco en función del tiempo (en segundos) está dado por la función

$\theta(t) = \arctan(\alpha t)$, donde $\alpha = 0{,}8\ \text{s}^{-1}$.



Esta función aparece como modelo simplificado cuando el motor arranca desde el reposo y tiene una aceleración angular que disminuye con el tiempo por efecto de pérdidas mecánicas.
Se pide:
1.Determinar el polinomio de Taylor de orden 3 de $\theta(t)$alrededor de $t = 0$.
2.Calcular la aproximación para t=1 usando el polinomio $P_3(t)$ y $\theta(1)$exactamente.
3.Usar la forma de Lagrange del resto para obtener una cota del error al aproximar $\theta(1)$por $P_3(t)$.
4.Hallar el error absoluto y verificar que es menor o igual que la cota obtenida en (3).
5. ¿La aproximación con Taylor es razonable para tiempos cortos? ¿Por qué tiene sentido aproximar $\arctan(\alpha t)$con un polinomio cuando el motor recién arranca?

ALGUNAS RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

Ej.4-01: a) orden de contacto 0; b) orden de contacto 4; c) orden de contacto 3; d) no hay orden de contacto

Ej.4-02: a) $y = 2x - 1;\ y = 3x^2 + 2x - 1$ b) $y = 1 - x;\ y = 1 - x + \frac{x^2}{2}$; c) $y = x;\ y = x - \frac{1}{2}x^2$

Ej.4-03: $a = 1; b = -3; c = 3$

Ej.4-04: $sen\, x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}cos\, c\, x^5 \quad c \in (0, x);$

$cosx = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}senc\, x^5 \quad c \in (0, x);$

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}e^c x^5 \quad c \in (0, x);$

$\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}(1 + c)^{-5}\, x^5 \quad c \in (0, x);$

$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\frac{7}{256}(1+c)^{-9/2}\,x^5\ c\in(0,x)$

Ej.4-05: a) $P(x)=1+0{,}5(x-1)-0{,}125(x-1)^2+0{,}0625(x-1)^3$;

b) $P(x)=1-2(x-3)^2$; c) $P(x)=2-2x+2x^2-2x^3$;

d) $P(x)=-\pi(x-1)+\pi^3/6\,(x-1)^3$

Ej.4-06: $\mathrm{P(x)}=1+\mathrm{x}+\frac{\mathrm{x}^2}{2!}+\frac{\mathrm{x}^3}{3!}+\frac{\mathrm{x}^4}{4!}+\frac{\mathrm{x}^5}{5!}$ $\text{error } 1<3{,}57.10^{-5},\ \text{error } 2<3{,}77.10^{-3},$ $\text{error } 3<6{,}5.10^{-1}$

Ej.4-07: $\text{error}<\frac{1}{2.10^3}$

Ej.4-08: f (0,5)≅ 4,4172079712459 error $< 9{,}3.\ 10^{-2}$

Ej.4-09:$P_3(x)=x-\frac{x^3}{6}$; sin (3°)≈0,**05233**595624294383

Ej.4-10: a) $P_5(x)=x-1/2x^2+1/3x^3-1/4x^4+1/5x^5$; $P_5(0.1)=0.\mathbf{09531}0\hat{3}$; b) n=4

Ej.4-11: a= 4; b= $\frac{\pi}{4}$

Ej.4-12: $a=5;\ b=-3$

Ej.4-13: k= 2 ; $\ln(7)\cong P_2\left(\frac{7}{2}\right)=1{,}944537247$; $\left|R_2\left(\frac{7}{2}\right)\right|<\frac{1}{648}$

Ej.4-14: P(x) = 2-10 (x-1) +500 $(x-1)^2$

Ej.4-15: h=1; k=2

Ej.4-16: $a=2, b=2$

Ej4-17: a) x≈ $-2+\sqrt{6}$ b) x≈ $\frac{4}{3}$

Ej.4-19:

Problema 1: 7.92 pulgadas

Problema 2: a) $P_2(d)=0.6321205588+0.01839397206(d-20)-0.00045984930146(d-20)^2$; b) 1) P2(19) ≈0.61326673747; 2) $P_2(22)$ ≈0.66706910574; c) $|R_2|<8.06\times10-6$; d)0,6132589765; e) $7.76\times10^{-6}<8.06\times10^{-6}$

EJERCICIOS INTEGRADORES

Ej.1) a) Verdadero b) Falso c) Verdadero

Ej.2)

Problema 1-Ingeniería Aeronáutica/Aeroespacial

1. $P_3(x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3;\ P_3(0.2)=0{,}181\hat{3}$

2.| $R_3(0.2)$ |$< 6{,}67\times10^{-5}$

3.| $R_3(0.2)$ |$< 6{,}67\times10^{-5}<0{,}00181$. Por lo tanto, el polinomio $P_3(x)$ proporciona una aproximación aceptable de $f(0{,}2)$ con tolerancia del 1%.

4.| $R_3(0.6)$ |$< 0{,}0054\ \wedge 0{,}0054>0{,}00451$. $P_3(x)$ no aproxima $f(0{,}6)$ con error menor al 1%.

Problema 2-Ingeniería Ferroviaria

1.$P_2(\theta)=3000+1500\theta+375\theta^2$; $P_2(0.1)=3153.75$ kW; **2**.| $R_2(0.1)$ |<0.23592 kW;

3. $P(0.1) = 3153.5506$ kW. Error absoluto≈ 0.1994 kW; error relativo ≈ 0.00632%;
4. $\theta_{\text{aprox}} \approx 0.0976177$ rad

Problema 3-Bioingeniería

1. P_2 (t) = 10-3t+0.45 t^2; **2.** P (0.2) = 9.418 mg/L **3**. | $R_2(0.2)$ |$< 0{,}00036$ mg/L ;**4**. Error absoluto= 0.00035 mg/L; **5**. t≈ $0{,}1667$ h ≈10 min; **6.** t≈0,1710 h ≈ 10 min 15 s

Problema 4-Ingeniería industrial

1. $P_3(\,t) = 5t - 0{,}25\,t^2 + \frac{1}{120}t^3$, **2**. $P_3(1) = 4.7583333333$ u/h ; $P(1) \approx 4.7581290982$ u/h; **3.**

| $R_3(0.2)$ |$< 0{,}0002083333$u/h; **4**.Error absoluto ≈ 0.0002042351 u/h; **5.** $t_{\text{aprox (lineal)}} =$ 2.0 h; **6**. $t_{\text{exact}} \approx 2.2314355131$; diferencia ≈ 0.2314 h (≈ 13.9 min)

Problema 5-Ingeniería electrónica

1. P_3(t)= $5 - 10t + 10t^2 - \frac{20}{3}t^3$; **2.** V_3 (0,1) =4.09$\hat{3}$ V; **3**. | $R_3(0.1)$ |$<$ 0.000333V;
|V (0.1) −P_3(0.1) |≈0.0003204321 V; **4.** t≈0.0527864045 s; **5.** t=−0.5ln 0.9≈0.05268s

Problema 6-Ingeniería mecánica

1. $P_3(t) = \frac{4}{5}t - \frac{64}{375}t^3$; **2**. $P_3(1) = 0.629\hat{3}$ rad, $\theta(1) \approx 0.6747$ rad; **3.** | $R_3(1)$ |$< 0{,}079676$rad.
4. Error absoluto ≈ 0.0454 rad