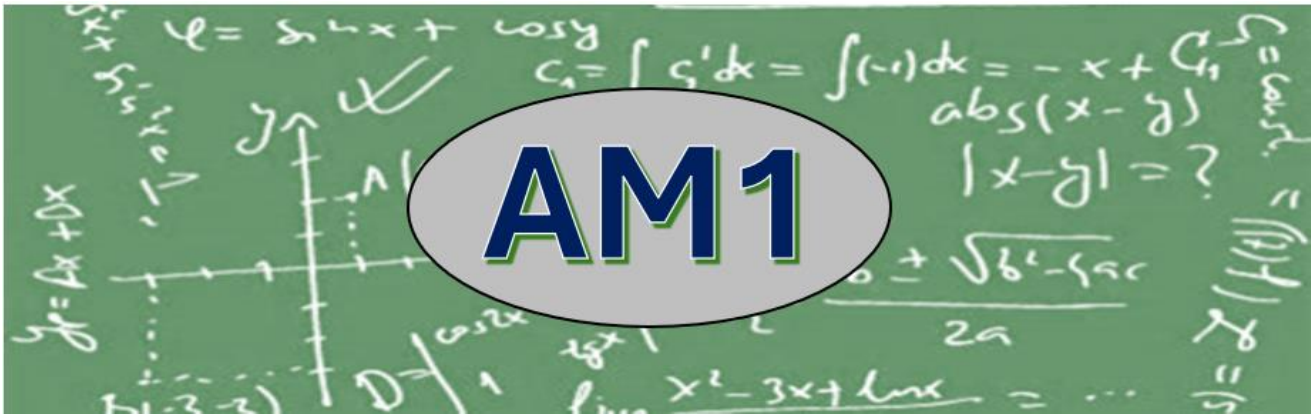


TRABAJO PRÁCTICO 6:
APROXIMACION DE FUNCIONES
POLINOMIOS DE TAYLOR Y MAC LAURIN

ANÁLISIS MATEMÁTICO 1

UTN – FACULTAD REGIONAL HAEDO

TRABAJO PRÁCTICO 6
Polinomios de Taylor y Mac Laurin

COMPETENCIAS

- Identificar, formular y resolver situaciones problemáticas que involucren distintos tipos de funciones mediante polinomios de Taylor y Mac Laurin
- Utilizar de manera efectiva las técnicas y herramientas de la ingeniería
- Aprender en forma continua y autónoma, utilizando los recursos de trabajo en clase, bibliográficos, digitales y multimediales.
- Comunicar con efectividad sus producciones en forma escrita u oral, fundamentadas en el marco teórico correspondiente.

Ej.6-01 Determinar el orden de contacto entre los siguientes pares de curvas en su punto de intersección. Interprete el orden de contacto:

a) $\begin{cases} y = x^2 + 3 \\ y = -x^2 + 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = Chx \\ y = \frac{1}{2}x^2 + 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = e^x \\ y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \end{cases}$

Ej.6-02 Hallar las ecuaciones de la recta tangente y de la parábola osculatriz de cada curva, en el punto $x_0 = 0$. Representar en GeoGebra las curvas y sus aproximaciones.

a) $y = 3x^2 + 2x - 1$ b) $y = e^{-x}$ c) $y = \ln(x + 1)$

Ej.6-03 Hallar a, b y c $\in \mathcal{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = ax^2 + bx + c$ tengan orden de contacto 2 en $x_0 = 1$

Ej. 6-04 Completa el siguiente cuadro según corresponda, tomando n = 4

Función	Polinomio de Mac Laurin	Expresión del Término Complementario
$sen\ x$		
$cos\ x$		
e^x		
$ln(x+1)$		
$\sqrt{x+1}$		

Ej.6-05 Hallar el Polinomio de Taylor de orden 3 centrado en el valor de x_0 indicado, para las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x}$ en $x_0 = 1$

b) $y = \cos(2x - 6)$ en $x_0 = 3$

c) $y = \frac{2}{1+x}$ en $x_0 = 0$

d) $y = sen(\pi x)$ en $x_0 = 1$

<u>Ej.6-06</u>: Hallar el Polinomio de Mc Laurin de grado 5 para $f(x)=e^x$, y acotar el error cometido al aproximar el valor de $e^{0.5}$, e y e^2 con dicho polinomio. Comparar los errores y analizar el porqué de esta diferencia.

<u>Ej.6-07</u>: Aplicar la fórmula de Mc Laurin a la función $y=\sqrt{1+x}$, cuando $n=2$ y acotar el error que se comete con la aproximación de segundo grado al calcular $\sqrt{1,2}$

<u>Ej.6-08</u>: Hallar el Polinomio de Mc Laurin para $f(x) = sen\ x$ y usarla para calcular con cinco decimales exactos $sen\ 3^o$.

<u>Ej.6-09</u>: Hallar el Polinomio de Mc Laurin de $f(x)=\ln(x+1)$ y usarlo para calcular $\ln 1{,}1$ con cinco decimales exactos.

<u>Ej. 6-10</u>: ¿Cuántos términos es suficiente tomar en el desarrollo de Taylor en x=0 de la función f(x)=e^x, para obtener un polinomio que aproxime dicha función en todo el intervalo [-1,1] con un error menor que 10^{-4}?

<u>Ej. 6-11</u>: Si $f(x) = sen(ax+b)$, determinar los valores reales de a y de b si su polinomio de Mac Laurin de grado uno es $P(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(1+4x)$.

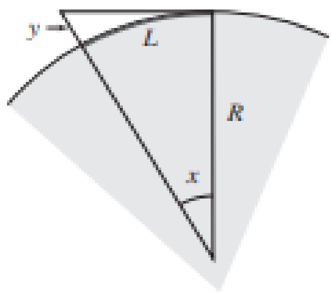
<u>Ej. 6-12</u>:Sabiendo que $a.\ln(bx+1) \cong -\frac{15}{2}(2x+3x^2)$ hallar los valores reales de a y de b.

<u>Ej. 6-13</u>: Sea $f(x) = \sqrt{16+x}$, calcular aproximadamente $\sqrt{16{,}5}$ utilizando el polinomio de Taylor de orden 2 en x=0, acotando el resto para estimar el error que se comete.

<u>APLICACIONES</u>

<u>Ej.6-14</u>: Al nivelar una larga autopista de longitud L, debe hacerse una compensación con respecto a la curvatura de la Tierra. La corrección de nivelación está dada por la función $\boldsymbol{y = R\, sec(L/R) - R}$, donde R es el radio de la Tierra medido en millas.

Si $P_2(x)$ es el polinomio de Mac Laurin de segundo grado para $f(x) = sec\ x$, utilice $sec\ x \approx P_2(x)$ para determinar la corrección aproximada del nivelado para x cercanos a 0.
Encuentre el número de pulgadas de la corrección del nivelado que se necesita para una autopista de 1 milla. Emplee R= 4000 millas.



<u>Ej. 6-15</u>: Un automóvil se mueve con velocidad de 20 m/s y aceleración de 2 m/seg^2 en determinado momento. Usar un polinomio de Taylor de segundo grado para estimar hasta que distancia se desplaza el vehículo en el segundo siguiente. ¿Sera razonable emplear ese polinomio para estimar la distancia recorrida durante el siguiente minuto? Justificar.

<u>Ej.6-16</u>: Si el polinomio de Taylor para la función ***f***, de orden ***2*** en ***x=5***, es:

P(x)=3-(x-5) +9 (x-5)^2, hallar el polinomio de Taylor de orden ***2*** en ***x=1*** de: $g(x) = \frac{2}{4-f(5x)}$

Ej. 6-17 : Hallar los valores reales de h y k de modo tal que el polinomio de Mac Laurin de grado 2 de $f(x) = h.ln(1 + k.x)$ sea $P_2(x) = 2x - 2x^2$.

Ej. 6-18: Hallar los valores de a y de b, tal que el polinomio de Mac Laurin de orden 2 de $f(x) = a.ln(1 + bx)$ en $x = 0$ sea $P(x) = 2x + 1{,}5x^2$

Ej.6-19: Determinar una raíz aproximada de la ecuación, mediante el desarrollo del polinomio de Taylor de orden 2, centrado en el valor indicado:

a) $e^x = -x + 2$. en $a = 0$ b) $\ln x^2 - \frac{5}{16}x^2 = 0$ en $a = 1$

Ej. 6-20: Verdadero – Falso. Justifica tus respuestas:

a) El polinomio de Mac Laurin de orden 4 para e^x es $e^x \cong 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4$.

b) El coeficiente de x^6 en el polinomio de Mac Laurin de orden 9 es $\frac{f^{(6)}(6)}{6!}$.

c) El residuo $R_n(x)$ en la fórmula de Taylor tiene la forma $f_{(a)}^{(n+1)} . \frac{(x-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}$.

d) El polinomio de Taylor de orden 3 en x=1 para $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ es una representación exacta de f(x), es decir tiene resto 0.

e) Si P(x) es el polinomio de Mac Laurin de orden 2 para f(x), entonces P(0)=f(0), P' (0)=f '(0) y P ''(0)=f ''(0).

f) El polinomio de Mac Laurin de orden 16 para f(x)=cos x contiene sólo potencias pares de x.

ALGUNAS RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

Ej.6-01
a) orden de contacto 0; b) orden de contacto 1; c) orden de contacto 3

Ej.6-02
a) y = 2x-1; y=$3x^2 + 2x - 1$ b) y=1-x; y= 1-x+x^2/2 c) y= x; y= x+$\frac{1}{2}x^2$

Ej.6-03: a= 1, b= -3, c=3

Ej.6-05

a) P(x)=1+0,5(x-1)-0,125$(x-1)^2$+0,0625$(x-1)^3$

b) P(x)= 1-2$(x-3)^2$

c) P(x)= 2-2x+2x^2-2x^3

d) P(x)= -π(x-1)+π^3/6 $(x-1)^3$

Ej.6-06
$P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$ $error\ 1 = 4{,}3.10^{-5},\ error\ 2 = 1{,}61.10^{-3},\ error\ 3 = 1{,}22.10^{-1}$

Ej.6-07 $error < \frac{1}{2.10^3}$

Ej.608: 0,05233

Ej. 6-09: 0,09531

Ej. 6-10: n=7

Ej.6-11: a=4, b=π

Ej.6-12: a=5, b= -3

Ej.6-13: $\sqrt{16{,}5} \cong 4.0620117$; $R_2(x) \leq 8.10^{-6}$

Ej. 6-14: y≈ $\frac{L^2}{2R}$

Ej.6-15: 21 m, No

Ej.6-16 : P(x)=2-10(x-1) +500$(x-1)^2$

Ej.6-17: k=2 y h= 1

Ej. 6-18: a=-4/3 b=-3/2

Ej. 6-19: a) $x = -2 + \sqrt{6}$ b) x= 32/21

Ej. 6-21: a) F b)F c)F d)V e)V f)V