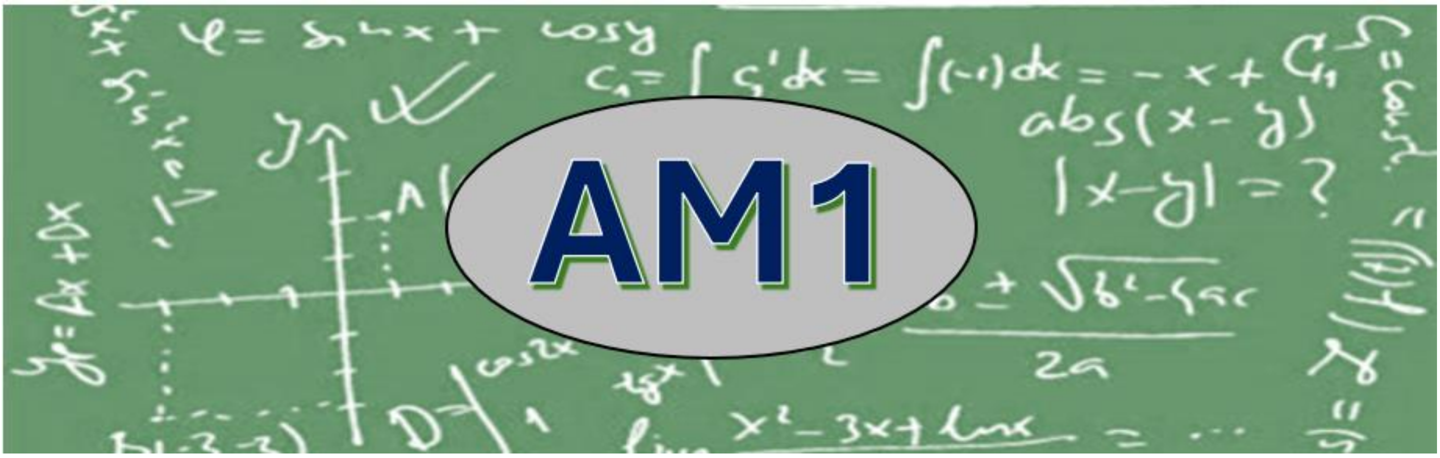


TRABAJO PRÁCTICO N.º 5: VARIACIÓN DE FUNCIONES

ANÁLISIS MATEMÁTICO 1

UTN – Facultad Regional Haedo

MATERIAS BÁSICAS

UTN – Facultad Regional Haedo

TRABAJO PRÁCTICO N.º 5
VARIACIÓN DE FUNCIONES

COMPETENCIAS

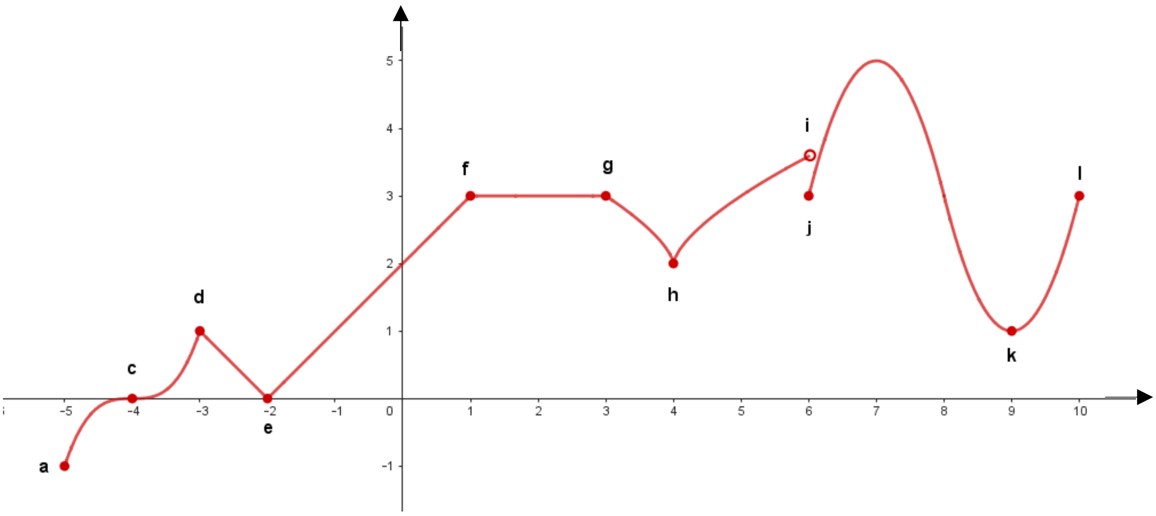
- ❖ Identificar, formular y resolver situaciones problemáticas que involucren distintos tipos de funciones, sus derivadas y/o diferenciales y sus extremos e intervalos de crecimiento/decrecimiento y concavidad.
- ❖ Utilizar de manera efectiva las técnicas y herramientas de la ingeniería
- ❖ Aprender en forma continua y autónoma, utilizando los recursos de trabajo en clase, bibliográficos, digitales y multimediales.
- ❖ Comunicar con efectividad sus producciones en forma escrita u oral, fundamentadas en el marco teórico correspondiente.

Ej. 1 **Dado el grafico de la función f definida en el intervalo [-5; 10]**

a) Indicar los extremos relativos y absolutos de la función **f** en dicho intervalo**.**

b) Indicar en qué puntos la función **f** no es derivable y por qué, justifique.

c) Indicar en qué puntos la función derivada primera de f es igual a 0. ¿Hay extremos relativos en dichos puntos?



Respuesta: Al final de TP

Ej. 2 **Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los puntos máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones**:

$a) y = x^3 - 8$ $b)\ y = x^2 - \frac{1}{x^2}$ $c)\ y = \sqrt{\frac{2x^2 - x}{2}}$ $d)\ y = 3 - \sqrt[3]{x+1}$

$e)\ y = \ln x - \frac{x^2}{2}$ $f)\ y = 2x + e^{-x}$ $g) y = x^2 + \frac{2}{x}$ $h)\ f(x) = x.e^{-x^2}$

i) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & sí\ \ x \leq 2 \\ \dfrac{x-2}{x-1} & si\ x > 2 \end{cases}$ j) $f(x) = sen\ (2x)$

Respuesta: Al final de TP

Ej. 3 Encontrar los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad de las siguientes funciones:

$a)\ y = x^3 - 2x$ $b)\ y = \frac{x}{1+x^2}$ $c)\ y = \frac{1-x}{1+x^2}$ $d)\ y = \sqrt{\frac{x}{4-x}}$

$e)\ y = x + \frac{1}{x}$ $f)\ y = x^2 e^{-x}$ $g)\ y = x^2 \ln x$ $h)\ y = sen(2x)$

Ej. 4 Determinar a, b y c para que la función $y = ax^2 + bx + c$ tenga un máximo de 7 en $x = 1$ y su gráfica pase por P (2; -2)

Respuesta: $a = -9, b = 18$ y $c = -2$

Ej. 5 ¿Para qué valores de las constantes a, b la curva $y = a \ln x + bx^2 + x$ tiene mínimo en $x_1 = 1$ y máximo en $x_2 = 2$?

Respuesta: $a = -\frac{2}{3}, b = \frac{-1}{6}$

Ej.6 Dadas las curvas $f(x) = x.\ln x$; $g(x) = \frac{x}{\ln x}$, verificar que cada un pase por el mínimo de la otra.

Respuesta: Mínimo de f(x): $\left(\frac{1}{e}, \frac{-1}{e}\right)$, Mínimo de g(x): (e, e)

Ej.7 Determinar a, b, c y d de modo que $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un punto de inflexión en (-2;6) y por tangente a $8x + y + 10 = 0$ en ese mismo punto, y, además, pase por P (0; -2)

Respuesta: $a = 1$; $b = 6$; $c = 4$; $d = -2$

Ej.8 ¿Para qué valores de las constantes a, b la curva $x^2 y + ax + by = 0$ tiene punto de inflexión en (2; 2,5)? ¿Qué otros puntos de inflexión poseen?

Respuesta: $a = -20/3$; $b = 4/3$ Punto de inflexión $(2; 2,5)$; $(0; 0)$; $(-2; -2.5)$

Ej.9 Determinar la ecuación de la parábola cúbica que pasa por (-1;1) y tiene un punto de inflexión con tangente horizontal en (-2;0)

Respuesta: $y = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Ej.10 Verificar que la abscisa del máximo de la curva $y = e^x x^2$ es la semisuma de los puntos de inflexión.

Respuesta: Puntos de inflexión: $\left(-2-\sqrt{2};\, e^{-2-\sqrt{2}}(12+8\sqrt{2})\right)$ *y* $\left(-2+\sqrt{2};\, e^{-2+\sqrt{2}}(12-8\sqrt{2})\right)$ **; Punto máximo (-2, 4 e^{-2})**

Ej. 11 De acuerdo con la gráfica, relacione la función de cada figura con una o más afirmaciones.

a) f tiene primera derivada **siempre** positiva en todo su dominio graficado.

b) f tiene segunda derivada **siempre** positiva en todo su dominio graficado.

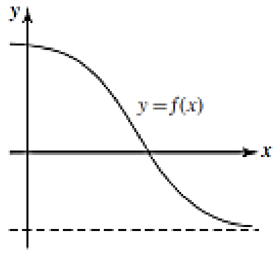
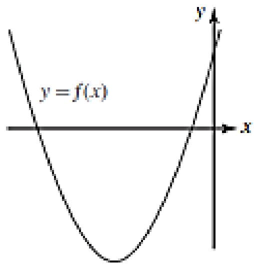
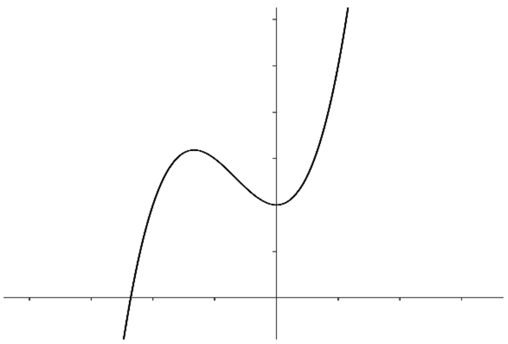
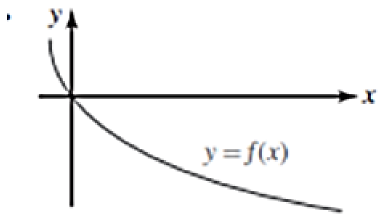
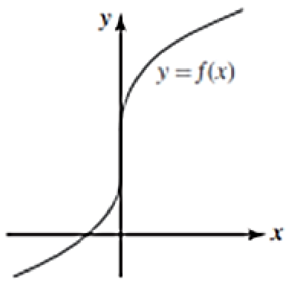
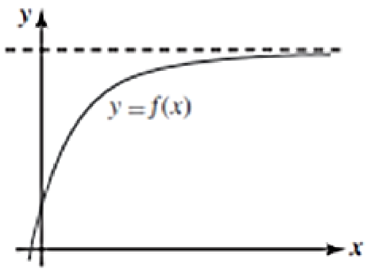
c) f tiene segunda derivada **siempre** negativa en todo su dominio graficado

d) La gráfica de f tiene punto de inflexión.

e) f es diferenciable en todo el dominio graficado

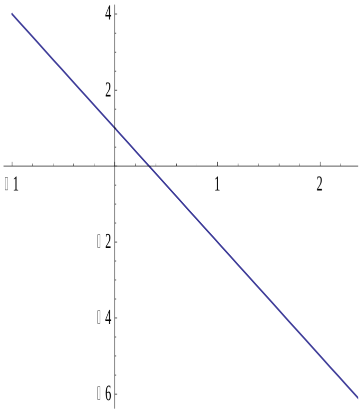
f) f tiene extremo relativo.

g) f tiene extremo absoluto

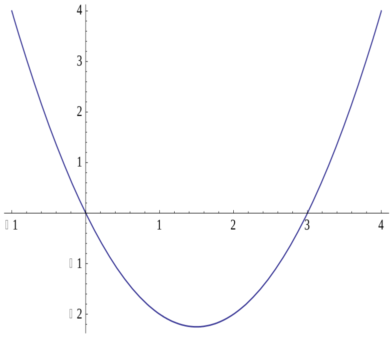
1) 	4) 
2) 	5) 
3) 	6) 

Respuesta: Al final del TP

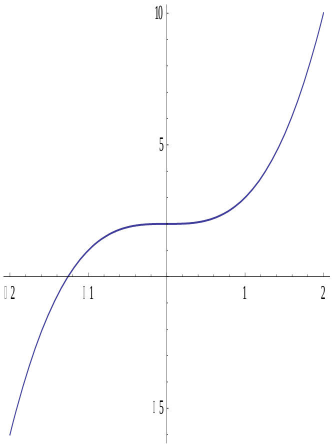
Ej.12 **Se muestra en cada ítem la gráfica de una función f. Dibujar, en cada caso, una gráfica posible de la derivada primera de f** a)



b)



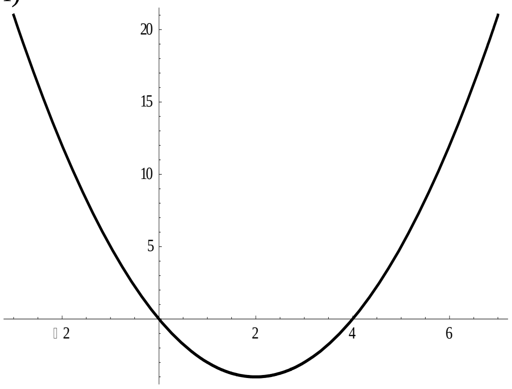
c)



Ej.13: **A continuación, se muestra en cada ítem la gráfica de la función derivada primera ($f'(x)$) de una función $f(x)$.**

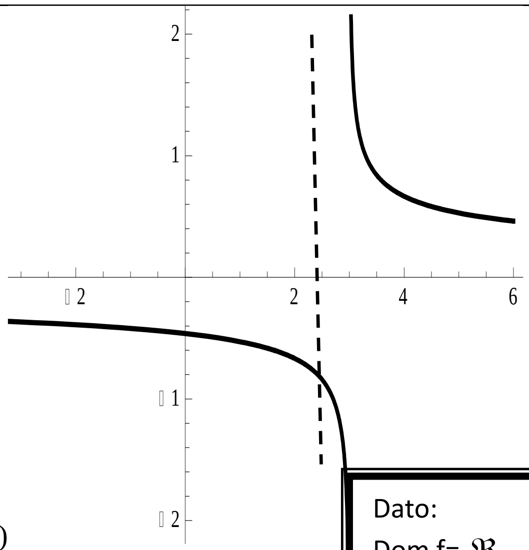
a) ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f(x)*?
b) ¿En qué valores de *x* la función tiene un máximo o un mínimo local?
c) ¿En qué intervalos la función tiene concavidad positiva y/o negativa?
d) Indicar cuáles son los valores de x para los cuales existen puntos de inflexión.
e) Con los datos obtenidos graficar f.

i)



Dato:
Dom f= $\Re$
f (0) = 0

ii)



Dato:
Dom f= $\Re$
f (2) = 0.
f (4) =0

Respuesta: Al final del TP

Ej.14 **Representar las funciones** f **y** g **cuyas características son**:

a) $f \quad continua \quad en \quad \Re; f(-2) = 3 \quad ; f(2) = -1; f'(x) = 0 \; ; \quad \forall \; x > 2;$

$f''(x) < 0 \quad \forall \; x < 2$

b) $g \;\; continua \;\; en \;\; \Re; g(-1) = 6 \;\; ; \; g(3) = -2 \;\; ; \; g'(x) < 0 \;\; si \;\; x < -1 \;\; ;$

$g'(-1) = g'(3) = -2; \quad g'(7) = 0 \quad ; g''(x) < 0 \;\; si \quad x < -1 \quad ;$

$g''(x) = 0 \quad si \; x \quad \in (-1; 3) \quad ; \qquad g''(x) > 0 \quad si \; x > 3$

<u>Estudio completo de función</u>

(dominio, intersecciones con ejes, polos, asíntotas, paridad, continuidad, puntos críticos, extremos relativos, puntos de inflexión, intervalos de crecimiento y decrecimiento, intervalos de concavidad, gráfico e imagen).

<u>Ej.15</u> **Realizar el estudio completo de las siguientes funciones. Chequear los resultados obtenidos analíticamente con GeoGebra**:

$a)\; y = \frac{1}{x^2+3}; \quad b)\; y = \frac{x^2+1}{x} \;\; ; \;\; c)\; y = \frac{x}{\sqrt{x-1}} \;\; ; \quad d) \quad y = x \ln x$

$e)\; y = x - 3(x+1)^{\frac{2}{3}} \;\; ; \; y = x^x \;\; ; \quad g)\; y = e^x x^2 \;\; ; \quad$ h) $y = \frac{x}{x^2-1}$

<u>Ej.16</u> **Determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre. Si es verdadero justificar con la definición o propiedad correspondiente**

a) Si una función derivable alcanza un valor máximo en un punto interior *c* de su dominio, entonces

***f ´(c)* =0**

b) Es posible que una función tenga un número infinito de puntos críticos.

c) Existe un máximo o mínimo relativo en cada punto critico

d) Un punto de inflexión para una función f debe ocurrir en un valor critico de $f''(x)$

e) Si$f''(c) = 0$, entonces f tiene un punto de inflexión de coordenadas (*c*; *f*(*c*)).

f) Si $f'(c) = f''(c) = 0$, entonces $f(c)$ no es máximo ni mínimo.

g) La gráfica de $y = sen\; x$ tiene un número infinito de puntos de inflexión.

<u>Aplicación: Problemas de Optimización</u>

<u>Ej.17</u>: La relación entre la potencia y la cantidad de revoluciones por minuto que desarrolla una turbina, está dada por: N(n)=$-0{,}0010344\, n^2 + 0{,}45543\, n$, donde ***n*** es el número de revoluciones por minuto (rev/min) y **N** es la potencia en caballos de fuerza (hp). ¿Para qué valor de n la potencia es máxima y qué valor alcanza?

Respuesta: $\mathbf{n = 220{,}14\ rev/min, N\ (máxima) = 50{,}13\ hp}$

<u>Ej.18:</u> Torcer un alambre de longitud **L** para que forme un rectángulo de área máxima

Respuesta: $\mathbf{Área\ máxima = 1/16\ L2, ancho = largo = 1/4\ L}$

Ej.19: Un triángulo isósceles tiene un vértice en el origen de coordenadas, la base paralela al eje x, los extremos de ésta en la curva $12y = 36 - x^2$ con $y \geq 0$, hallar el área correspondiente al triángulo máximo.

Respuesta: $\text{área} = 4\sqrt{3}$

Ej.20: Determinar el punto *(x, y)* sobre la recta $y = 5 - 3x$ más cercano al punto (1,-2).

Respuesta: el punto es (2.2, -1.6)

Ej.21: Cada página rectangular de un libro contiene 30 pulgadas cuadradas de impresión, y debe tener un margen de 2 pulgadas en la parte inferior y superior, y 1 pulgada a cada lado (margen derecho y margen izquierdo). ¿Cuál es el área mínima total en cada página?

Respuesta: área mínima: $68.98\ pulg^2$

Ej.22: Una lata cilíndrica, con volumen $54\pi\ u^3$, debe ser fabricada de manera se use la menor cantidad posible de material. Hallar las dimensiones de la lata (radio de la base y altura), que minimizan la cantidad de metal usado.

Respuesta: $r = 3$ (radio de la base); $h = 6$ (altura de la lata)

Ej.23: Un depósito de chapa sin tapa, con forma de prisma recto de base cuadrada debe tener capacidad para V litros. Hallar las dimensiones del depósito para que en su fabricación se necesite la menor cantidad de chapa posible

Respuesta: $l = \sqrt[3]{2V}$ (lado de la base); $h = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$ (altura del prisma)

Ej.24: Encontrar el volumen del cilindro de mayor área lateral inscripto en una esfera de radio R.

Respuesta: $V = \frac{\pi R^3}{\sqrt{2}}$

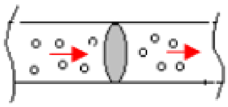
Ej.25: Demostrar que el rectángulo de perímetro dado P que tiene la diagonal más corta es el cuadrado.

Ej.26: Hallar las dimensiones del rectángulo de lados paralelos a los ejes cartesianos y de área máxima, que puede inscribirse en una elipse de ecuación $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{16} = 1$

Respuesta: $12\sqrt{2}$ y $4\sqrt{2}$

Ej.27: La carga eléctrica **Q** que atraviesa la sección de un conductor está dada por la expresión:

$Q(t) = -\frac{A}{w}\cos(wt)$ siendo A y w constantes



a) Realizar la gráfica de **Q** en función de t, en un periodo
b) Recordando que la intensidad I de la corriente indica la rapidez con que varía la carga Q que atraviesa la sección del conductor, deducir de la gráfica de la parte a) los instantes en que I es máxima y mínima.
c) Verificar con el cálculo tus respuestas a la parte anterior
d) Calcular en qué instante la intensidad I en valor absoluto es la mitad del valor máximo.

Respuesta: b) la I es máxima t = $\frac{\pi}{2w}$ y I es mínima para t = $\frac{3\pi}{2w}$; $d)$ $t_0 = \frac{\pi}{6\omega}$, $t_0 = \frac{5\pi}{6\omega}$, $t_0 = \frac{11\pi}{6\omega}$, $t_0 = \frac{7\pi}{6\omega}$

EJERCICIOS INTEGRADORES DE LA UNIDAD 5

1. Armar un mapa conceptual, en grupo, de la Unidad 5
2. Enunciados propuestos para trabajar en la resolución de problemas mediante GeoGebra

✓ **Seleccionar un problema para trabajar en grupo.**

✓**Presentar un informe con la resolución del problema elegido utilizando el GeoGebra**

- **PROBLEMA 1**

Somos fabricantes de rejillas de desagüe pluvial cuadradas. Nuestros productos se realizan con chapas cuadradas de fundición y de acero inoxidable, sus precios son respectivamente de 2 y 3 euros por centímetro cuadrado.
La cuestión para resolver es: ¿qué longitudes deberemos elegir para los lados de las rejillas si queremos que el coste total sea mínimo? Si, además, estaríamos necesitando que la suma de los contornos de las rejillas sea de 1 metro lineal para tener en cuenta los catálogos estándar de ventas.

Rejilla de desague Tapa

Ciega de Acero

Rejilla acanalada de

fundición Inoxidable

- **PROBLEMA 2**

Un Emprendimiento Inmobiliario quiere subdividir un lote en varias parcelas iguales y rectangulares, este loteo de parcelas posee un plano del terreno que permite edificar Chalets de 200 m^2 cubiertos. Este nuevo proyecto según la legislación de urbanización, indica que, entre el Chalet y los linderos de la parcela, debe haber un margen de 3 metros lineales del lado Oeste y del lado Este; y 10 metros lineales del lado Norte y del lado Sur.

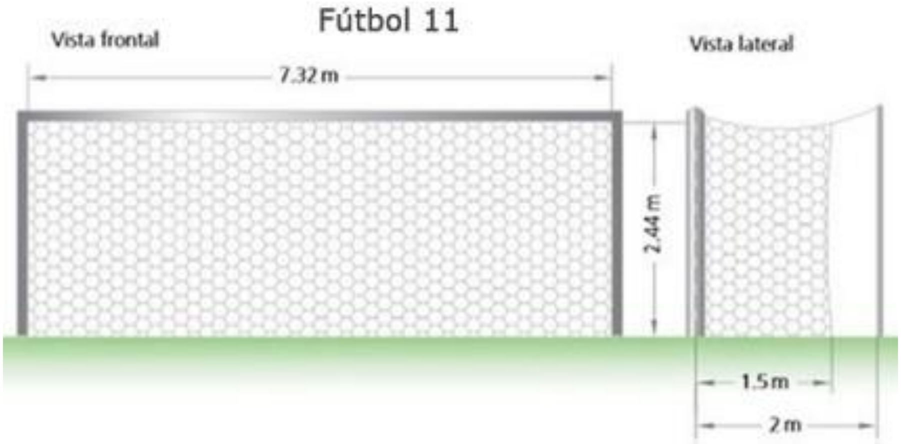
Calcular:
Las dimensiones que deben tener las parcelas para que su área sea mínima.
¿Cuál será el área de cada parcela?

- **PROBLEMA 3**

Verificar si las Porterías de la cancha de futbol profesional, según reglamento de FIFA cumplen la normativa que establece la maximización del área encerrada entre los postes y el travesaño. Entonces bajo esa longitud L:

a) ¿se podría tener una valla más dificultosa para el arquero de un equipo?

b) ¿Cuántos m^2 extras debería defender el arquero para que la valla quede invicta?



- **PROBLEMA 4**

En el pasado era habitual que la mayoría de las propiedades domésticas estaban equipadas con un diseño de un tanque de agua de 500 litros fabricado en fibras de asbesto (amianto), donde su nombre comercial es el fibrocemento.

a) Se requiere verificar la forma óptima del tanque, es decir si cumple con la minimización del uso del material sin comprometer su funcionalidad y resistencia estructural.

b) Por qué el fibrocemento ha dejado de ser un material ampliamente utilizado en la construcción de tanques de agua y otros productos.

c) Considere en su análisis los posibles impactos ambientales del fibrocemento, comparando su huella ecológica con la de otros materiales alternativos más sustentables para la economía circular.

- **PROBLEMA 5**

Los componentes básicos de un tablero eléctrico incluyen:

- Caja o gabinete: proporciona la estructura y protección física para los componentes eléctricos.
- Barras colectoras (Busbars): son conductores eléctricos en forma de barras utilizados para conectar y distribuir corrientes eléctricas de un punto a otro (suelen ser de cobre o aluminio debido a sus propiedades conductoras).
- Interruptor de control de potencia (ICP): se coloca en la primera posición dentro del cuadro eléctrico.
- Interruptor General Automático (IGA): se encuentra después del ICP.
- Protector contra sobretensiones (PCS).
- Interruptor Diferencial (ID).
- Pequeños interruptores automáticos (PIA's).

Necesitamos fabricar el marco externo del tablero eléctrico y se dispone de una varilla de hierro de 1 cm de espesor y una longitud de 2 metros.

a) Calcular las dimensiones del marco que podemos realizar de tal forma que el tablero ocupe la mayor superficie posible.

b) Las dimensiones obtenidas ¿responden a un tablero estándar? O ¿Habrá que mandar a fabricarlo con medidas especiales para aprovechar todo el listón? En este último caso, ¿existen empresas que fabriquen tableros eléctricos a medida, y cuál?

- **PROBLEMA 6**

Se va a construir un sector rectangular destinado al comedor de la facultad, utilizando una pared vidriada como un lado del sector y vallas para los otros tres lados, dejando dos espacios uno de entrada y uno de salida libres, de 1mt de ancho.

a) Dados 20 mts de vallas disponibles, determine las dimensiones que crearían un sector de máxima superficie. ¿Cuál es el área máxima?

b) Determine el área máxima si queremos hacer el mismo sector rectangular que en la figura, pero tenemos 30 mt de vallas.

c) ¿Qué espacio queda libre para circular, si se colocan 8 mesas circulares en el sector de 2 mt de diámetro cada una? El espacio libre ¿depende de cómo ubicamos las mesas unas de otras? Realice un diagrama.

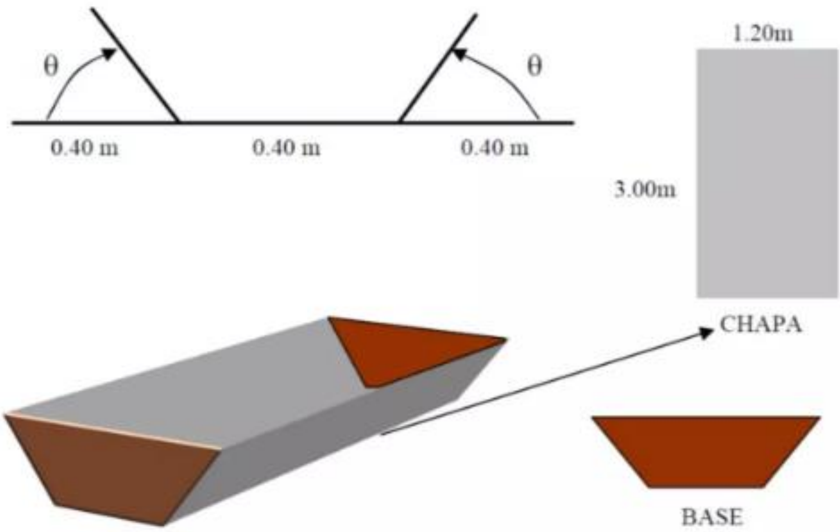
- **PROBLEMA 7**

Un ingeniero agrónomo dispone de una chapa metálica (zinc) de forma rectangular de 1,20 m por 3 m. Necesita construir con ella un bebedero para ganado procediendo a doblar la chapa como indica la figura, formando así la superficie lateral y el fondo. Los laterales más pequeños (bases) se construyen de madera dura.

a) Determinar el ángulo para que el volumen del bebedero sea máximo.

b) Calcular dicho volumen en litros.

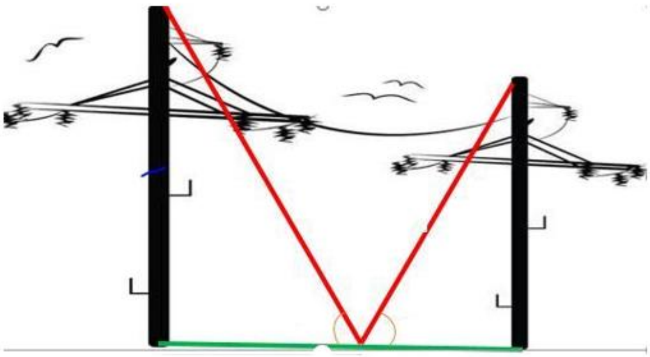
c)¿Con qué otro material puede construir el bebedero?



- **PROBLEMA 8**

Dos postes con longitudes de 6 y 8 metros respectivamente se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas una distancia de 10 metros.

a) Calcule la longitud mínima de un cable que pueda ir desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo entre los postes y luego hasta la punta del otro poste.



ALGUNAS RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

Ej. 1

a) Máximo absoluto: $P(7; f(7))$; Máximos relativos: $P(-3;\ f(-3))$;
Mínimo Absoluto: $P(-5, f(-5))$; Mínimos relativos: $P(-2;\ 0)$, $P(4;\ f(4))$, $P(9, f(9))$

b) En $x = -3, x = 1, x = 3, x = 4$ no es derivable por punto anguloso ;
En $x = 6$ no es derivable por no ser continua en el punto

c) $F'(x) = 0$ en $x = -4, x = 7$ y $x = 9$, solo hay extremo relativo en $x = 7$ y $x = 9$

Ej. 2:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Mínimo	no hay	no hay	(0;0) $(\frac{1}{2};0)$	no hay	no hay	(-ln2, f (-ln 2))	(1,3)	$\left(\sqrt{\frac{1}{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{e}}{e}\right)$	(2;0)	$((4k+3)\frac{\pi}{4};-1)$
Máximo	no hay	no hay	no hay	no hay	$(1,-\frac{1}{2})$	no hay	no hay	$\left(-\sqrt{\frac{1}{2}};\frac{-1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{e}}{e}\right)$	(0,4)	$((4k+1)\frac{\pi}{4};1)$
Crece	R	(0; +∞)	(1/2; +∞)	----	(0;1)	(-ln2; +∞)	(1; +∞)	$(-\sqrt{\frac{1}{2}};\sqrt{\frac{1}{2}})$	(-∞;0) ∪ (2; +∞)	$(-\frac{\pi}{4}:\frac{\pi}{4})$
Decrece	-	(-∞;0)	(-∞;0)	R	(1; +∞)	(-∞; -ln2)	(-∞;0)	$(-\infty;-\sqrt{\frac{1}{2}}) \cup (\sqrt{\frac{1}{2}};\infty)$	(0;2)	$(\frac{\pi}{4}:-3\frac{\pi}{4})$

Ej. 3

	Punto de inflexión	Concavidad Positiva	Concavidad Negativa
a	$(0;0)$	$(0;+\infty)$	$(-\infty;0)$
b	$(0;0)$; $\left(-\sqrt{3};-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$; $(\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{4})$	$(-\sqrt{3};0) \cup (\sqrt{3};+\infty)$	$(-\infty;-\sqrt{3}) \cup (0;\sqrt{3})$
c	$(-1;1)$; $\left(2-\sqrt{3};\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)$; $\left(2+\sqrt{3};\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)$	$(-\infty;-1) \cup (2-\sqrt{3};2+\sqrt{3})$	$(-1;2-\sqrt{3}) \cup (2+\sqrt{3};\infty)$
d	$(1;\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(1;4)$	$(0;1)$
e	*no hay*	$(0;+\infty)$	$(-\infty;0)$
f	$\left(2+\sqrt{2};(2+\sqrt{2})^2e^{-(2+\sqrt{2})}\right)$;	$(-\infty;2-\sqrt{2}) \cup (2+\sqrt{2};+\infty)$	$(2-\sqrt{2}\ ;\ 2+\sqrt{2})$

	$\left(2-\sqrt{2};\left(2-\sqrt{2}\right)^2 e^{-(2-\sqrt{2})}\right)$		
g	$(e^{-3/2};-\frac{3}{2}e^{-3})$	$(e^{-3/2};+\infty)$	$(0;e^{-3/2})$
h	$(0;0)$; $(\frac{\pi}{2};0)$; $(\frac{3\pi}{2};0)$	$(\frac{\pi}{2};\pi)\cup(\frac{3\pi}{2};2\pi)$	$(0;\frac{\pi}{2})\cup(\pi;\frac{3\pi}{2})$

Ej. 11

a) Funciones 3 y 6
b) Función 4 y 5
c) Función 6
d) Funciones 1, 2 y 3
e) Funciones 1, 2, 3,4, 5 y 6
f) Funciones 2 y 4
g) Función 4

Ej.13

	crece	decrece	máximo	mínimo	Concavidad positiva	Concavidad negativa	Pto de inflexión
i)	$(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$	(0,4)	(0, f (0))	(4, f (4))	(2, +∞)	(-∞; 2)	(2, f (2))
ii)	$(3,+\infty)$	$(-\infty,3)$	no hay	(3, f (3))	No tiene	(-∞; 3) ∪ (3, +∞)	no hay

Ej. 16 a), b), g) verdadero; c), d), e), f) falso