

UNIDAD 4

TEOREMAS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

- TEOREMA DE ROLLE
 - TEOREMA DE LAGRANGE
 - TEOREMA DE CAUCHY
- 
- TEOREMA DE L'HOPITAL

¿Qué observamos en la gráfica de la función en el intervalo $[1,2]$?

Es continua en el intervalo

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}$$

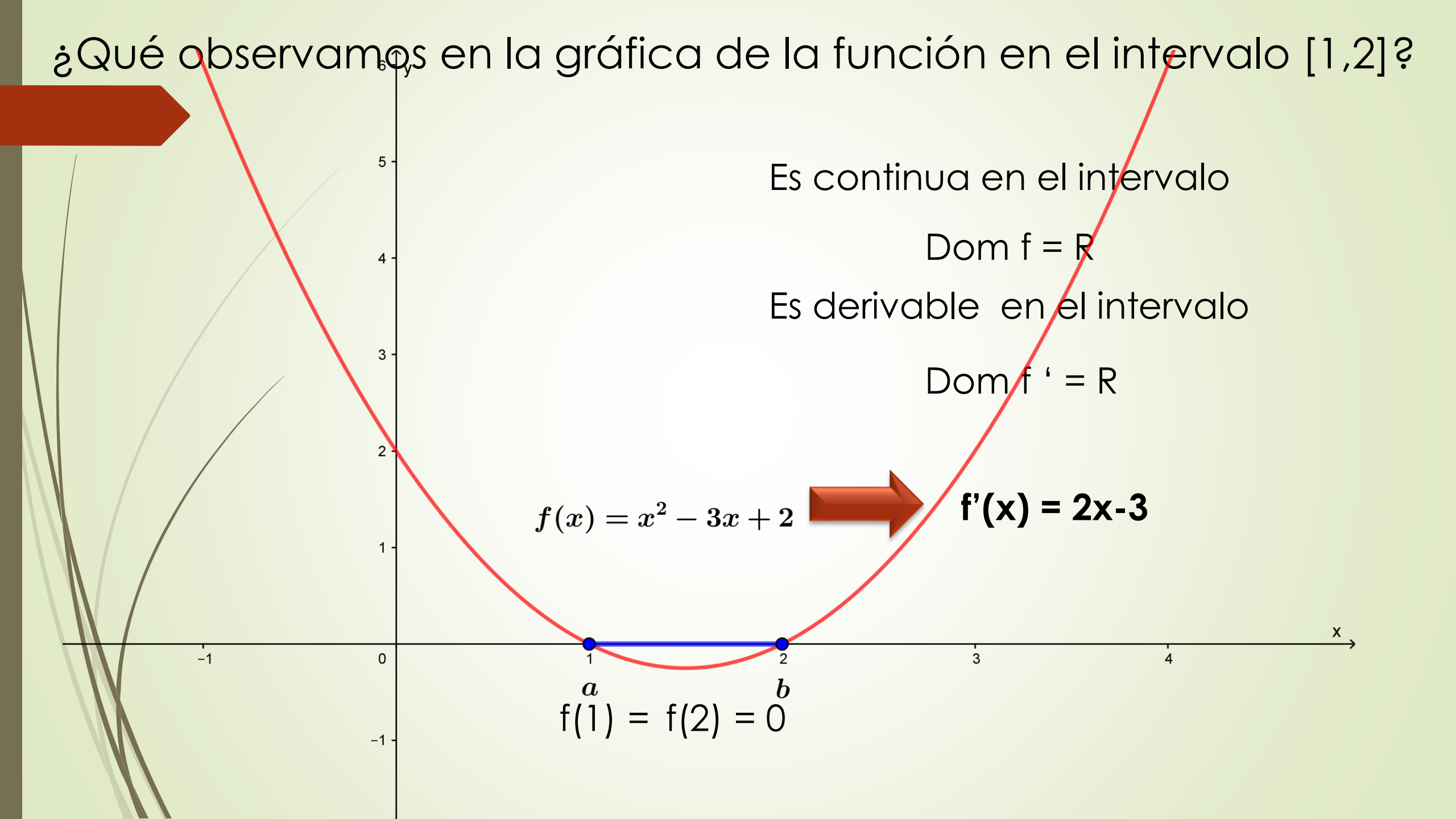
Es derivable en el intervalo

$$\text{Dom } f' = \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$f'(x) = 2x - 3$$

$$f(1) = f(2) = 0$$



¿Qué observamos en la gráfica de la función en el intervalo $[-1, 1]$?

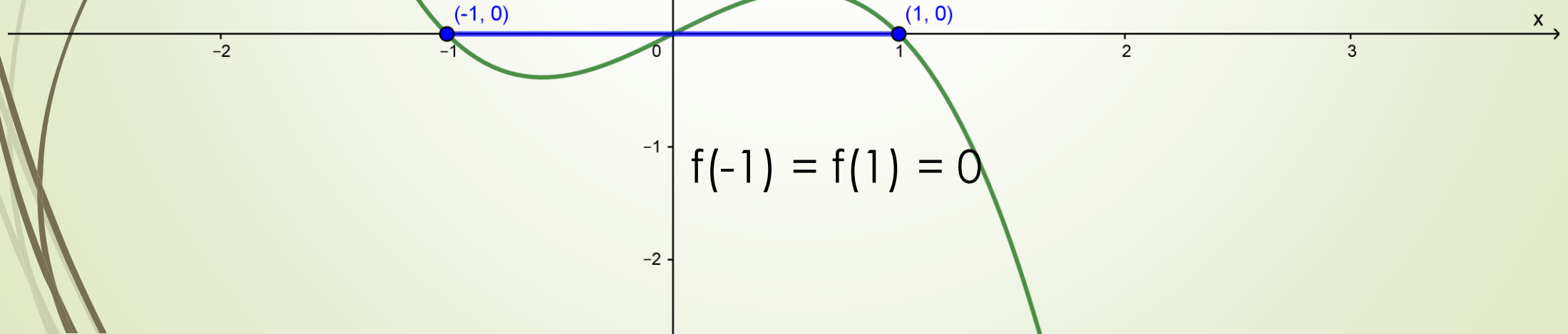
Es continua en el intervalo $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

Es derivable en el intervalo $\text{Dom } f' = \mathbb{R}$

$$y = x - x^3$$



$$y' = 1 - x^2$$



$$f(-1) = f(1) = 0$$

¿Qué observamos en la gráfica de la función en el intervalo $[0,4]$?

Es continua en el intervalo

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$

No es derivable en el intervalo

$\text{Dom } f' = \mathbb{R} - \{2\}$

$$f(0) = f(4)$$

$(0, 1.59)$

$(4, 1.59)$

a

b

$$y = \sqrt[3]{(x-2)^2} \longrightarrow y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-2}}$$



¿Qué observamos en la gráfica de la función en el intervalo $[-2,1]$?



$(-2,6)$

$$f(-2) \neq f(1)$$

Es continua en el intervalo

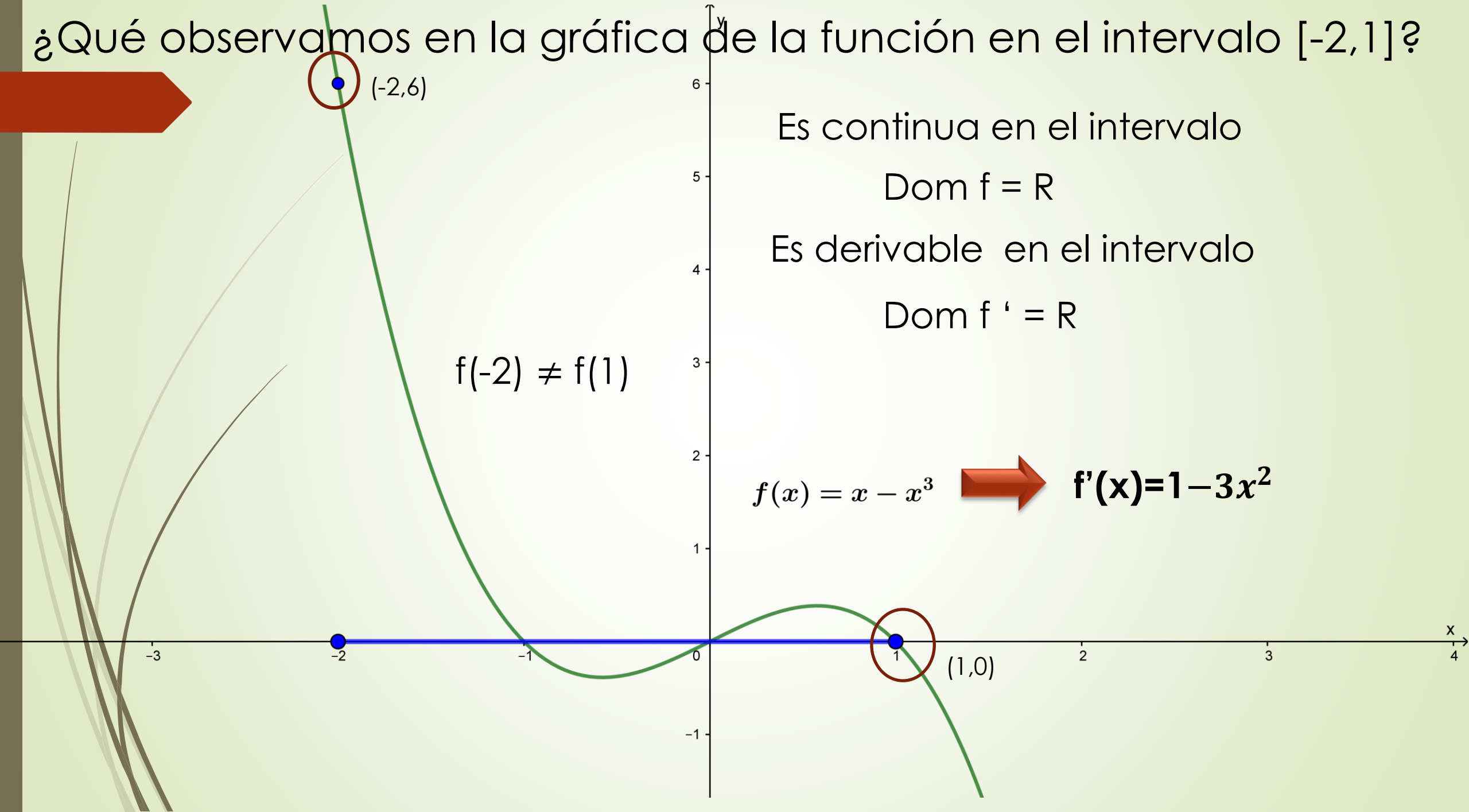
$$\text{Dom } f = \mathbb{R}$$

Es derivable en el intervalo

$$\text{Dom } f' = \mathbb{R}$$

$$f(x) = x - x^3 \quad \longrightarrow \quad f'(x) = 1 - 3x^2$$

$(1,0)$



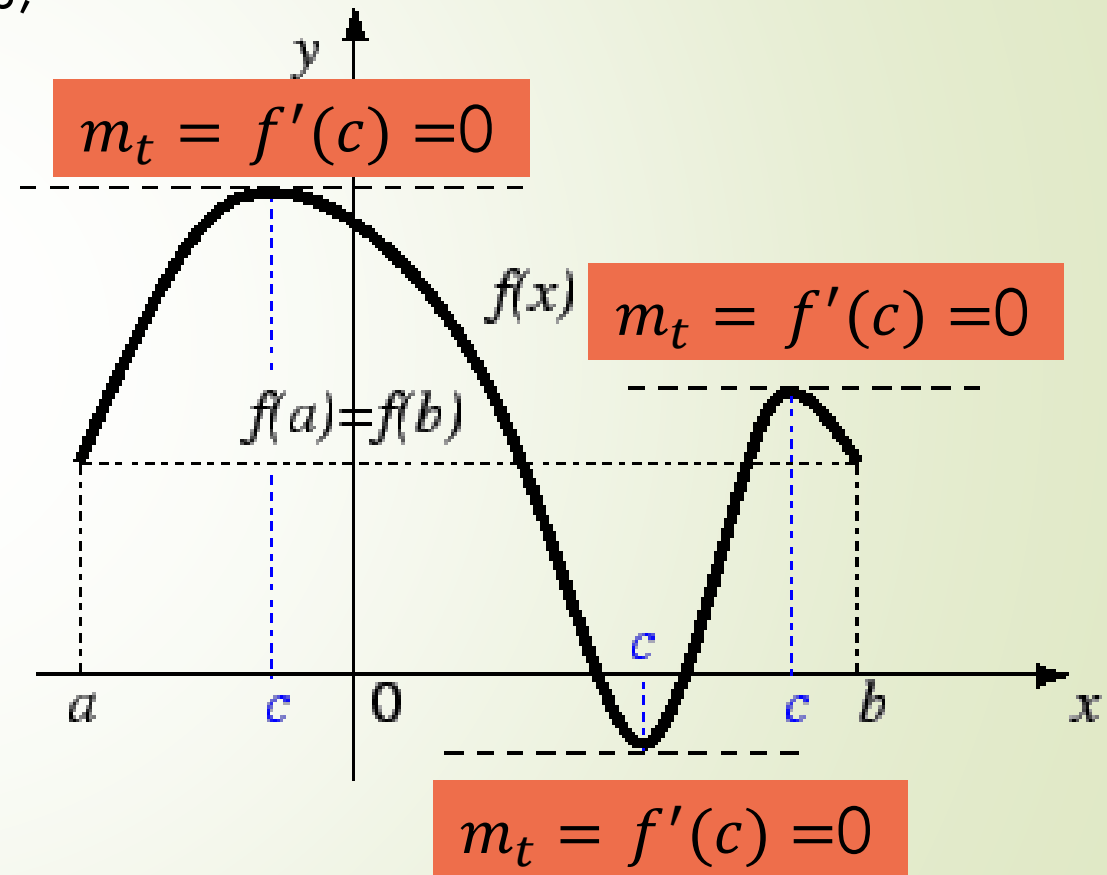
TEOREMA DE ROLLE

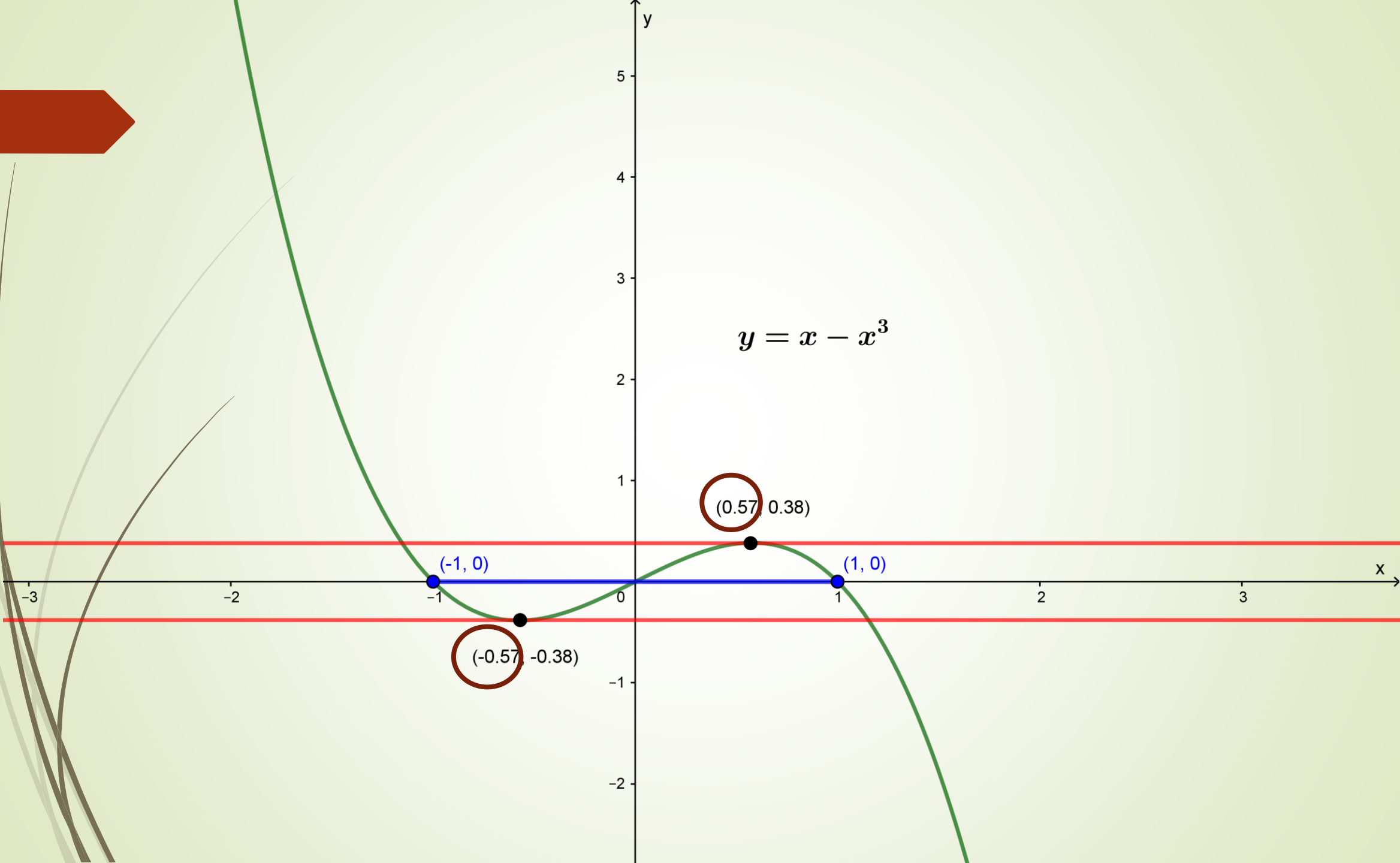
Si una función f definida, por lo menos, en un intervalo $[a,b]$ es:

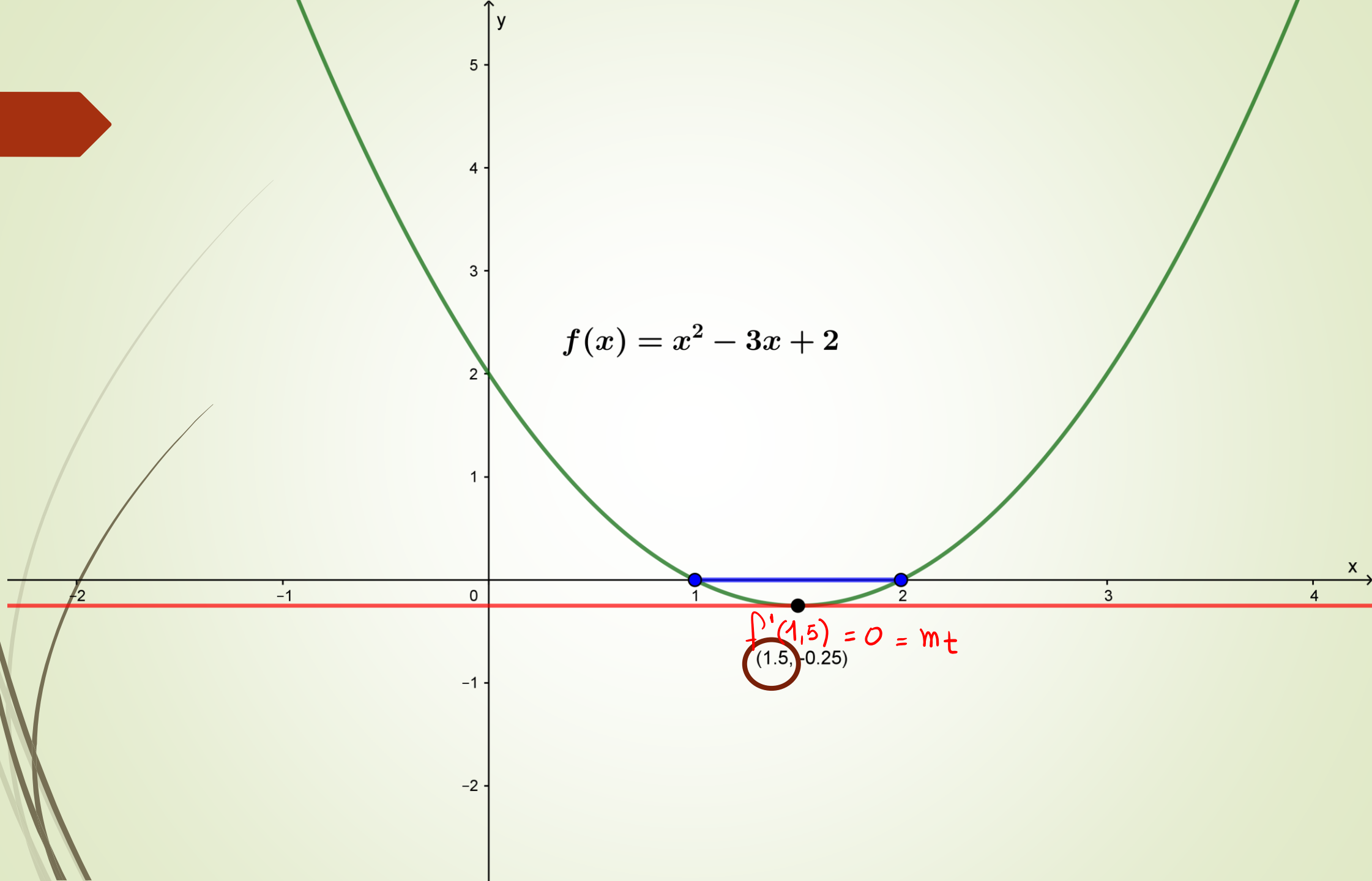
- continua en el intervalo $[a,b]$
- derivable en el intervalo (a,b)
- $f(a) = f(b)$

Entonces

Existe por lo menos un punto c que pertenece al intervalo (a,b) en el cual **$f'(c) = 0$**







$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$f'(1.5) = 0 = m_t$$

(1.5, -0.25)

Ejercicio 4-01

Verificar si es **aplicable** el teorema de Rolle en el intervalo indicado. Hallar el punto c , si es aplicable el teorema.

$$h) \quad f(x) = \begin{cases} -x^2 - x & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{en } [-1, 1]$$

1) ¿ es continua en el intervalo dado?

$\text{Dom } f = \mathcal{R}$ ¿ es continua en $x = 0$?

$$1) f(0) = 0^2 - 0 = 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 - x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 - x) = 0 \end{array} \right\} \exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$3) f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Es continua en $x = 0$, por lo tanto es continua en el intervalo $[-1, 1]$

2) ¿ es derivable en el intervalo (a,b)?

$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

¿ es derivable en $x = 0$?

$$\left. \begin{aligned} f'(0^+) &= 2 \cdot 0 - 1 = -1 \\ f'(0^-) &= -2 \cdot 0 - 1 = -1 \end{aligned} \right\} \exists f'(0) = -1$$

$$\left. \begin{aligned} 3) f(-1) &= -(-1)^2 - (-1) = -1 + 1 = 0 \\ f(1) &= (1)^2 - (1) = 1 - 1 = 0 \end{aligned} \right\} f(-1) = f(1) = 0$$

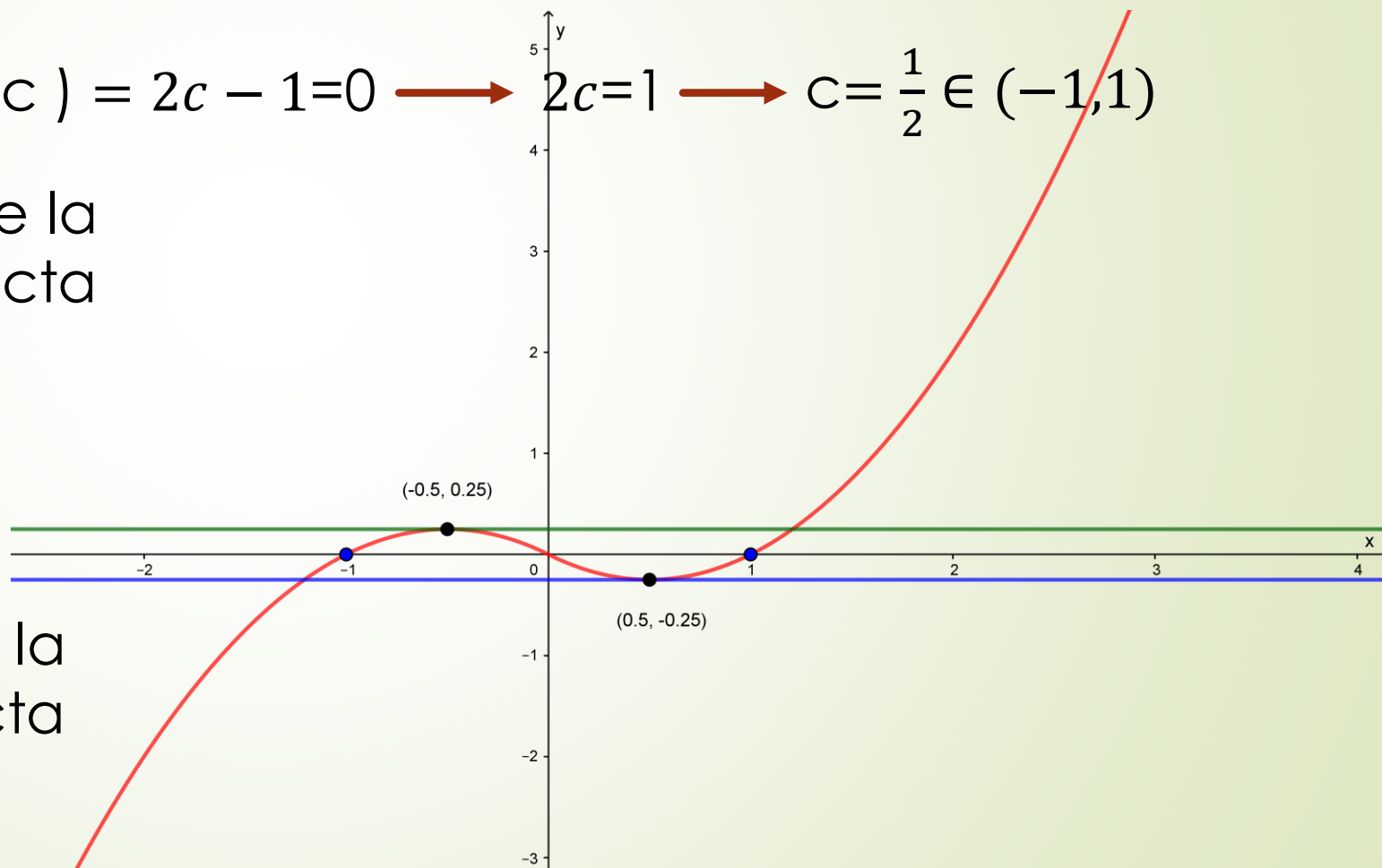
Por lo tanto podemos aplicar el teorema que nos asegura que existe un punto c tal que $f'(c) = 0$

$$f'(x) = -2x - 1 \longrightarrow f'(c) = -2c - 1 = 0 \longrightarrow -2c = 1 \longrightarrow c = -\frac{1}{2} \in (-1, 1)$$

$$f'(x) = 2x - 1 \longrightarrow f'(c) = 2c - 1 = 0 \longrightarrow 2c = 1 \longrightarrow c = \frac{1}{2} \in (-1, 1)$$

En el punto $(-1/2, 1/4)$ de la curva trazamos una recta tangente horizontal.

En el punto $(1/2, -1/4)$ de la curva trazamos una recta tangente horizontal.



TEOREMA DE LAGRANGE

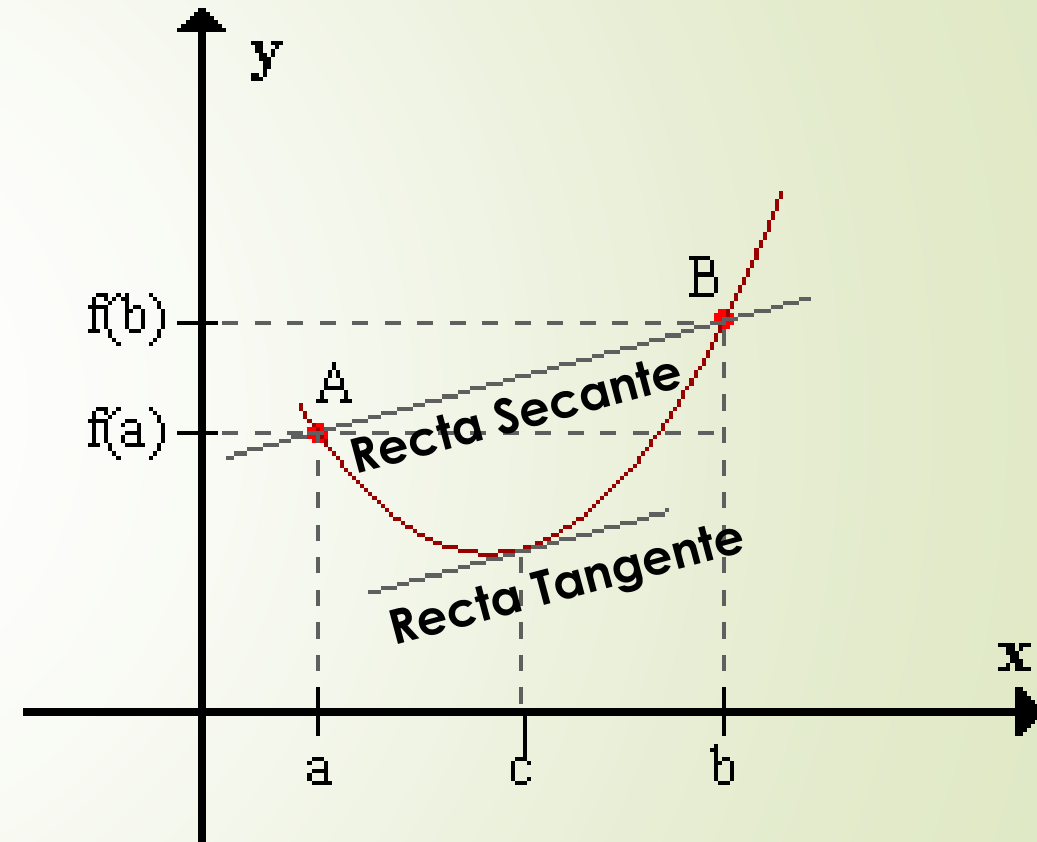
Si una función f definida, por lo menos, en un intervalo $[a,b]$ es:

- continua en el intervalo $[a,b]$
- derivable en el intervalo (a,b)

Entonces

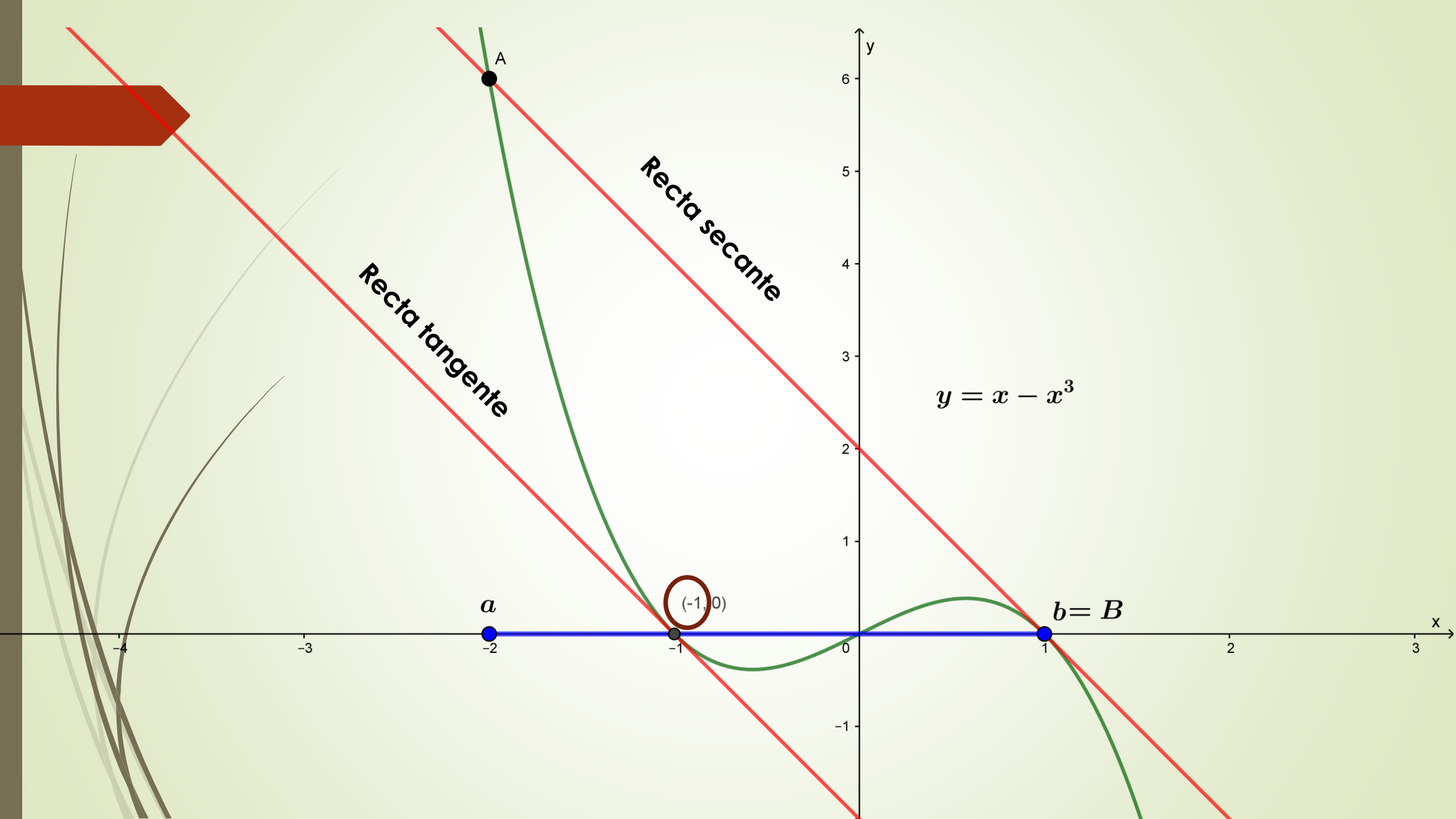
Existe por lo menos un punto c que pertenece al intervalo (a,b) en el cual

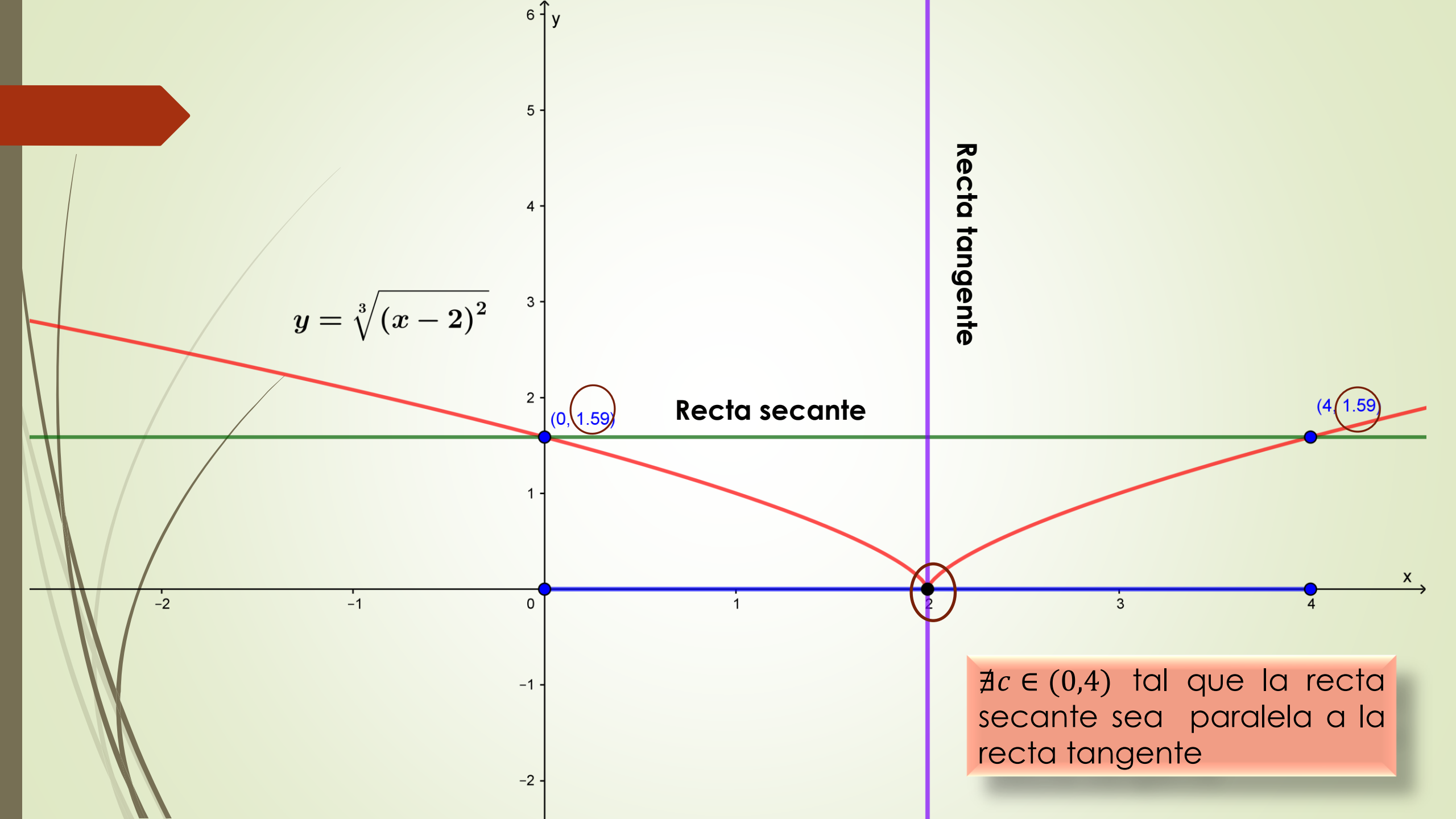
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



RECORDEMOS

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$





A graph of the function $y = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ is shown on a Cartesian coordinate system. The x-axis ranges from -3 to 5, and the y-axis ranges from -2 to 6. The function is a red curve that has a cusp at (2, 0). A green horizontal line, labeled 'Recta secante', passes through the points (0, 1.59) and (4, 1.59) on the curve. A vertical purple line, labeled 'Recta tangente', is tangent to the curve at the point (2, 0). The points (0, 1.59) and (4, 1.59) are circled in brown. The point (2, 0) is also circled in brown. The equation $y = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ is written in black text above the curve. A red arrow points to the right from the left edge of the image.

$$y = \sqrt[3]{(x-2)^2}$$

Recta tangente

Recta secante

(0, 1.59)

(4, 1.59)

$\nexists c \in (0,4)$ tal que la recta secante sea paralela a la recta tangente

Ejercicio 4-03

Verificar si es **aplicable** el teorema de Lagrange en el intervalo indicado. Hallar el punto c , si es aplicable el teorema.

e) $y = \ln |1-x|$ en $[2,3]$

$$y = \ln |1-x| = \begin{cases} \ln(1-x) & \text{si } 1-x > 0 \longrightarrow x < 1 \\ \ln(-1+x) & \text{si } 1-x < 0 \longrightarrow x > 1 \end{cases}$$

$$\text{Dom } f = \mathcal{R} - \{1\}$$

En 1 no es continua la función, pero 1 no pertenece al intervalo dado

Es continua para los $x < 1$

Es continua para los $x > 1$, por lo tanto es continua en el intervalo $[2,3]$.

Derivamos la rama que corresponde al intervalo dado.

$$y' = \frac{1}{x-1} \quad \text{Dom } f' = \mathcal{R} - \{1\}$$

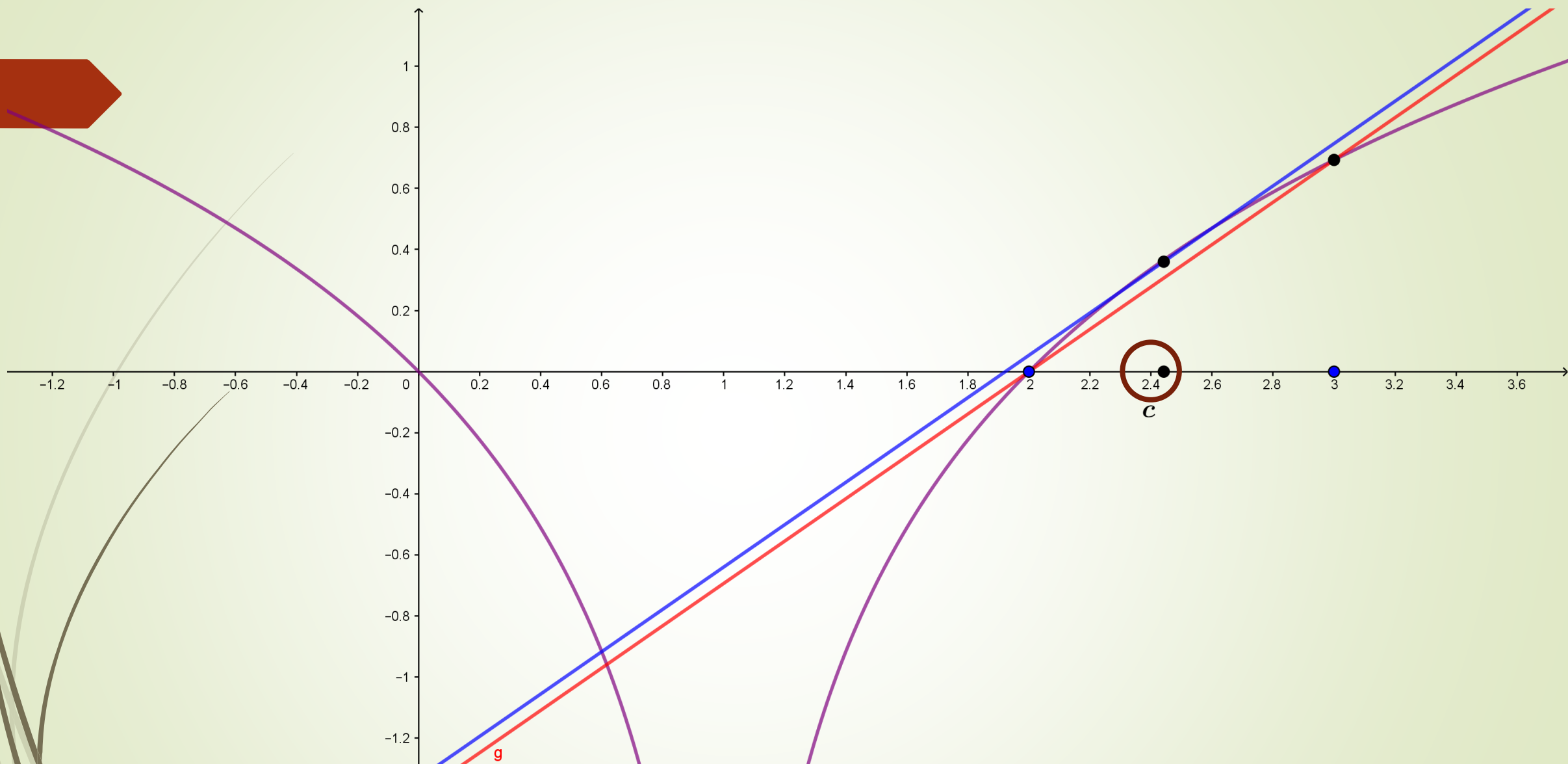
No es derivable en 1, pero como no pertenece al intervalo dado, vamos a decir que es derivable en el intervalo (2,3)

Cumple con las condiciones de la hipótesis por lo tanto el teorema es aplicable. Nos asegura que existe por lo menos un punto c en el intervalo, tal que la recta tangente y la recta secante son paralelas

$$\frac{1}{c-1} = \frac{\ln(-1+3) - \ln(-1+2)}{3-2}$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\frac{1}{c-1} = \frac{\ln(2) - \ln(1)}{1} = \ln 2 \longrightarrow 1 = \ln 2 (c-1) \longrightarrow \frac{1+\ln 2}{\ln 2} = c \in (2,3)$$



TEOREMA DE CAUCHY

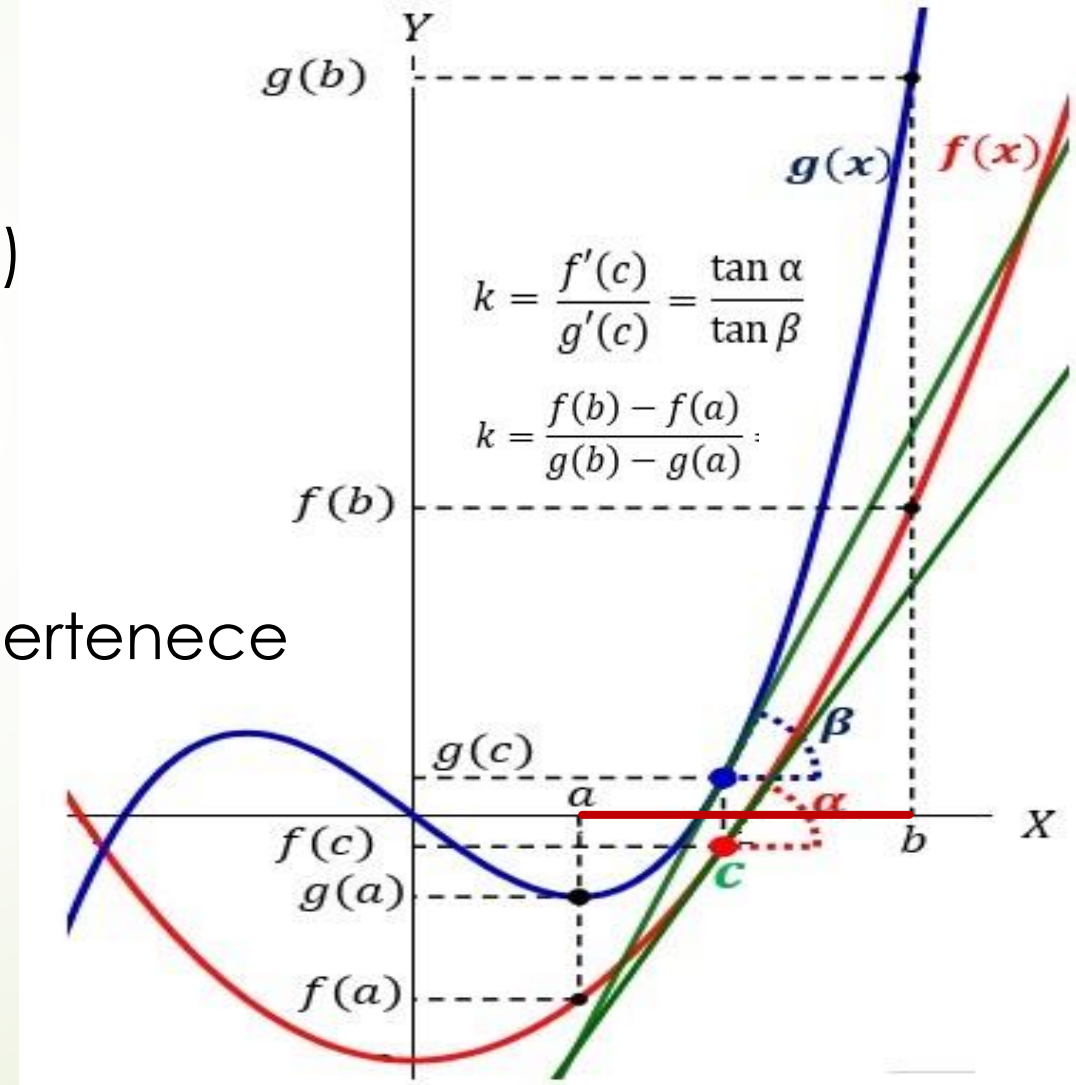
Si una función f y g están definidas, por lo menos, en un intervalo $[a,b]$ y se cumple:

- f y g continuas en el intervalo $[a,b]$
- f y g derivables en el intervalo (a,b)
- $\forall x \in (a,b): g'(x) \neq 0$

Entonces

Existe por lo menos un punto c que pertenece al intervalo (a,b) tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$



Ejercicio 4-05

Verificar si es **aplicable** el teorema de Cauchy en el intervalo indicado. Hallar el punto c , si es aplicable el teorema.

$$a) f(x) = \frac{1}{3}x^2 \quad g(x) = 2x^4 \quad \text{En } [0,1]$$

$$1) \text{ Dom } f = \mathbb{R} ; \text{ Dom } g = \mathbb{R}$$

Ambas funciones son continuas en el intervalo $[0,1]$

$$2) f'(x) = \frac{2}{3}x \quad \text{Dom } f' = \mathbb{R}$$

$$g'(x) = 8x \quad \text{Dom } g' = \mathbb{R}$$

Ambas funciones son derivables para todo x en el intervalo $[0,1]$

$$3) \quad \forall x \in (a, b): g'(x) \neq 0$$

$$g'(x) \neq 0 \rightarrow g'(x) = 8x = 0 \rightarrow x = 0 \notin (0,1)$$

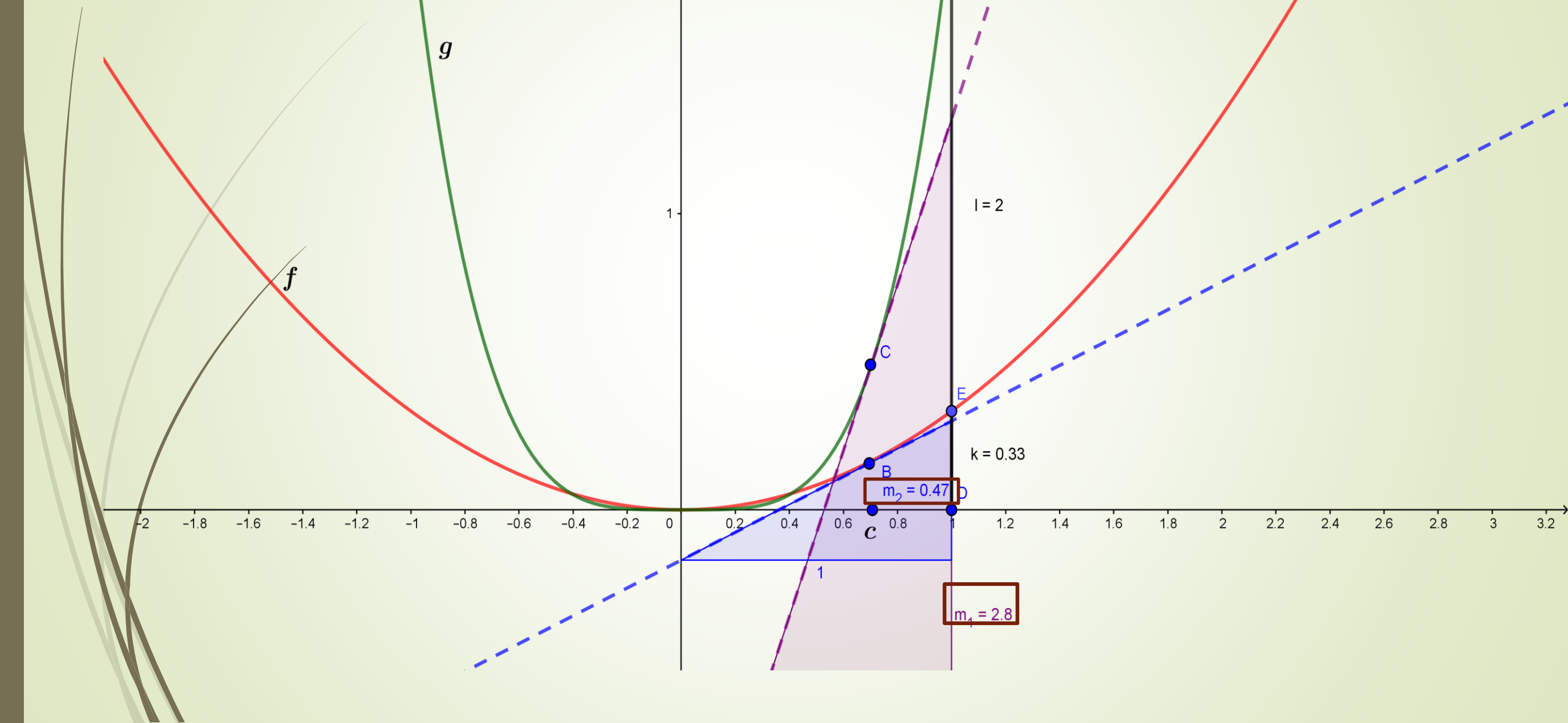
Cumple con las condiciones de la hipótesis por lo tanto el teorema es aplicable. Nos asegura que existe por lo menos un punto c en el intervalo dado.

$$\exists c \in (0,1) / \frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\frac{\frac{1}{3} - 0}{2 - 0} = \frac{\frac{2}{3}c}{8c^3}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{12c^2} \rightarrow 12c^2 = 6 \rightarrow c = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$c = \sqrt{\frac{1}{2}} \in (0,1)$$



El teorema de Cauchy se denomina también **teorema Generalizado del Valor Medio**, ya que el **teorema del Valor Medio** o de Lagrange es un caso particular del teorema de Cauchy. Cuando $g(x) = x$, el teorema de Cauchy se reduce al de Lagrange.

$$g(b) = b; \quad g(a) = a$$

Como la **derivada** de la segunda **función** es la unidad:

$$g'(x) = 1$$

Se comprueba que la expresión de Cauchy, en este caso queda reducida a la de Lagrange.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(c)}{1}$$

Regla de L'Hôpital

1ra Regla de L'Hôpital (Teorema del límite de un cociente de infinitésimos)

Sean f y g dos funciones definidas, por lo menos, en un entorno reducido $E'(a; \delta)$.

Si se verifica que:

(i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

$$x \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

$$x \rightarrow \infty$$

(ii) f y g son derivables en $E'(a; \delta)$

(iii) $\forall x \in E'(a; \delta): g'(x) \neq 0$

(iv) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Este límite tiene que existir. O sea nos tiene que dar **único valor** o **infinito**.

Existen versiones de este teorema para límites laterales, y generalizaciones del mismo para límites en el infinito.

Ejemplo

Resolvámos algebraicamente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x \cdot (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \cdot (1 + \cos x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \cdot (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin x \cdot \sin x}{x \cdot x (1 + \cos x)} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = 0$$

Resolvemos con Regla de L' Hopital

EJERCICIO 4-06

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2e^{2x}} = \frac{0}{2} = 0$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(5x)}{\cos(7x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-5 \cdot \sin(5x)}{-7 \sin(7x)} = \frac{5}{7}$$

¿Siempre podemos aplicar la Regla de L'Hopital?

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} = -1 \quad \text{ERROR}$$

$\frac{\infty}{\infty}$

Este límite NO existe porque el coseno oscila entre -1 y 1

No podemos aplicar la Regla de L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x} + \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = 1$$

$\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \operatorname{sen} x = 0$$

Infinitésimo Función acotada