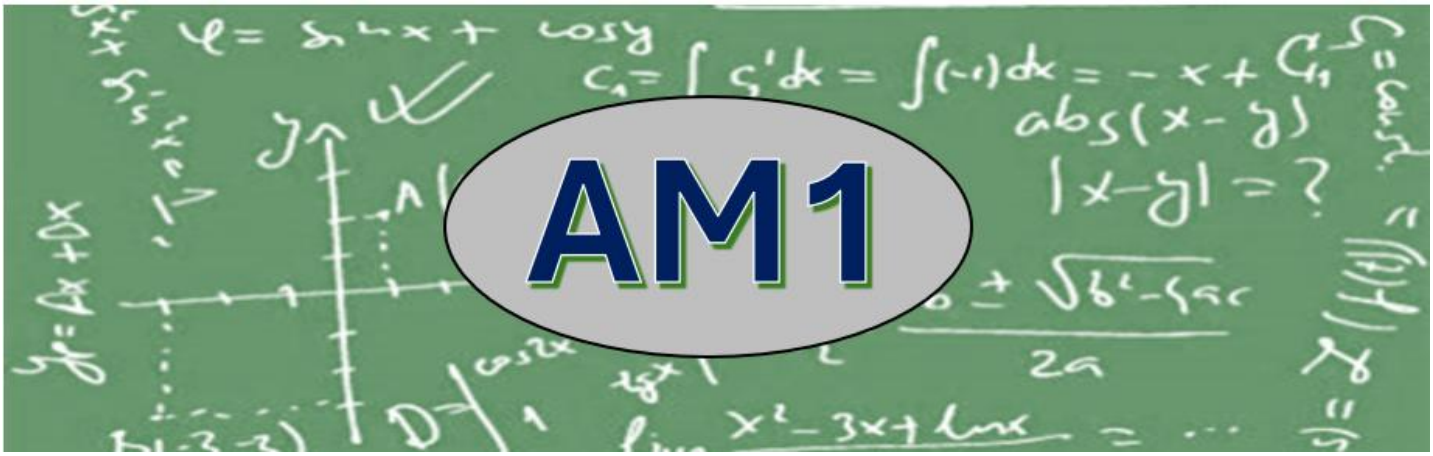


TRABAJO PRÁCTICO N º 5: TEOREMAS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

ANÁLISIS MATEMÁTICO 1

UTN – Facultad Regional Haedo

TRABAJO PRÁCTICO Nº 4: TEOREMAS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

Competencias:

- Identificar, formular y resolver situaciones problemáticas que involucren los teoremas del cálculo diferencial.
- Utilizar de manera efectiva las técnicas y herramientas de la ingeniería
- Aprender en forma continua y autónoma
- Comunicar con efectividad
- Utilizar software de aplicación como herramienta de cálculo y grafica que acompañe el proceso de resolución de una situación problemática.

Teorema de Rolle

Sea f una función definida, por lo menos, en un intervalo cerrado $[a; b]$.

H)

Si se verifica que:

(i) f es continua en $[a; b]$

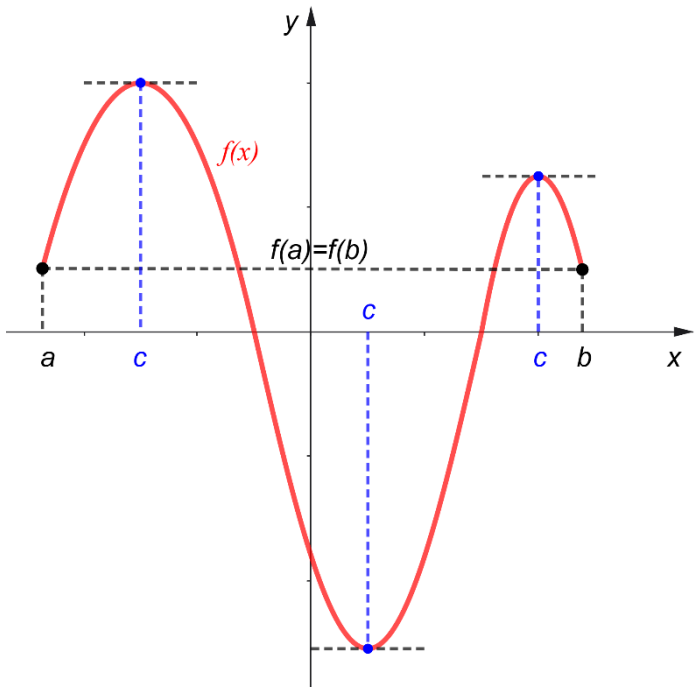
(ii) f es derivable en $(a; b)$

(iii) $f(a) = f(b)$

T)

Entonces existe algún número $c \in (a; b)$ tal que $f'(c) = 0$

Interpretación Geométrica:



Tres puntos con tangente horizontal para f(x) en el intervalo [a; b]

Ej.5-01

La función $\boldsymbol{h(x) = x^3 - 9x + 1}$ satisface las premisas de la hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo cerrado $[\boldsymbol{0}; \boldsymbol{b}]$. Hallar $\boldsymbol{b}$ y el punto $\boldsymbol{c}$.

Ej.5-02

Sea g(x) la función definida mediante: $g(x) = \begin{cases} ax(x+1) & si \quad x \in [-1,0] \\ x(x-1)^2 & si \quad x \in (0,1] \end{cases}$

¿Para qué valores reales de a puede aplicarse el teorema de Rolle a la función g(x) en el intervalo [-1;1]?

Ej.5-03

¿Es posible calcular los números reales $\boldsymbol{a}$, b y k para que la función $\boldsymbol{f(x)} =$

$\begin{cases} \boldsymbol{5x+1} & \boldsymbol{si \quad x<1} \\ \boldsymbol{ax^2+bx-9} & \boldsymbol{si \quad x \geq 1} \end{cases}$, cumpla las hipótesis de Rolle en el intervalo $[\boldsymbol{0}; \boldsymbol{k}]$?

Ej.5-04

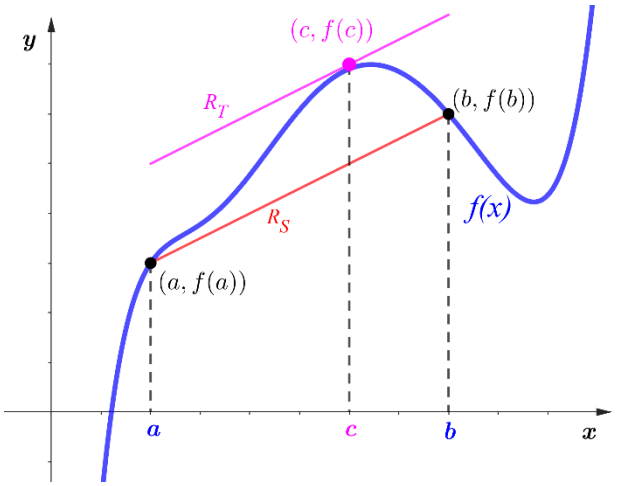
La función: f(x) = $\begin{cases} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{x=0} \\ \boldsymbol{1-x} & \boldsymbol{0<x\leq 1} \end{cases}$ es derivable en $(\boldsymbol{0};\boldsymbol{1})$ y satisface $\boldsymbol{f(0) = f(1)}$, sin embargo su derivada nunca es cero en (0;1). ¿Por qué consideras que esta función contradice al Teorema de Rolle? Explicar.

Teorema del valor medio de Lagrange

H) Sea f una función definida, por lo menos, en un intervalo cerrado $[a; b]$.
Si se verifica que:
(i) f es continua en $[a; b]$
(ii) f es derivable en $(a; b)$

T) Entonces existe algún número $c \in (a; b)$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Interpretación Geométrica:



La recta tangente en el punto C(c,f(c)) es paralela a la recta secante que pasa por los puntos A(a,f(a)) y B(b,f(b))

Ej.5-05

Comprobar si es aplicable el teorema de Lagrange a las funciones dadas en los intervalos indicados. Para aquellas funciones en las cuales el teorema de Lagrange sea aplicable, hallar el punto c.

a) $y = \sqrt{x}$ en $[1; 4]$

b) $y = ln\, x$ en $[1; e]$

c) $y = ln|1 - x|$ en $[2; 3]$

d) $y = 3(x-2)^{2/3} + 1$ en $[1; 3]$

e) $g(x) = \begin{cases} 3x^2, & x < 1 \\ x^3 + 3x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$ en $[0; 3]$

Ej.5-06

(a) Dada la función $f(x) = \sqrt{x}$ y el intervalo cerrado $[1; 9]$ Hallar:(i) la ecuación de la recta secante a la gráfica en los puntos$A(1; 1)$ y $B(9; 3)$; (ii) la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto $C(c; f(c))$, donde c es el número de Lagrange para $f(x)$ en $[1; 9]$. Representar en un mismo gráfico la función y ambas rectas.

(b) La altura de un objeto,t segundos después de haberlo dejado caer desde una altura de 500 pies, está dada por la fórmula $s(t) = -16t^2 + 500$. Hallar la velocidad media del objeto en los tres primeros segundos. Usar el teorema de Lagrange para verificar que en algún instante de ese intervalo de tiempo: su velocidad instantánea es igual a su velocidad media. ¿En qué instante ocurre esa coincidencia?

(c)Dada la función $y = \frac{1}{x}$ deducir las condiciones que deben satisfacer los extremos del intervalo cerrado $[a; b]$ para que el teorema de Lagrange pueda aplicarse. Hallar la correspondiente expresión para c.

Ej.5-07

Sea f una función continua y derivable tal que $f(0) = 3$. Calcule cuánto tiene que valer $f(5)$ para asegurar que en el intervalo $(0{,}5)$ exista un valor c tal que la pendiente de la recta tangente en $x = c$ es igual a 8

Ej.5-08

Se sabe que f es continua y derivable en **R**. Aplicando el teorema del valor medio del cálculo diferencial, analizar cuál es el mayor valor posible de $f(2)$ si $f(0) = 3$ y $f'(x) \leq 5 \ \forall x \in$ **R**

Ej.5-09

Suponiendo que $h(x)$ es continua y derivable en **R,** que $h(0) = 1$ y que $h'(x) \leq 2$ $\forall x \in (0; 3)$. Aplique el teorema de Lagrange para demostrar que $h(3) \leq 7$

Ej.5-10: Problema de aplicación: Teorema de Lagrange versus Fotomultas

El Teorema del Valor Medio de Lagrange ofrece una base teórica para entender cómo las fotomultas pueden detectar y sancionar las infracciones por exceso de velocidad, al

establecer una relación entre la velocidad instantánea y la velocidad media en un intervalo de tiempo, de la siguiente manera:

1. **Interpretación de la velocidad media:** Supongamos que un vehículo viaja por una carretera y su velocidad varía en función del tiempo. El teorema establece que
   - existe al menos un punto (**c**) en el intervalo de tiempo dado (intervalo **[a;b]**) donde la velocidad instantánea (**x'(t)**) es igual a la velocidad media ($\frac{\Delta x}{\Delta t}$) en ese intervalo.
   - Esto significa que, aunque la velocidad del vehículo pueda cambiar, en algún momento alcanzará una velocidad que coincide exactamente con la velocidad media durante cierto período de tiempo ($x'(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t}$).
2. **Aplicación en fotomultas:** Las fotomultas suelen ser utilizadas para sancionar a los conductores que exceden el límite de velocidad establecido en una zona determinada. El Teorema del Valor Medio de Lagrange nos permite comprender que, aunque un conductor pueda estar variando su velocidad a lo largo de un tramo de carretera, en algún punto podría haber alcanzado la velocidad límite durante un período de tiempo específico.
3. **Determinación de infracciones, Justificación matemática:** El Teorema proporciona entonces una justificación matemática sólida para la detección de infracciones por exceso de velocidad mediante fotomultas. Si un conductor excede el límite de velocidad en algún momento dentro de un intervalo de tiempo (por ejemplo, entre dos fotomultas), la velocidad instantánea en algún momento es igual o superior al límite establecido, se puede considerar que el conductor ha violado la normativa de tráfico y puede ser sancionado.

Supongamos que un vehículo pasa por la cámara A a las 13 hs, y que a las 14 hs pasa por la cámara B, en una autopista donde A está separado 80 km de B. Se sabe que la curva que modeliza la posición en función del tiempo es $x(t) = 10\ sen(\pi t) + 80t$ (en km) siendo t, el tiempo en horas y considerando que para t = 0 son las 13 Hs y para t = 1 las 14 hs. Si la velocidad máxima permitida de 80 km/h, ¿El conductor excedió la velocidad máxima permitida en ese intervalo de tiempo? Justifique e interprete geométricamente.

Teorema del valor medio de Cauchy

H) Sean f y g dos funciones definidas, por lo menos, en un intervalo cerrado $[a; b]$
Si se verifica que:
(i) f y g son continuas en $[a; b]$
(ii) f y g son derivables en $(a; b)$
(iii) $\forall x \in (a; b)$: $g'(x) \neq 0$

T) Entonces existe algún número $c \in (a; b)$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Regla de L'Hôpital

1ra Regla de L'Hôpital (Teorema del límite de un cociente de infinitésimos)

Sean f y g dos funciones definidas, por lo menos, en un entorno reducido $E^*(a;\delta)$.

Si se verifica que:

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$

(ii) f y g son derivables en $E^*(a;\delta)$

(iii) $\forall x \in E^*(a;\delta)$: $g'(x) \neq 0$

(iv) $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, siendo $L \in R$, o bien $L = \pm\infty$

Entonces $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

2da Regla de L'Hôpital (Teorema del límite de un cociente de infinitos)

Sean f y g dos funciones definidas, por lo menos, en un entorno reducido $E^*(a;\delta)$.

Si se verifica que:

(v) $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$

(vi) f y g son derivables en $E^*(a;\delta)$

(vii) $\forall x \in E^*(a;\delta)$: $g'(x) \neq 0$

(viii) $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, siendo $L \in R$, o bien $L = \pm\infty$

Entonces $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Ej.5-11: Aplicando las reglas de L'Hôpital, calcular los siguientes límites: $(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty})$.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{e^{2x}-1} =$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} =$ c) $\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} =$ d) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} =$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{x - arcsin\, x}{x^3} =$ f) $\lim_{x\to 2} \frac{ln(x^2-3)}{x^2+3x-10} =$ g) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{cos\, 5x}{cos\, 7x} =$ h) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} =$

i) $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{-x}}{x^{-2}} =$ j) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1-ln\, x}{e^{1/x}} =$ k) $\lim_{x\to 0^+} \frac{ln(sen\, mx)}{ln(sen\, x)} =$ m) $\lim_{x\to 0} \frac{x - tan\, x}{x^3} =$

Ej.5-12: Aplicando las reglas de L'Hôpital, calcular los siguientes límites: $(0 \cdot \infty)$.

a) $\lim_{x\to 0^+} x\, ln\, x$ b) $\lim_{x\to 1} (x-1)\, sec \frac{\pi x}{2}$ c) $\lim_{x\to 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$ d) $\lim_{x\to -\infty} (x^2+1)e^x$ e) $\lim_{x\to +\infty} x\, sin\left(\frac{a}{x}\right)$

Ej.5-13: Aplicando las reglas de L'Hôpital, calcular los siguientes límites: $(\infty - \infty)$.

a) $\lim_{x\to\pi/2}(sec\,x - tan\,x)$ b) $\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{ln\,x}\right)$ c) $\lim_{x\to0}(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x})$ d) $\lim_{x\to0}(\frac{1}{x} - \frac{1}{sin\,x})$

Ej.5-14: Aplicando las reglas de L'Hôpital, calcular los siguientes límites: $(\mathbf{1}^{\infty}, \mathbf{0^0}, \infty^{\mathbf{0}})$

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-4}\right)^x$ b) $\lim_{x\to0^+} x^x$ c) $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$ d) $\lim_{x\to0^+} x^{\frac{3}{4+ln\,x}}$ e) $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{tan\,x}$ f) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

Ej.5-15

a) Hallar $k \in$ R tal que $\lim_{x\to0^+}(1 + sen\,2\,x)^{k/x} = e$.

b) Calcular: $\lim_{x\to1}\frac{ln[g(2-x)]}{f(x^2-2)-3}$ si $g(1) = 1$, $g'(1) = 4$ y $f(-1) = 3, f'(-1) = 1/2$.

EJERCICIOS INTEGRADORES DE LA UNIDAD 5

Ej.1 Hallar las ecuaciones de las asíntotas de f(x) = $\begin{cases} \boldsymbol{x.e^x \;\; si\; x \le 0} \\ \boldsymbol{x.e^{1/x} \;\; si\; x > 2} \end{cases}$

Ej.2 ¿Podemos calcular los siguientes límites usando la Regla de L'Hôpital?

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\,sen(1/x)}{sen\,x}\;;\;\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+\text{sen}\,x}{e^x+\cos x}$$

Justificar la respuesta.

Ej.3 Sean las funciones: $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \le x \le 1 \\ ax\ln(x) + c, & 1 < x \le e \end{cases}$ con $a > 0$ y g(x) = $mx + 1$, con $m > 0$

- **a)** Determinar los valores reales de los parámetros $\boldsymbol{a}$ y c para que la función $\boldsymbol{f(x)}$ sea derivable en todo su dominio.
- **b)** ¿Es posible hallar el valor del parámetro b para que la función $\boldsymbol{f(x)}$ cumpla las hipótesis del teorema del Rolle en el intervalo $[-\mathbf{1}; \boldsymbol{b}]$? En caso afirmativo, para el valor de b encontrado, hallar el valor de $\boldsymbol{c_1}$ que garantiza la tesis del teorema. Dar todas las rtas posibles.
- **c)** Aplique el teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo $[\mathbf{0}; \boldsymbol{e}]$ y determine el valor de $\boldsymbol{c_2}$ donde la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos (0;f(0)) y (e;f(e)).
- **d)** ¿Se cumplen las hipótesis del teorema de Cauchy para las funciones $\boldsymbol{f}$ y g en $[\mathbf{1}; \boldsymbol{e}]$? en caso afirmativo calcular el punto $\boldsymbol{c_3}$ que garantiza el teorema y discuta si dicho valor depende del parámetro *m*.

Ej.4 Indicar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar las respuestas dadas.

a) Si $f(x) = \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2, & x \leq 1 \\ x - \frac{7}{4}, & x > 1 \end{cases}$, entonces no es posible encontrar un punto del intervalo $(0,2)$ donde la recta tangente sea horizontal.

b) Si $f(x) = a\ g(x) + b$ con $a \in R - \{0\}\ y\ b \in$ **R** y g es una función continua en $[p; q]$ y derivable en $(p; q)$, entonces el punto c que verifica el teorema de Lagrange para f en el intervalo mencionado depende del valor de a.

c) Si f y g son dos funciones que cumplen las hipótesis del teorema de Cauchy en $[a; b]$ y $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = 1$, entonces $\exists\ c \in (a; b)$ tal que las rectas tangentes a f y g en $x_0 = c$ son paralelas.

d) Sea $f(x) = e^{kx} - 1\ y\ g(x) = x$ donde k ∈ **R**. Si consideramos $L = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$, entonces el valor de L no depende del parámetro k.

ALGUNAS RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

Ej. 5-01:
$b = 3\ ; c = \sqrt{3}$

Ej. 5-02
$a = 1$

Ej. 5-03
$a = -10$; b = 25 y k = 2

Ej. 5-05:
$a)$ c = **9/4** **;** b) c= e − 1 ; c) c=2,442; d) no verifica hipótesis, no es derivable en x=2; g) $\sqrt{26}/3$

Ej. 5-06:
$a)\ r_{AB}$: y = $\frac{1}{4}$x + $\frac{3}{4}$ r_T: y = $\frac{1}{4}$x + 1 c = 4 ;
b) $V_m = -48\ pies/seg$; t = $\frac{3}{2} seg.$;
c) a y b deben tener el mismo signo; c = $\sqrt{ab}$ con a≠0 y b≠0

Ej.5-07
$f(5) = 43$

Ej.5-08
$f(2) \leq 13$ de modo que el mayor valor posible de $f(2) = 13$

Ej.5-09

$h'(c) \leq 2, \forall c \in [0,3]$, porque $h'(x) \leq 2\ \forall x \in [0,3]$

Luego por el teorema de Lagrange

$\frac{h(3)-h(0)}{3-0} = h'(c) \leq 2$, $\forall c \in (0,3)$

$$\frac{h(3)-h(0)}{3-0} \leq 2$$

$$\frac{h(3)-1}{3} \leq 2$$

$$h(3) \leq 7$$

Ej. 5-10:

El vehículo superó la velocidad media de 80km/h (y por lo tanto, el límite de 80 km/h) en el intervalo de tiempo: t ∈ (0; 0.5) horas

Esto corresponde al periodo desde el inicio del registro (Cámara A, 13:00 hs) hasta la media hora (13:30 hs).

- En este intervalo, la velocidad instantánea v(t) fue mayor a 80 km/h.
- En el instante t = 0.5 (13:30 hs), la velocidad fue exactamente 80 km/h (el valor garantizado por Lagrange).
- En el intervalo (0.5, 1), la velocidad instantánea fue inferior a 80 km/h

Ej.5-11 a) 0; b) 0; c)$cos(a)$; d) 2; e) -1/6; f)4/7 ; g) -5/7 ; h) ln(a/b); i) 0 j)0; k) 1; m) -1/3

Ej.5-12: a) 0 b) -2/π c) + ∞ d) 0 e) a

Ej.5-13: a) 0; b)1/2; c)-1/2; d) 0

Ej.5-14: a) $e^{5/3}$ b) 1 c) 1 d) e^3 e) 1 f) e^{-1}

Ej.5-15 a) $k = 1/2$; b) -4

EJERCICIOS INTEGRADORES

Ej.1.
$y = 0\ es\ A.H.\ cuando\ x \to -\infty$
$y = x + 1\ es\ A.O.\ cuando\ x \to +\infty$

Ej.2.
$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\ sen(1/x)}{sen\ x} = 0$

No se puede aplicar la regla de L'Hôpital

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+\operatorname{sen} x}{e^x+\cos x} = 1$

No se puede aplicar la regla de L'Hôpital

Ej.3.

a) $\boldsymbol{a = 2}$ y $\boldsymbol{c = 1}$

b) El único valor que puede tomar $\boldsymbol{b = 1}$ en el intervalo $[-\mathbf{1}; \boldsymbol{e}]$ para que se cumpla la hipótesis del teorema de Rolle. El valor de $\boldsymbol{c_1 = 0}$

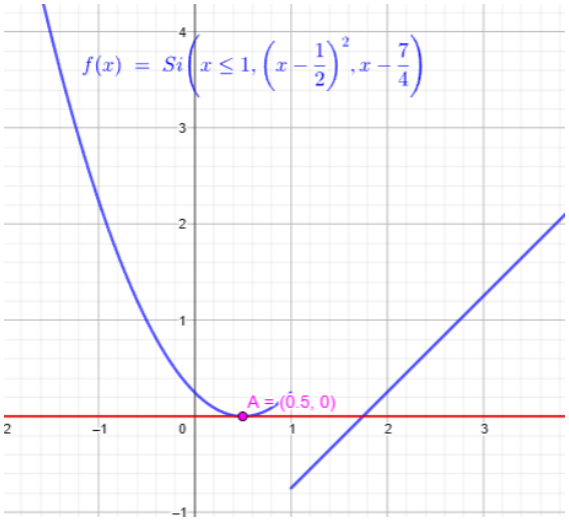
c) $\boldsymbol{c_2 = e^{1/2e}}$

d)

- Si, se cumplen las hipótesis del teorema de Cauchy para $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ en $[\mathbf{1}; \boldsymbol{e}]$
- $\boldsymbol{c_3 = e^{1/(e-1)}}$
- El valor de $\boldsymbol{c_3}$ no depende de m ya que $\boldsymbol{c_3 = e^{1/(e-1)}}$ para cualquier valor de $\boldsymbol{m}$

Ej.4.

a) Es Falsa. Si bien la función f no es continua en $x = 1$(tampoco es derivable en dicho punto), para $c = \frac{1}{2}$, por el punto $(\frac{1}{2}, 0)$ pasa una recta tangente horizontal.



b) Es falsa. El punto c que verifica el teorema de Lagrange no depende del valor de a porque para cualquier valor de a, $g'(c) = \frac{g(q)-g(p)}{q-p}$

c) Es verdadera. Ya que $\frac{f'(c)}{g'(c)} = 1$, entonces $f'(c) = g'(c)$ lo que demuestra que las pendientes de las rectas tangentes en $x = c$ son iguales, por lo tanto las rectas son paralelas

d) Es falsa. El valor de L depende del valor de k, ya que $L = k$.