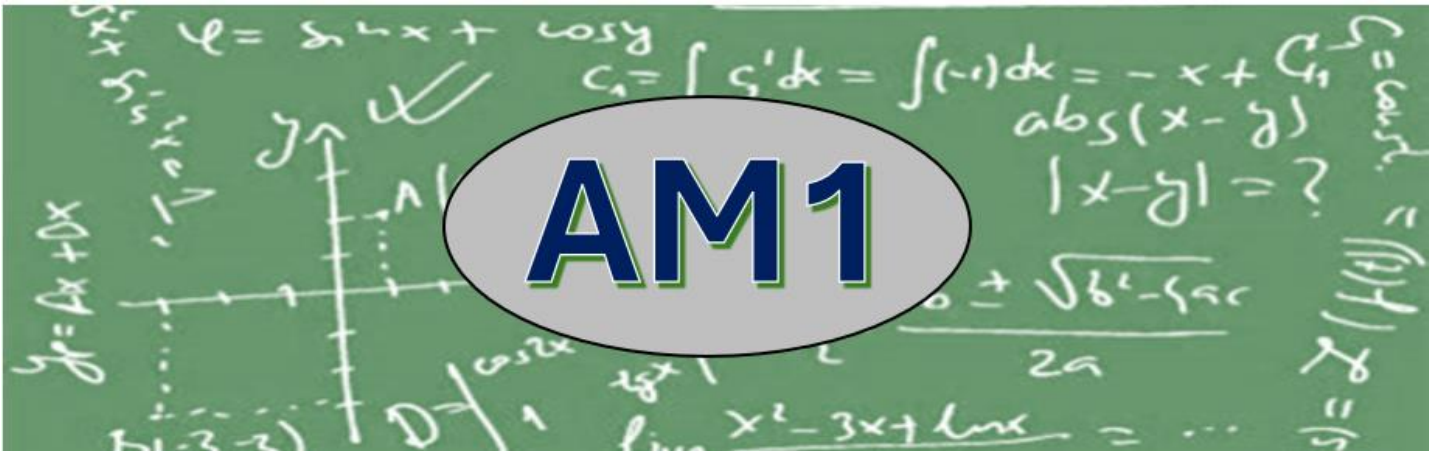


TRABAJO PRÁCTICO N.º 4: TEOREMAS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

ANÁLISIS MATEMÁTICO 1

MATERIAS BÁSICAS
UTN – Facultad Regional Haedo

TRABAJO PRÁCTICO N.º 4:
TEOREMAS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

Competencias:

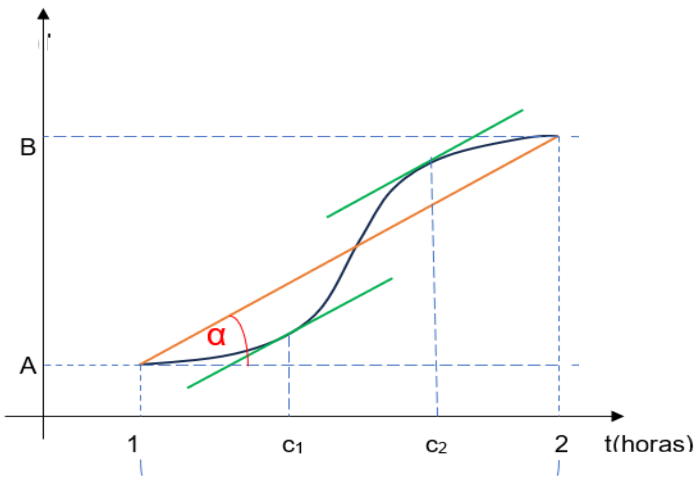
- Identificar, formular y resolver situaciones problemáticas que involucren los teoremas del cálculo diferencial.
- Utilizar de manera efectiva las técnicas y herramientas de la ingeniería
- Aprender en forma continua y autónoma
- Comunicar con efectividad
- Utilizar software de aplicación como herramienta de cálculo y grafica que acompañe el proceso de resolución de una situación problemática.

Teorema del valor medio de Lagrange

H) Sea f una función definida, por lo menos, en un intervalo cerrado $[a; b]$.
Si se verifica que:
(i) f es continua en $[a; b]$
(ii) f es derivable en $(a; b)$

T) Entonces existe al menos un punto c$\in$ $(a; b)$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Interpretación Geométrica:



Ej.1

(a) Dada la función $f(x) = \sqrt{x}$ y el intervalo cerrado $[1; 9]$ Hallar:(i) la ecuación de la recta secante a la gráfica en los puntos $A(1,1)$ y $B(9,3)$; (ii) la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto $C(c, f(c))$, donde c es el número de Lagrange para $f(x)$ en $[1; 9]$. Representar en un mismo gráfico la función y ambas rectas.

(b) La altura de un objeto, t segundos después de haberlo dejado caer desde una altura de 500 pies, está dada por la fórmula $s(t) = -16t^2 + 500$. Hallar la velocidad media del objeto en los tres primeros segundos. Usar el teorema de Lagrange para verificar que en algún instante de ese intervalo de tiempo: su velocidad instantánea es igual a su velocidad media. ¿En qué instante ocurre esa coincidencia?

(c) Dada la función $y = \frac{1}{x}$ deducir las condiciones que deben satisfacer los extremos del intervalo cerrado $[a; b]$ para que el teorema de Lagrange pueda aplicarse. Hallar la correspondiente expresión para c.

Respuesta: a) r_{AB}:y=1/4 x+3/4 r_T: y=1/4 x+1 c = 4
b) $V_m = -48\, pies/seg$; t= $\frac{3}{2} seg$.
c) a y b deben tener el mismo signo; c= $\sqrt{ab}$ con $a \neq 0$ y $b \neq 0$

<u>Ej. 2</u> Problema de aplicación: Teorema de Lagrange versus Foto multas

El Teorema del Valor Medio de Lagrange ofrece una base teórica para entender cómo las foto multas pueden detectar y sancionar las infracciones por exceso de velocidad, al establecer una relación entre la velocidad instantánea y la velocidad media en un intervalo de tiempo, de la siguiente manera:

1. **Interpretación de la velocidad media:** Supongamos que un vehículo viaja por una carretera y su velocidad varía en función del tiempo. El teorema establece que
   - existe al menos un punto (**c**) en el intervalo de tiempo dado (intervalo **[a; b]**)
   - donde la velocidad instantánea (**x'(t)**) es igual a la velocidad media ($\frac{\Delta x}{\Delta t}$) en ese intervalo.
   - Esto significa que, aunque la velocidad del vehículo pueda cambiar, en algún momento alcanzará una velocidad que coincide exactamente con la velocidad media durante cierto período de tiempo ($x'(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t}$).
2. **Aplicación en foto multas:** Las foto multas suelen ser utilizadas para sancionar a los conductores que exceden el límite de velocidad establecido en una zona determinada. El Teorema del Valor Medio de Lagrange nos permite comprender que, aunque un conductor pueda estar variando su velocidad a lo largo de un tramo de carretera, en algún punto podría haber alcanzado la velocidad límite durante un período de tiempo específico.
3. **Determinación de infracciones, Justificación matemática:** El Teorema proporciona entonces una justificación matemática sólida para la detección de infracciones por exceso de velocidad mediante foto multas. Si un conductor obtiene su velocidad promedio por encima de la velocidad permitida por la LEY Nacional de Tránsito y Seguridad Vial (Ley N°24449), en algún momento dentro del intervalo de tiempo (por ejemplo, entre dos foto multas), entonces podemos afirmar que su velocidad instantánea, a lo sumo en algún punto de dicho trayecto-tiempo fue igual a su velocidad media.
   O sea, superior al límite establecido, por ende, se puede considerar que el conductor ha violado la normativa de tránsito y puede ser sancionado.

Teniendo en cuenta lo explicado, reflexione y conteste justificando su respuesta:
Supongamos que un vehículo pasa por la cámara A a las 13 hs, y que a las 14 hs pasa por la cámara B, en una autopista donde A está separado 80 km de B. Siendo que la velocidad máxima permitida de 55 km/h,
¿puede demostrarse si el conductor excedió la velocidad límite permitida?

Respuesta: Al final del TP

<u>Regla de L'Hôpital</u>

<u>1ra Regla de L'Hôpital</u> (Teorema del límite de un cociente de infinitésimos)

Sean $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ dos funciones definidas, por lo menos, en un entorno reducido $\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{a};\boldsymbol{\delta})$.

Si se verifica que:

(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$

(ii) f y g son derivables en $E^*(a;\delta)$

(iii) $\forall x\in E^*(a;\delta)$: $g'(x)\neq 0$

(iv) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$, siendo $L\in R$, o bien $L=\pm\infty$

Entonces $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

<u>2da Regla de L'Hôpital</u> (Teorema del límite de un cociente de infinitos)

Sean $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ dos funciones definidas, por lo menos, en un entorno reducido $\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{a};\boldsymbol{\delta})$.

Si se verifica que:

(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$

(ii) f y g son derivables en $E^*(a;\delta)$

(iii) $\forall x\in E^*(a;\delta)$: $g'(x)\neq 0$

(iv) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$, siendo $L\in R$, o bien L es infinito

Entonces $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

<u>Ej.3</u>: Aplicando las reglas de L'Hôpital, calcular los siguientes límites: $\left(\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}\right)$.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{e^{2x}-1}=$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}=$ c) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}=$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x^3}=$ f) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}=$ g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos 5x}{\cos 7x}=$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=$

i) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^{-x}}{x^{-2}}=$ j) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\ln x}{e^{1/x}}=$ k) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(\operatorname{sen} mx)}{\ln(\operatorname{sen} x)}=$ m) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3}=$

Respuesta: a) 0; b) 0; c) $\cos(a)$; d) 2; e) -1/6; f) 4/7; g) -5/7; h) ln (a/b); i) 0; j) 0; k) 1; m) -1/3

<u>Ej.4</u> Aplicando las reglas de L'Hôpital, calcular los siguientes límites: $(\mathbf{0}\cdot\infty)$.

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$ b) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\sec\frac{\pi x}{2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$ d) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^2+1)e^x$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\sin\left(\frac{a}{x}\right)$

Respuesta: a) 0; b) -2/π ; c) + ∞ ; d) 0; e) a

<u>Ej.5</u> Aplicando las reglas de L'Hôpital, calcular los siguientes límites: $(\infty-\infty)$.

a) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sec x - \tan x)$ b)$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$ c)$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x})$ d)$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x})$

Respuesta: a) 0; b)1/2; c)-1/2; d) 0

<u>Ej.6</u> Aplicando las reglas de L'Hôpital, calcular los siguientes límites: $(\mathbf{1}^{\infty},\mathbf{0^0},\infty^{\mathbf{0}})$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-4}\right)^x$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$ d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$ e) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

Respuesta: a) $e^{5/3}$; b) 1; c) 1; d) e^3 ; e) 1; f) e^{-1}

<u>Ej.7</u>

(a)Hallar $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R} / \lim\limits_{x\to 0^+}(1+\operatorname{sen} x)^{\frac{k}{x}} = e$

(b)Calcular: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln[g(2-x)]}{f(x^2-2)-3}$ si $g(1)=1, g'(1)=4$ y $f(-1)=3, f'(-1)=1/2$.

(c) Comprobar que no es aplicable la 1ra regla de L'Hôpital al cálculo del límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x}$$

Luego, calcular ese límite directamente, usando artificios algebraicos y teoremas de límite.

Respuesta: a) $k=1/2$; b) -4 ; c) L= 1

EJERCICIOS INTEGRADORES DE LA UNIDAD 4

1. Hallar asíntotas lineales de f(x) = $\begin{cases} \boldsymbol{x.e^{x}} & \boldsymbol{si\ x \leq 0} \\ \boldsymbol{x.e^{1/x}} & \boldsymbol{si\ x > 2} \end{cases}$

2. ¿Podemos calcular los siguientes límites usando la 2da regla de L'Hôpital?

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}+sen\,x}{e^{x}+cos\,x}$$ Justificar la respuesta.

3. Analizar si $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{\frac{e^{x}-1}{x}} & \boldsymbol{x \neq 0} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{x = 0} \end{cases}$ cumple con las hipótesis de Teorema de Lagrange en $[\boldsymbol{-1}; \boldsymbol{1}]$.

4. La tráquea o tubo respiratorio consideramos que es un cilindro. Un modelo matemático para el volumen de aire (en cm^3/seg) que fluye a través de la tráquea durante su contracción al momento de producirse la tos humana es:

$$V(r) = kr^{4}(r_0 - r), \qquad r_0/2 \leq r \leq r_0$$

donde k es una constante positiva y $\boldsymbol{r_0}$ es su radio cuando no hay diferencia de presión entre los extremos del tubo respiratorio.

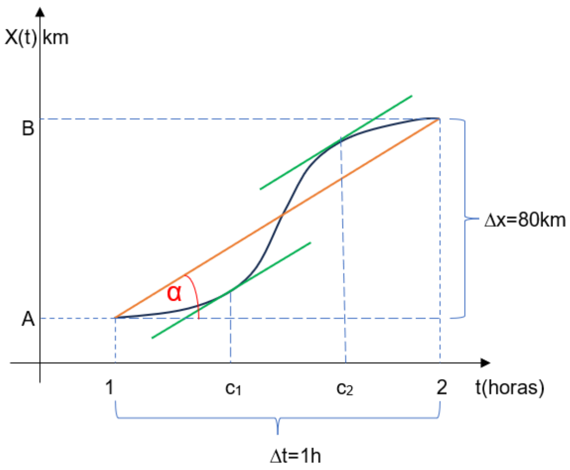
a) Determine el intervalo para el cual V sea creciente y un intervalo para el cual V sea decreciente.

b) ¿Con que radio obtiene el volumen máximo de flujo de aire?

5. Armar en grupo un mapa conceptual de la Unidad 4

ALGUNAS RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

Ej. 2:



El conductor excedió la velocidad permitida, al menos en dos momentos c_1 y c_2 puesto que su velocidad instantánea (curva azul) fue igual a su velocidad media de 80 km/h (recta roja), como muestra el gráfico, siendo la velocidad permitida límite de 55 km/h.
El conductor será sancionado con foto multa.