ECUACIONES DEL PLANO

- Forma grafica

- Forma analitica

Si son perpendiculares el producto escalar es igual a 0.

$\overline{BP} \cdot \bar{n} = 0$ armando el vector $\overline{BP} = (x - b_1, y - b_2, z - b_3)$

$$(x - b_1, y - b_2, z - b_3) \cdot (A, B, C) = 0$$

$$(x - b_1)A + (y - b_2)B + (z - b_3)C = 0$$

$$Ax - Ab_1 + By - Bb_2 + Cz - Cb_3 = 0$$

$$Ax + By + Cz + \underbrace{(-Ab_1 - Bb_2 - Cb_3)}_{\text{D}} = 0$$

Si el punto B fuera el vector nulo

$b_1 = 0, b_2 = 0$ y $b_3 = 0$

Entonces D = 0

Ax+By+Cz +D= 0 ecuación general del plano

- Los coeficientes de x, y, z son las componentes de la normal y si D = 0 nos informa que el plano pasa por el origen.

Ejemplo Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta :

$$\begin{cases} \frac{x-3}{3} = y + 1 \\ z = 2 \end{cases}$$ que pasa por el punto $\mathrm{A}(1, -4,1)$

- De la recta tomamos el vector paralelo que va a ser la normal del plano $\bar{u} = (3,1,0)$
- $\bar{n} = (3,1,0)$ reemplazamos en la ecuación general Ax+By+Cz+D=0
- 3x+1y+0z+D=0 $3x + y + (-3.1 - 1.(-4) - 0.1 = 0$
- 3x + y +1=0

2- Ecuación Segmentaria del plano

- Partiendo de la ecuación general
- Ax + By + Cz + D =0
- Despejamos D y dividimos ambos miembros por - D
- $\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = \frac{-D}{-D}$
- $\frac{x}{\frac{-D}{A}} + \frac{y}{\frac{-D}{B}} + \frac{z}{\frac{-D}{C}} = 1$

Abscisa al origen

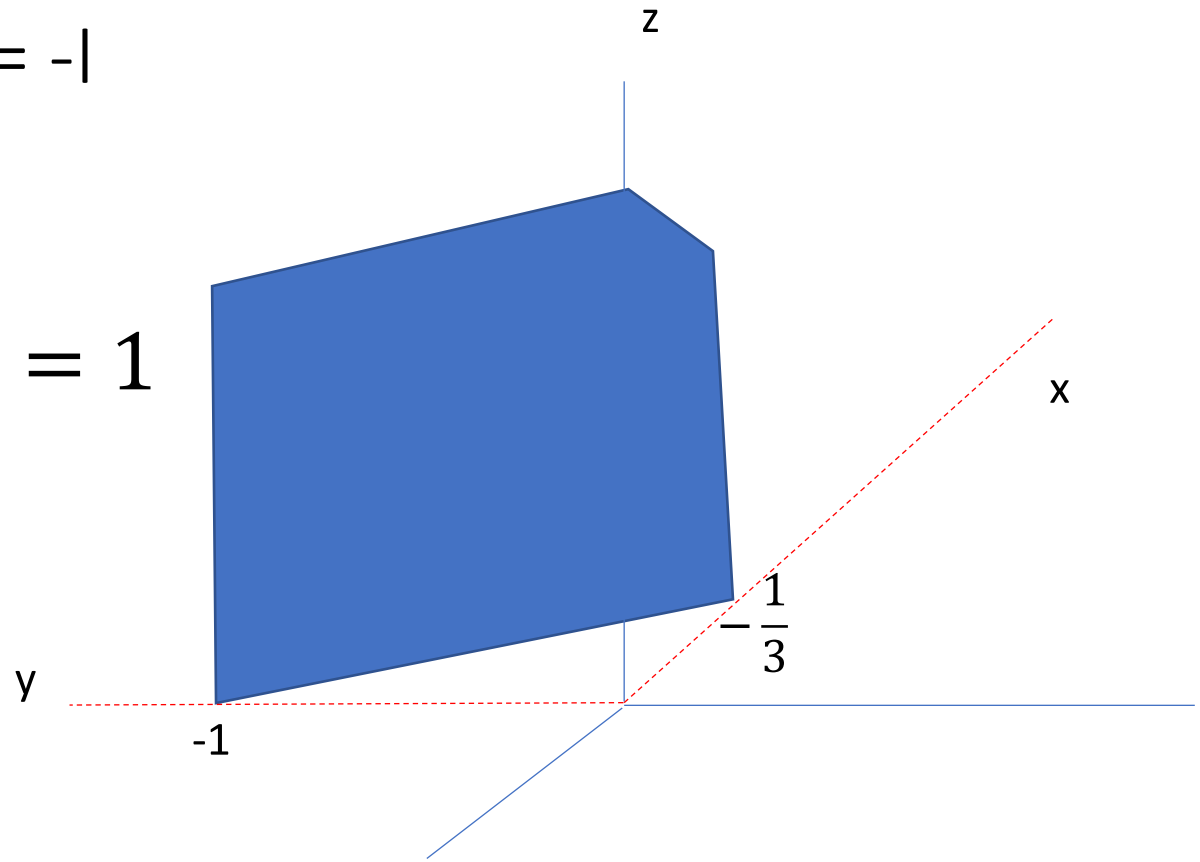
Ordenada al origen

Cota al origen

En el ejemplo anterior la ecuación general nos quedo 3x +y+1=0

La ecuación segmentaria sería 3x + y = -l

$$\frac{x}{\frac{-1}{3}} + \frac{y}{-1} = 1$$



ECUACION NORMAL DEL PLANO

Partiendo de la ecuación GENERAL del plano dividimos todos los términos miembro a miembro por $|\bar{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$

$$\frac{Ax}{|\bar{n}|} + \frac{By}{|\bar{n}|} + \frac{Cz}{|\bar{n}|} + \frac{D}{|\bar{n}|} = 0$$

$\cos\alpha$ $\cos\beta$ Cos δ

$$\cos\alpha\, x + \cos\beta\, y + \cos\delta\, z = \frac{-D}{|\bar{n}|}$$

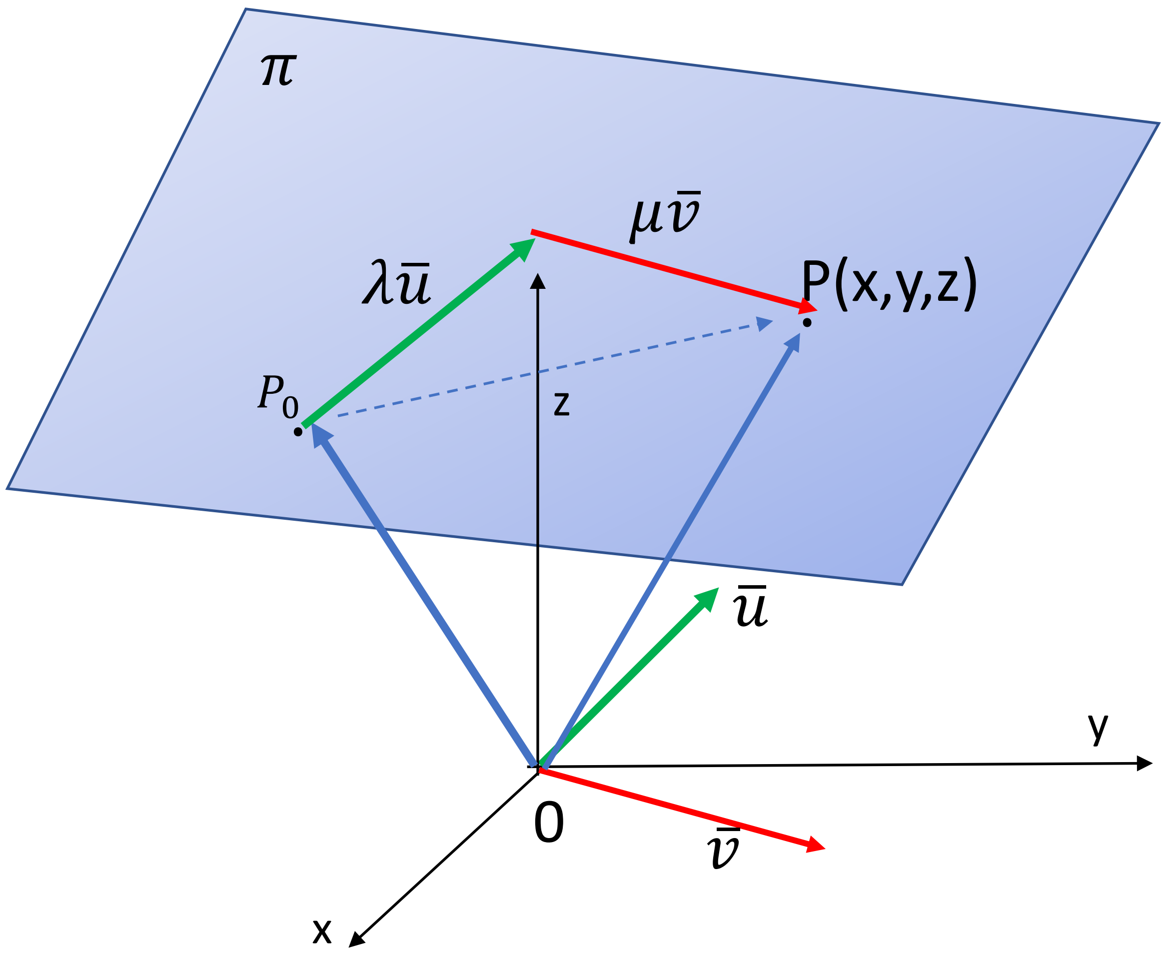
Si hacemos la proyección del vector genérico $\overline{OP}$ sobre la normal del plano nos da la distancia al origen.

$$(cos\alpha\, , cos\beta\, , cos\delta) \cdot (x\, , y\, , z) = \left|\frac{-D}{|\bar{n}|}\right|$$

ECUACIÓN VECTORIAL PARAMÉTRICA DEL PLANO

$P_0(x_0, y_0, z_0)\ \mathcal{E}\ al\ plano$
$\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$
$\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$
$\bar{u} \nparallel \bar{v}$

DATOS



$\overline{0P} = \overline{0P_0} + \overline{P_0P}$

PERO NO CONOCEMOS LA DIRECIÓN $\overline{P_0P}$

El objetivo es escribir $\overline{P_0P}$ como combinación lineal de los vectores $\bar{u}\ \ y\ \ \bar{v}$.

$$\overline{0P} = \overline{0P_0} + \lambda\bar{u} + \mu\bar{v} \quad \forall\lambda, \forall\mu \in R$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$$

En nuestro ejemplo 3x + y +1 = 0

$\bar{n} = (3\ ,1\ ,0)$

$$\frac{3}{\sqrt{10}}x + \frac{1}{\sqrt{10}}y + \frac{1}{\sqrt{10}} = 0$$

Distancia del plano al origen $\frac{1}{\sqrt{10}}$

Hallar la ecuación del plano paralelo a los vectores $\bar{u} = (-1,3,-3)\ y\ \bar{v} = (1,-3,-1)$que contiene al punto A(1, -4, 2)

- Acá sólo tengo que organizar los datos :
- $\overline{op} = (1,-4,2) + \lambda(-1,3,-3) + \mu(1,-3,-1)\ \forall\lambda\ ,\forall\mu\ \in R$

- Qué haríamos si con estos datos queremos encontrar la ecuación General?
- Dos caminos: 1* con producto vectorial
- 2* con producto mixto

Con producto vectorial :primero calculamos la normal $\bar{u}$ x $\bar{v} = normal\ del\ plano$

$$\begin{pmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = (-3\text{-}9,\ \text{-}1\text{-}3, 3\text{-}3) = (\text{-}12, \text{-}4, 0)$$

-12x -4y + D = 0 Para hallar el D reemplazamos por el punto -12.1 - 4.(-4)+D =0 D=- 4

-12x – 4y -4=0

Con producto mixto , me falta un vector que lo armo con el punto que tengo como dato y el punto genérico $\overline{AP} = (x$-1,y+4,z-2)

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+4 & z-2 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (x-1)(-12) - (y+4)(+4) + (z-2)0 = 0$$

Por ser coplanares lo igualo a 0

-12x + 12 + 4y – 16 = = -12x – 4y - 4 = 0

ECUACIÓN CARTESIANO PARÁMÉTRICA DEL PLANO

La despejo de la ecuación vectorial paramétrica

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)\ \forall\lambda\,, \forall\mu\ \in R$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases} \quad \forall\lambda\,, \forall\mu\ \in R$$

Escribir la ecuación cartesiano paramétrica

$$\overline{OP} = (1,-4,2) + \lambda(-1,3,-3) + \mu(1,-3,-1)\ \forall\lambda, \forall\mu \in R$$

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda + \mu \\ y = -4 + 3\lambda - 3\mu \quad \forall\lambda, \forall\mu \in R \\ z = 2 - 3\lambda - \mu \end{cases}$$

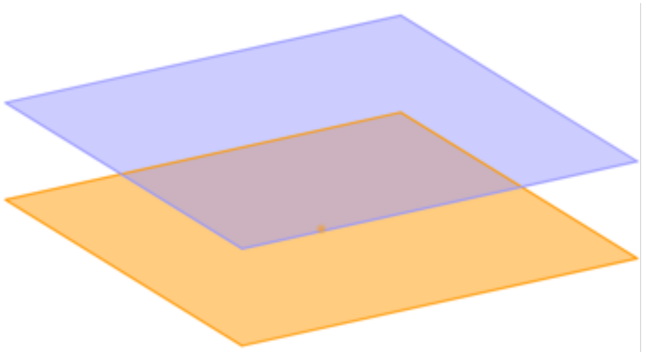
- $\overline{OP} = (1,-4,2) + \lambda(-1,3,-3) + \mu(1,-3,-1)\ \forall\lambda, \forall\mu \in R$
- $\begin{cases} x = 1 - \lambda + \mu \\ y = -4 + 3\lambda - 3\mu \quad \forall\lambda, \forall\mu \in R \\ z = 2 - 3\lambda - \mu \end{cases}$

Posiciones relativas entre planos

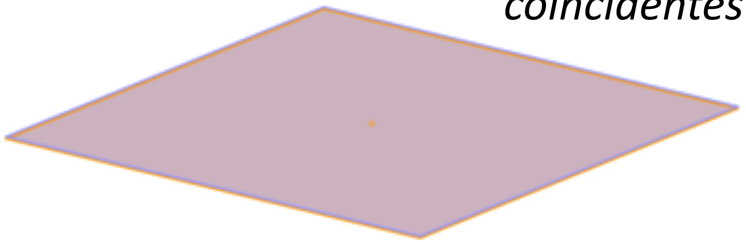
Dos planos son paralelos, coincidentes o se cortan. Si se cortan pueden ser perpendiculares (o no serlo). ¿Cómo lo puedo determinar? (teniendo en cuenta el concepto de ángulo entre planos y lo estudiado en relación a los vectores).

$$\overrightarrow{\boldsymbol{N_1}} = \boldsymbol{\lambda} \,.\, \overrightarrow{\boldsymbol{N_2}}$$

paralelos



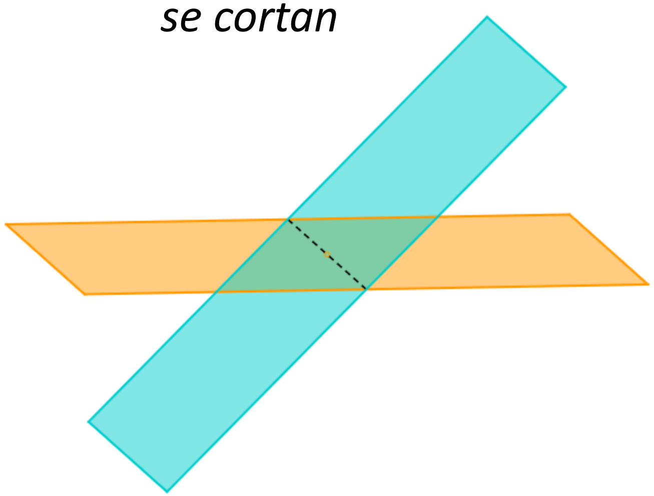
coincidentes



[Ver: https://www.geogebra.org/m/Ft6wvvDH](https://www.geogebra.org/m/Ft6wvvDH)

$$\overrightarrow{\boldsymbol{N_1}} \neq \boldsymbol{\lambda} \,.\, \overrightarrow{\boldsymbol{N_2}}$$

se cortan



Si $\overrightarrow{\boldsymbol{N_1}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{N_2}} = \boldsymbol{0}$

los planos son perpendiculares