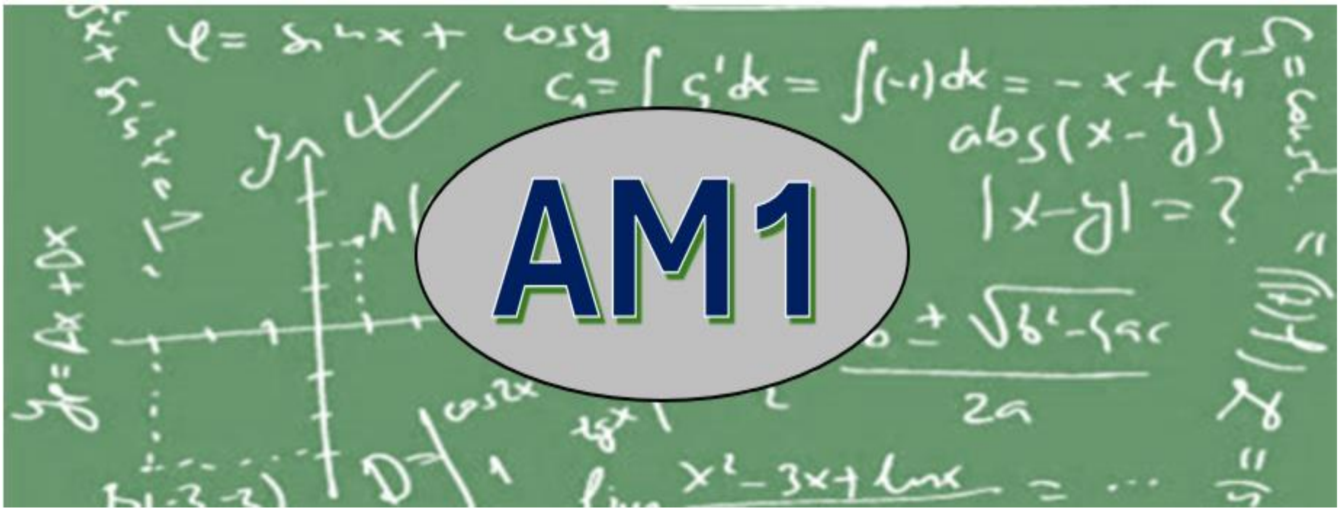


TRABAJO PRÁCTICO N°2: LÍMITES Y CONTINUIDAD

ANÁLISIS MATEMÁTICO 1

MATERIAS BÁSICAS

UTN – Facultad Regional Haedo

TRABAJO PRÁCTICO N° 2 - LÍMITES Y CONTINUIDAD

COMPETENCIAS

- ❖ Identificar, formular y resolver situaciones problemáticas que involucren distintos tipos de funciones y sus límites, utilizando los recursos bibliográficos, digitales y multimediales.
- ❖ Utilizar de manera efectiva las técnicas y herramientas de la ingeniería
- ❖ Aprender en forma continua y autónoma
- ❖ Comunicar con efectividad

ENTORNOS. LÍMITE FUNCIONAL: CONCEPTO INTERPRETACIÓN GRÁFICA. LÍMITES LATERALES.

Ej. 1 Elegir la opción correcta:

1) El entorno E(0,2) está formado por todos los números entre:

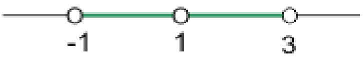
a) -2 y 2 ambos incluidos.	b) -2 y 2 sin estar estos incluidos	c) -2 y 2 sin estar estos incluidos ni el 0 tampoco.

2) El entorno $E^*(3,1)$ está formado por todos los números entre…

a) 2 y 4, sin incluir al 2, 4 y 3	b) -2 y 4 sin estar incluidos	c) -2 y 4 sin estar incluidos el 1, -2 y 4

3) La expresión $\{x \in R: |x-8| < 1\}$ también se puede escribir como

a) E (9,1)	b) E (8,1)	c) $E^*(8,2)$

4) La representación 

corresponde al entorno ...

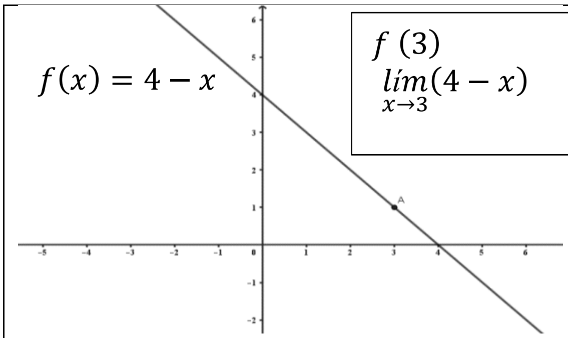
a) $E^*(1,2)$	b) E (1,2)	c) E (2,1)

5) La representación gráfica del entorno E^* (2,2) es:

a) 	b) 	c) 

Ej. 2 Observar cada gráfico y completar. Indicar el valor del límite, si éste existe:

$f(x) = 4 - x$

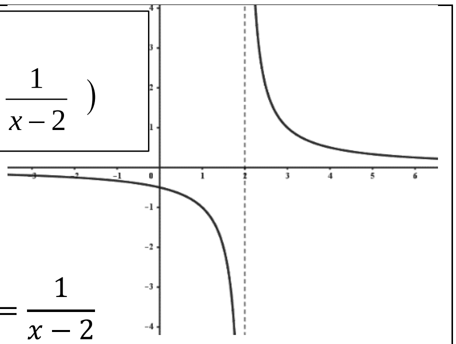


$f(3)$

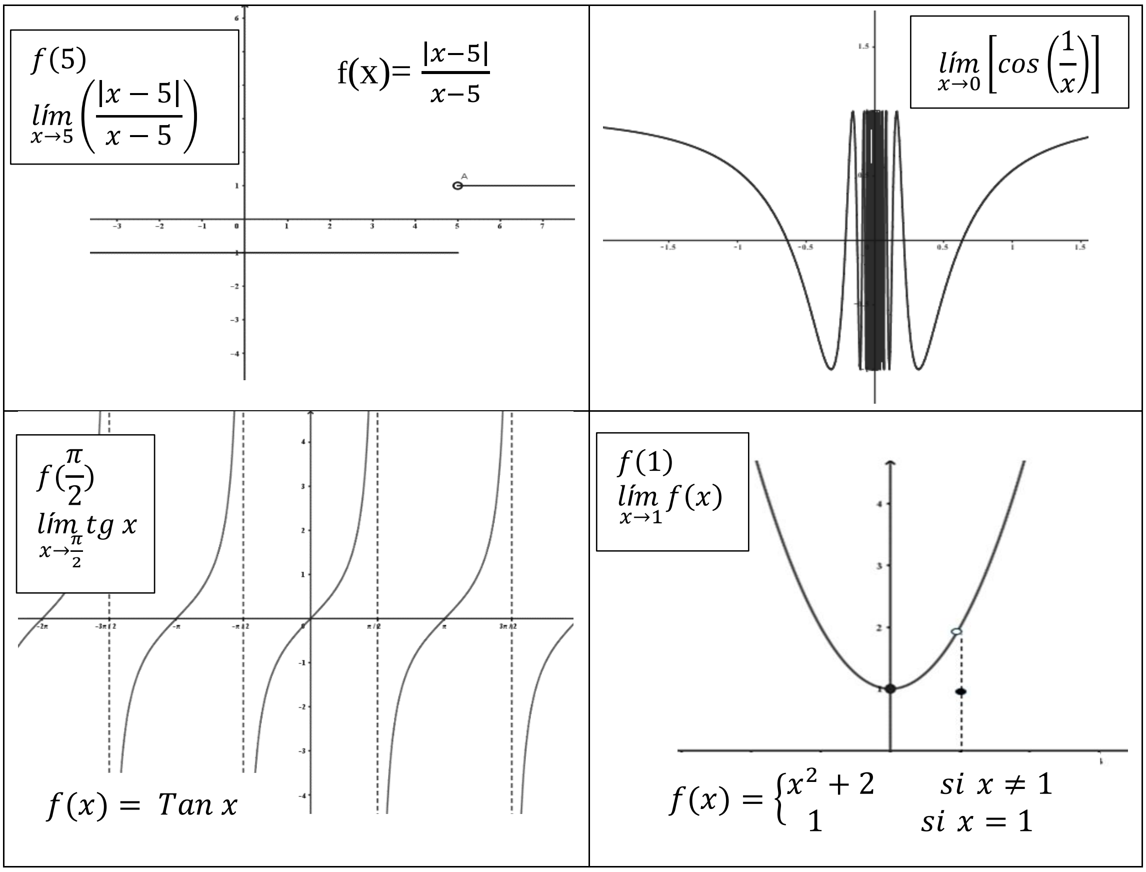
$\lim_{x\to 3}(4-x)$

$f(2)$

$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}\right)$



$f(x) = \frac{1}{x-2}$



<u>Ej. 3:</u> Dada la siguiente función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & si\ x \leq 0 \\ 4x-1 & si\ 0 < x \leq 1 \\ x^2-5x+7 & si\ x > 1 \end{cases}$

Hallar, realizar la gráfica mediante el GeoGebra, y luego analizar si existen:

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, justificar la respuesta.

<u>Respuestas:</u> a)3 b) 1 c) -1

<u>Ej. 4:</u> Hallar k para que exista el límite en el punto indicado:

a) $f(x) = \begin{cases} sen(kx) & si\ x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & si\ x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $x = \frac{\pi}{2}$; b) $f(x) = \begin{cases} x^3+2x-1 & si\ x < 3 \\ \frac{k}{x+1} & si\ x \geq 3 \end{cases}$ $x = 3$

<u>Respuestas:</u> ***a***) $k = 2n, n \in \mathbb{Z}$; $\nexists f(\frac{\pi}{2})$; **b)** $k = 128$ $f(3) = 32$

<u>Ej. 5:</u> Hallar a y b para que: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ **y** $f(1) = 1$ **en la siguiente función:**

$$f(x) = \begin{cases} bx^2 + ab & si \quad x \geq 0 \\ 2(x^2+b)^{\frac{1}{2}} - b & si \quad x < 0 \end{cases}$$

<u>Respuestas:</u> $a = 3$ $b = \frac{1}{4}$

<u>PROPIEDADES ALGEBRAICAS DE LÍMITES. CÁLCULO DE LÍMITES INMEDIATOS</u>

<u>Ej.6:</u> Calcular los siguientes límites inmediatos, aplicando las propiedades correspondientes:

a) $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2-4x+3\right)=$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}}{x^3}=$ c) $\lim\limits_{x\to -4} \log_3(-x^2-3x+5)=$

d) $\lim\limits_{x\to -1} 3^{\sqrt{x^3-x^2+2}}=$ e) $\lim\limits_{x\to -\pi} \operatorname{sen} x=$ f) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \operatorname{arcsen} x=$

Respuestas: ***a***) 8 **b)** $\frac{3}{8}$ **c)** 0 **d)** 1 **e)** 0 **f)** $\frac{\pi}{6}$

INFINITÉSIMOS: PROPIEDADES Y OPERACIONES. CÁLCULO DE LÍMITES INDETERMINADOS

f es infinitésimo en x=a $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=0$

Ej. 7: Indicar si la función es infinitésima en el punto indicado, y analizar si lo es en algún otro valor de x:

a) $f(x)=x^3-8$; en $x=2$ b) $f(x)=x^3-8$; en $x=1$ c) $f(x)=\operatorname{sen} x$;en $x=\pi$.

Respuestas: **a)** Si; **b)** No; **c)** Si, en $x=0+k\pi$

Ej. 8: Calcular el valor real del parámetro "q" de modo que:

a) La función $f(x)=\dfrac{x^4-q}{x}$ sea un infinitésimo en $x=3$.

b) $\lim\limits_{x\to q}\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^2-x-2}$ sea un cociente de infinitésimos.

Respuestas: **a)** q =81 **b)** q =2

Ej. 9: Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}=$ c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+2x^2}{x}=$

e) $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-9}}=$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}=$ g) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}=$ h) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{|x|-2}=$

Respuestas: **a)** 2; **b)** 5; **c)** 12; **d)** 3 ; ***e)*** $\frac{\sqrt{6}}{6}$; **f)** $\frac{1}{2}$; **g)** $\frac{9}{8}$;**h)** 12

Ej. 10: Aplicar el Teorema de Compresión para calcular:

a) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, sabiendo que $1\le f(x)\le x^2+2x+2$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$,sabiendo que $x^2-\frac{x^4}{3}\le f(x)\le x^2$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, sabiendo que $|f(x)-1|\le x^2$

Respuestas: **a)** 1; **b)** 1; **c)** 1

Ej. 11: Calcular los siguientes límites:

Tener en cuenta los límites notables: $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen} z}{z}=1$; $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\operatorname{tg} z}{z}=1$

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3.sen2x}{sen5x}=$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg5x}{3x}=$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos^2 x}{x^2}=$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen^4x.cos\,x.tgx}{5.sen4x.tg2x}=$

e) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{(3x^2-12).sen(\pi-x)}{(x-\pi).(x-2)}=$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x^3-x^2).sen^2x}{x^2.sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}=$ g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos\,x}{3x^2}=$

h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen^m(px)}{qx^r}=$

Respuestas: ***a***) $\frac{6}{5}$; ***b***) $\frac{5}{3}$; ***c***) 1 ; ***d***) 0; **e)** $-3(\pi+2)$; **f)** – 4; **g)** $\frac{1}{6}$; **h)** $si\ m>r: L=0$; $si\ m<r: L=\infty; Si\ m=r: L=\ p^m/q$

Ej. 12: Analizar los límites laterales de las siguientes funciones en las abscisas indicadas. Extraer conclusiones acerca de la existencia de estos:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\frac{1}{4x^2}-16}$ c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{|x-2|}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$ e) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x^2-9}$ f) $\lim\limits_{x\to 3} sec\frac{\pi.x}{6}$

Respuestas: **a)** $\nexists\ L$(L$_d$ =1; L$_i$ = -1); **b)** $\nexists\ L$(L$_d$ =0,5; L$_i$ = -0,5); **c)** $\nexists\ L$(L$_d$ =3; L$_i$ = -3); **d)** $\nexists\ L$(L$_d$ =0; L$_i$ = 2); **e)** $\nexists\ L$; **f)** $\nexists\ L$

LIMITE INFINITO DE VARIABLE FINITA. LÍMITE FINITO DE VARIABLE INFINITA. LÍMITE INFINITO PARA VARIABLE INFINITA

Ej. 13 Calcular los siguientes límites inmediatos:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^3-x^2+x+1)=$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+x+1}=$ c) $\lim\limits_{x\to \infty} e^x=$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3}{e-e^{\frac{1}{x+1}}}=$ e) $\lim\limits_{x\to -\infty} arctg\,x=$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty} Th\,x=$

g) $\lim\limits_{x\to \infty} e^{-2x}=$ h) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=$ i) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=$ j) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$

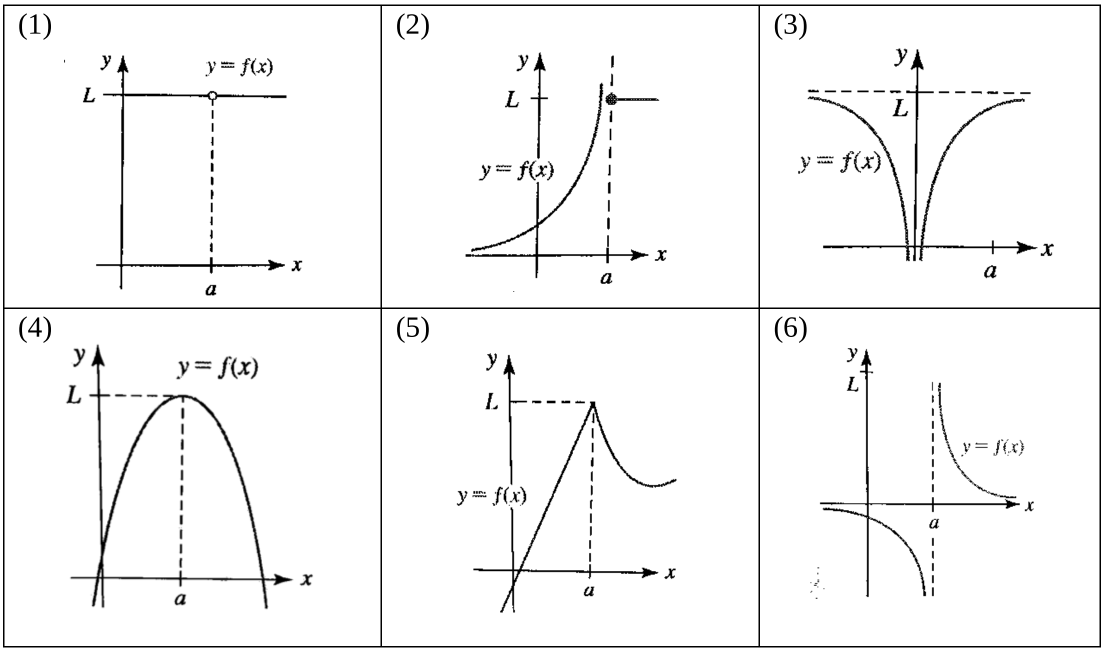
Respuestas: **a)** -∞; **b)** + ∞; **c)** + ∞; 0; **d)** $\frac{3}{e+1}$; **e)** $\frac{-\pi}{2}$; **f)** -1; **g)** + ∞; 0; **h)** - ∞; **i)** + ∞, - ∞; **j)** 0, 2

Ej. 14: En los gráficos del 1) al 6) establezca cuáles de las condiciones $a)/h)$ son aplicables a la gráfica de $y=f(x)$:

Condiciones

a) $f(a)$ no está definida	b) $f(a)=L$
c) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$	d) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$
e) $\lim\limits_{x\to a}\lvert f(x)\rvert=L$	f) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=L$
g) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=-\infty$	h) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=0$

Gráficos



Ej. 15: Indicar el resultado de $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_0.x^m+a_1.x^{m-1}+...+a_m}{b_0.x^n+b_1.x^{n-1}+...+b_n}$ **(**$a_0 \neq 0$**,** $b_0 \neq 0$**), cuando:**

a) m >n; b) m = n; c) m < n; siendo m y n dos números enteros positivos.

Respuestas: **a)** Si m>n → L=∞; **b)** Si m=n → $L = \frac{a_0}{b_0}$ **c)** Si m<n → L=0

Ej16: Calcular los siguientes límites (identificar el tipo de indeterminación):

Grupo A: a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{8x^3-x+2}{3x^3+x^2+1}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{7x^3-x+1}{2x^2-x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2}{x-1}+\frac{3x}{x+1}\right)$

Grupo B: a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+3^x}{2+2^x}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2e^x+1}{e^x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

Grupo C: a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{\frac{1-x}{1-64x}}\right)^{\frac{1+2x}{3x-1}}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}} =$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$

Respuestas: Grupo A: a) 8/3 b) –∞ c) + ∞ ; Grupo B: a) 1 b) 2 c) si x → +∞: $L = 1$; sí x → –∞: $L = -1$; Grupo C: a) ¼ b) 2 c) ½

Ej. 17: Hallar:

a) El valor de "a" de modo que $\lim\limits_{x\to-2} \frac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2}$ exista. Calcular el límite.

b) Los valores de m de tal manera que $\lim\limits_{x\to m} \frac{x^2-mx+3x-3m}{x-m} = m^2-27$

c) Los valores a y b de modo tal que:

$i)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{x^2-2x+3}{x-1}+ax+b\right] = 0$; $ii)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(ax+b-\frac{x^3+1}{x^2+1}\right) = 0$

Respuestas: **a)** 15; **b)** $m = 6$; $m = -5$; **c)** $i)$ a= -1; b= 1; $ii)$ $a = 1$, $b = 0$

Ej. 18 Calcular los siguientes límites:

Tener en cuenta los límites notables: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$; $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

Grupo 1: a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x}\right)^{3x}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+2}{5x-1}\right)^{x+4}$

Grupo 2: e) $\lim\limits_{t\to 0}(1-2t)^{\frac{1}{t}}$ f) $\lim\limits_{t\to 0}\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{t}+\frac{1}{2}}$ g) $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{4t+6}{6}\right)^{\frac{1}{3t}+1}$ h) $\lim\limits_{t\to 0}(1+at)^{\frac{1}{bt}}$

Respuestas: a) e^2 **b)** e **c)** $e^{-\frac{3}{2}}$ **d)** $e^{\frac{3}{5}}$ **e)** e^{-2} **f)** $e^{\frac{1}{2}}$ **g)** $e^{\frac{2}{9}}$ **h)** $e^{\frac{a}{b}}$

Ej. 19: Resolver los siguientes problemas de contexto, justificando cada paso:

1) En un experimento biológico, la población de una colonia de bacterias (en millones) después de x días está dada por: $y=\dfrac{4}{2+8.e^{-2x}}$.

a) ¿Cuál es la población inicial de la colonia?

b) Resolviendo $\lim\limits_{x\to+\infty} y$, se obtiene información acerca de si la población crece indefinidamente o tiende a estabilizarse en algún valor fijo. Determine cuál de estas situaciones ocurre.

2) Los ingenieros industriales han estudiado un trabajo particular en una línea de montaje. La función $y=f(t)=120-80.e^{-0.3.t}$ es la función de la curva de aprendizaje que describe el número de unidades terminadas por hora para un empleado normal de acuerdo con el número de horas de experiencia t que él tiene en su trabajo.

a) Determine el número de unidades que puede terminar un empleado en el momento que ingresa a esa empresa y luego de su primera hora de experiencia.

b) ¿Cuántas unidades puede terminar un empleado cuando el número de horas de experiencia en la fábrica crece indefinidamente?

3) La Federación de caza de cierto estado introduce 50 ciervos en una determinada región. Se cree que el número de ciervos crecerá siguiendo el modelo: $N(t)=\dfrac{10.(5+3t)}{1+0.04.t}$, donde t es el tiempo en años.

a) Calcule el número de animales que habrá luego de 5 y 10 años.

b) ¿A qué valor tenderá la población cuando t tiende a infinito?

Respuestas: 1) a) 0,4 millones=400000 bacterias b) Se estabiliza en 2 millones de bacterias. **2)** a) 40 unidades, 60 unidades b) 120 unidades ;3**)** a) N (5) = 166 ciervos; N (10) =250 ciervos b) 750 ciervos

ASÍNTOTAS

La recta $x=a$ es asíntota vertical de la curva $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$

La recta $y=k$ es asíntota horizontal de la curva $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-k]=0$

La recta $y=mx+b$ es asíntota oblicua de la curva $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(mx+b)]=0$

De modo que $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ $\quad b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-mx]$

Ej. 20: Calcular las ecuaciones de las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, en caso de que las haya. Representar gráficamente las funciones dadas, teniendo en cuenta, además, intersecciones con los ejes, simetrías, intervalos de positividad y negatividad:

a) $y = \frac{x^2}{x^2-9}$ b) $y = \frac{3x^2+2}{2x-1}$ c) $y = \frac{-4x}{x^2+4}$ d) $f(x) = \frac{-x^2+1}{x}$

e) $y = \frac{x^2-3x+1}{x^3}$ f) $y = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x} & si \quad x > 0 \\ -1 + e^{-x^2} & si \quad x \leq 0 \end{cases}$ g) $f(x) = \frac{|x-7|+\sqrt{5+x^2}}{x-4}$

Respuestas: **a)** AV. $x = 3$; $x = -3$; AH. $y = 1$; **b)** AV. $x = \frac{1}{2}$; AO. $y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$ **; c)** AH. $y = 0$ **d)** A.V. $x = 0$; A. O. $y = -x$; **e)** A.V. $x = 0$; A.H. $y = 0$; **f)** A.V $x = 4$; A.H $y = 2$; y=0

Ej.21: Determinar los parámetros indicados en los siguientes problemas, justifique cada paso y verifique con GeoGebra:

1) Escribir una función racional con asíntotas verticales en $x = 6$ y $x = -2$, y un cero en $x = 3$

2) Hallar los valores reales de "a" y "b" para que las rectas $y = 5/3$ y $x = \frac{1}{ln\,4} + 1$ sean asíntotas de $g(x) = \frac{a}{b - e^{\frac{1}{x-1}}}$ .Para los valores de "a" y "b" hallados clasificar las discontinuidades que presenta g(x).

3) Sea $h: Dh \to R$ tal que $h(x) = ax + \frac{3x-10}{x-5}$, ¿Cuánto valen los parámetros reales **a** y **k** para que la recta $y = 2x + k$ sea asíntota de $h(x)$? Escribir la ecuación de la otra asíntota que posee la función h.

4) Hallar a, b y c sabiendo que las asíntotas de $f(x) = \frac{ax^2+bx-8}{x+c}$ tienen ecuaciones: $y = 3x - 1$; $x = 4$.

5) Hallar a y b para que la recta $y = 2x + 1$ sea asíntota de la curva dada por $y = \frac{ax^2}{bx+4}$

6) Hallar el valor de a para que f(x) =$x.e^{\frac{a}{x}}$ tenga asíntota oblicua $y = x + 1$

Respuestas: **2)** a=5, b=4, f es disc. Esencial en x=1; **3)** a=2; k=3; la otra asíntota es Vertical: $x = 5$;**4)** a=3; b=-13; c=-4; **5)** $a = -16$; $b = -8$; **6)** $a \in \mathbb{R}$

Ej. 22: Graficar la curva de ecuación $y = f(x)$ que cumpla con las condiciones indicadas:

a) Tiene asíntota vertical $x = -3$, asíntota oblicua $y = -x + 4$, $\lim_{x\to -3} f(x) = +\infty$ y corta a la asíntota oblicua en el punto (0, 4)

b) $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 4$, $\lim_{x\to -\infty} [f(x) + x] = 0$ y no corta al eje x

c) Tiene $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ asíntota horizontal y=7, f(x)< 7 para todo x del dominio, $\lim_{x\to -2^+} f(x) = 5$; $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$

CONTINUIDAD. DISCONTINUIDADES: CLASIFICACIÓN

***f* es continua en x=a** $\Leftrightarrow f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

Lo cual implica las siguientes tres condiciones: $\begin{cases} \mathbf{1)}\ \exists f(a) \\ \mathbf{2)}\ \exists \lim_{x \to a} f(x) = L \\ \mathbf{3)}\ f(a) = L \end{cases}$

En consecuencia, existen casos de discontinuidades:

Discontinuidad
- **Evitable:** existe límite finito en el punto, pero no se verifica la 3er condición.
- **Esencial:** no existe límite finito en el punto

Ej. 23 **Analizar si las siguientes funciones presentan discontinuidades; en tal caso, clasificar su tipo y, de ser posible, redefinir la función para evitar la discontinuidad:**

a) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ b) $y = \dfrac{x-3}{x^2 - 9}$ c) $y = \dfrac{sen(2x-10)}{x-5}$ d) $y = \dfrac{|x+2|}{x+2}$

e) $y = \dfrac{x-1}{|x-1|}$ f) $f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x \le 0 \\ 1/x & si\ 0 < x \le 1 \\ \sqrt[3]{2-x} & si\ x > 1 \end{cases}$ g) $f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \forall x < 1 \\ x^2 & \forall x \ge 1 \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} & \forall x \ne 1 \\ 2 & si \quad x = 1 \end{cases}$ i) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \forall x \ne 1 \\ 2 & si \quad x = 1 \end{cases}$

Respuestas: **a)** disc. esencia. en x =1 y en x =-1; **b)** disc. esenc. en x =-3 y evit. en x =3
c) disc. evit. en x =5; **d)** disc. esenc. en x = -2; **e)** disc. esenc. en x = 1
f) disc. esenc. en x=0, salto infinito, disc evitable en x=1; **g)** continua en R; **h)** disc. evit. en x = 1;
i) continua en R.

Ej. 24 **Encontrar valores para las constantes "a" y "b" de modo que las funciones definidas en cada caso sean continuas:**

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax}{\tan x} & x > 0 \\ a^2 - 2 & x \le 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x & x \le 1 \\ a.x + b & 1 < x < 4 \\ -2x & x \ge 4 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & x \le 2 \\ a - x^2 & x > 2 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x \ne 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x-1}{x+1}} & x > -1 \\ 3x + a & x \le -1 \end{cases}$ f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen(bx)}{2x} & x \ne 0 \\ 3 & x = 0 \end{cases}$

Respuestas:
a) $a = 2$ ò $a = -1$; b) $a = -3$ y $b = 4$; c) $a = -8$; d) No existe; e) $a = 3$; f) $b = 6$

EJERCICIOS INTEGRADORES DE LA UNIDAD 2

A) **1)** Dado el límite: $\lim_{x \to 3}(2x - 5) = 1$, encontrar δ para ε =0.01

2) Un joyero ajusta un anillo de tal manera que su circunferencia interna es de 6 cm.

a) ¿Cuál es el radio del anillo? b) Si la circunferencia interna del anillo puede variar entre 5. 5 y 6.5 cm. ¿Cuánto puede variar su radio? c) Utilizar la definición de límite para describir esta situación, identificando ε y δ

B) Determinar si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas, justificando la respuesta

a) $Si\ f(x) = \begin{cases} \frac{sen\ (x+4)}{2x+8} & si\ x < -4 \\ \frac{1}{4}\sqrt{x+8} & si\ x > -4 \end{cases}$ $entonces$ $a)\ Existe\ \lim_{x \to -4} f(x)$ $b) f\ es\ continua\ en\ x = -4$

b) Si f y g son continuas en $x = 2$, entonces f/g es continua en $x = 2$

c) Si $\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$ entonces $\lim_{x \to 0} \frac{sen\ |x|}{x} = 1$

B) Calcule $k \in \mathbb{R}$ para que se cumpla la condición:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(kx)}{x^2} = \lim_{x \to 2} \frac{x+1-\sqrt{5x-1}}{x^2+x-6}$

b) Sea continua en $x = 0$ $g(x) = \begin{cases} (1+kx)^{3/x} & x \neq 0 \\ e^{4-k^2} & x = 0 \end{cases}$

C) La altura de un proyectil disparado desde el nivel del suelo está dada por:

$S(t) = -16t^2 + 256t$, donde S se mide en pies y t en segundos.

a) Determine la altura del proyectil en t= 2 y t = 6.

b) Calcular la velocidad media del proyectil en el intervalo de tiempo $[2, 6]$ (Teniendo en cuenta que la velocidad promedio o media se calcula $V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$)

c)Utilizando $V_m = \frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$, escribir una expresión para la velocidad promedio del objeto en el lapso de $t_0 = a$ y $t = a + h$

expresar algebraicamente la velocidad promedio en funciòn de t , para $t_0 = 3$

d)La velocidad instantanea en el instante t_0 se define como:

$$\boldsymbol{V(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}}$$

Escribir una expresión para la velocidad instantánea en el instante $t_0 = a$.

Utilizar la misma para calcular la misma para $t_0 = 16$

d) ¿Cuàl es la altura màxima que alcanza el proyectil ?

d) En què instante el proyectil choca contra el suelo.

LIMITE DE UNA FUNCION

Limite finito

Valor al cual se acerca una función f(x) dependiendo del valor al cual se acerca x

Para $x \to c$

Se define formalmente

$\lim_{x\to c} f(x) = L$ *significa que* $\forall \varepsilon > 0;$
$\exists \delta > 0$ *tal que para todo* $x \in df$, *si* $|x-a| < \delta$
entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

Valor al cual se acerca una función f(x) a medida que x crece o decrece

Para $x \to \pm\infty$

Se define formalmente

$\lim_{x\to \infty} f(x) = L$ *significa que* $\forall \varepsilon > 0;$
$\exists \delta > 0$ *tal que para todo* $x \in df$, *si* $|x| > \delta$
entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

Limites Laterales

Acercamiento de **x** a **c** por la derecha: $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$

Acercamiento de **x** a **c** por la izquierda: $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$

Comportamiento diferente
$\nexists \lim_{x\to c} f(x)$ **si** $\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x)$

Limite infinito

f(x) aumenta o disminuye **sin límite** a medida que x se aproxima a **c**

Para $x \to c$

Se define formalmente

$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ *significa que* $\forall \varepsilon > 0;$
$\exists \delta > 0$ *tal que para todo* $x \in df$, *si* $|x-a| < \delta$
entonces $|f(x)| > \varepsilon$

f(x) aumenta o disminuye a medida que x crece o decrece

Para $x \to \pm\infty$

Se define formalmente

$\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$ *significa que* $\forall \varepsilon > 0;$
$\exists \delta > 0$ *tal que para todo* $x \in df$, *si* $|x| > \delta$
entonces $|f(x)| > \varepsilon$

Propiedades

1.Unicidad del límite
Si una función tiene límite en un punto dicho limite tiene resultado único.

2.Teorema de compresión o encaje
Si a) $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, *para todo* $x \in E^*(c)$; ***b)*** $\lim_{x\to c} h(x) = \lim_{x\to c} g(x) = L$
entonces $\exists \lim_{x\to c} f(x) = L$

3. $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = L$,
Se utiliza para el cálculo de límites.
Por ej. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 1$

Álgebra de limites

Si b y c son números reales y n entero positivo, f y g funciones con los siguientes límites: $\lim_{x\to c} f(x) = L$ y $\lim_{x\to c} g(x) = L$

1.Suma o diferencia $\lim_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] = L \pm k$

2.Producto $\lim_{x\to c}[f(x).g(x)] = L.k$

3.Cociente $\lim_{x\to c}[\frac{f(x)}{g(x)}] = L/k \quad k \neq 0$

4.Potencias $\lim_{x\to c}(f(x))^n = L^n$, n≥ 2

5. $\lim_{x\to c}[(f(x))]^{g(x)} = \lim_{x\to c}[f(x)]^{\lim g(x)}$ **si** $\lim_{x\to c} f(x) > 0$

5. **Si f(x) es función polinómica,** $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

6.**Si f(x) es función trigonométrica,**
$\lim_{x\to c} sen\ x = sen\ c; \lim_{x\to c} cos\ x = cos\ c;$
$\lim tan\ x = tan\ c$

Limite Oscilante

Cuando **x** está cerca de **c**, la f(x) toma distintos valores numéricos sin estabilizar su comportamiento. **No existe el límite** porque la función oscila

Se utilizan para analizar

Asíntotas lineales

Asíntota Vertical

La recta **x = c** es A.V de f(x) ⇔ $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$

Asíntota Horizontal

La recta **y = L** es A.H de f(x) ⇔ $\lim f(x) = L$

Asíntota Oblicua

La recta y = m x + b es A.O de f(x) ⇔ $\lim_{x\to\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$$

Continuidad

Si se cumple

En un punto c: 1. Existe f(c) 2.Existe $\lim_{x\to c} f(x) = L$ 3.f (c)= $\lim_{x\to c} f(x) = L$

En un (a, b): Continua en todos los puntos del intervalo.

En un $[a, b]$: f continua en (a, b) f (a)= $\lim_{x\to a^+} f(x)$ f (b)= $\lim_{x\to b^-} f(x)$

Discontinuidad

Evitable/Removible: f (c)≠ $\lim_{x\to c} f(x) = L$

No evitable/Esencial: $\nexists \lim_{x\to c} f(x)$ ya sea por que los limites laterales son distintos o el limite da infinito

Función Infinitésimo

Una función f(x) es infinitamente pequeña, infinitesimal o **infinitésimo** cuando **x tiende a c** si y solo si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ **.**

<u>Infinitésimos equivalentes</u>

f(x) y **g(x) infinitésimos equivalentes** si y solo

si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} =$ **1. (análogamente para x→ ∞).**

Ej.: $\lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1$

Indeterminación

Cociente de infinitésimos $\frac{\to 0}{\to 0}$

Para salvar la indeterminación **se busca una función** que se comporte de igual forma que la función original. (propiedad 3) Para ello:

a) Se factorea numerador y/o denominador

b) Se racionaliza el numerador y/o denominador

Cociente de infinitos $\frac{\to\infty}{\to\infty}$

Para salvar la indeterminación si tenemos:

a) un cociente de polinomios: $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ **se dividen ambos polinomios por x^n**, siendo n el exponente de mayor grado que aparezca.

b) Si tenemos expresiones irracionales en el numerador y/o denominador, **dividimos por $|x^n|$, siendo n el mayor exponente y dentro de la raíz se divide por $|x^n|^n = x^{n.n}$.**