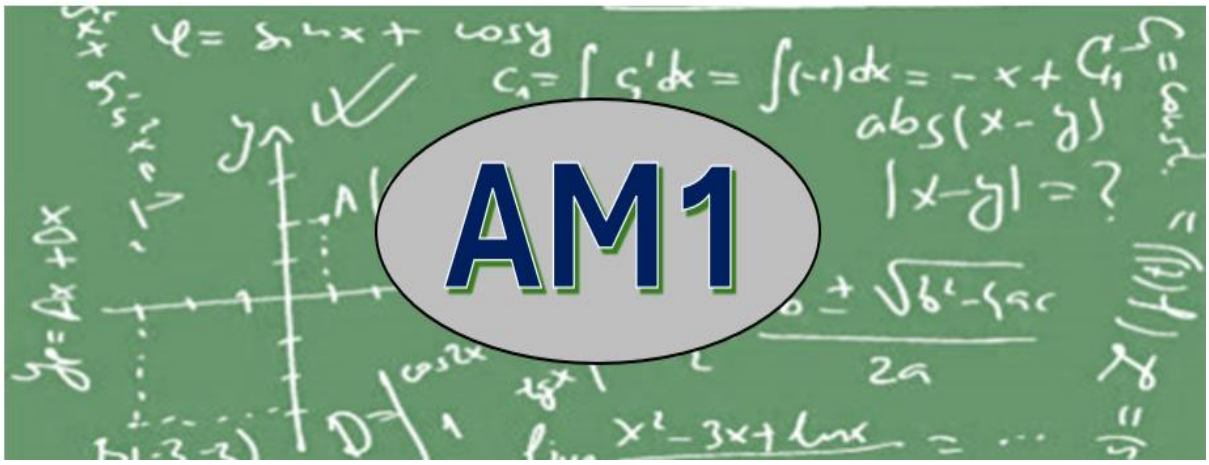


TRABAJO PRÁCTICO N°2: LÍMITES Y CONTINUIDAD

ANÁLISIS MATEMÁTICO 1

UTN – Facultad Regional Haedo

TRABAJO PRÁCTICO N° 2 - LÍMITES Y CONTINUIDAD

COMPETENCIAS

- Identificar, formular y resolver situaciones problemáticas que involucren distintos tipos de funciones y sus límites, utilizando los recursos bibliográficos, digitales y multimediales.
- Utilizar de manera efectiva las técnicas y herramientas de la ingeniería
- Aprender en forma continua y autónoma
- Comunicar con efectividad

ENTORNOS. LÍMITE FUNCIONAL: CONCEPTO INTERPRETACIÓN GRÁFICA. LÍMITES LATERALES.

Ej.2-01

Elegir la opción correcta:

1) El entorno E(0,2) está formado por todos los números entre:

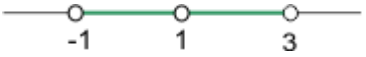
a) -2 y 2 ambos incluidos.	b) -2 y 2 sin estar estos incluidos	c) -2 y 2 sin estar estos incluidos ni el 0 tampoco.

2) El entorno $E^*(3,1)$ está formado por todos los números entre…

a) 2 y 4, sin incluir al 2, 4 y 3	b) -2 y 4 sin estar incluidos	c) -2 y 4 sin estar incluidos el 1, -2 y 4

3) La expresión $\{x \in R: |x-8| < 1\}$ también se puede escribir como

a) E (9,1)	b) E (8,1)	c) $E^*(8,2)$

4) La representación 

corresponde al entorno ...

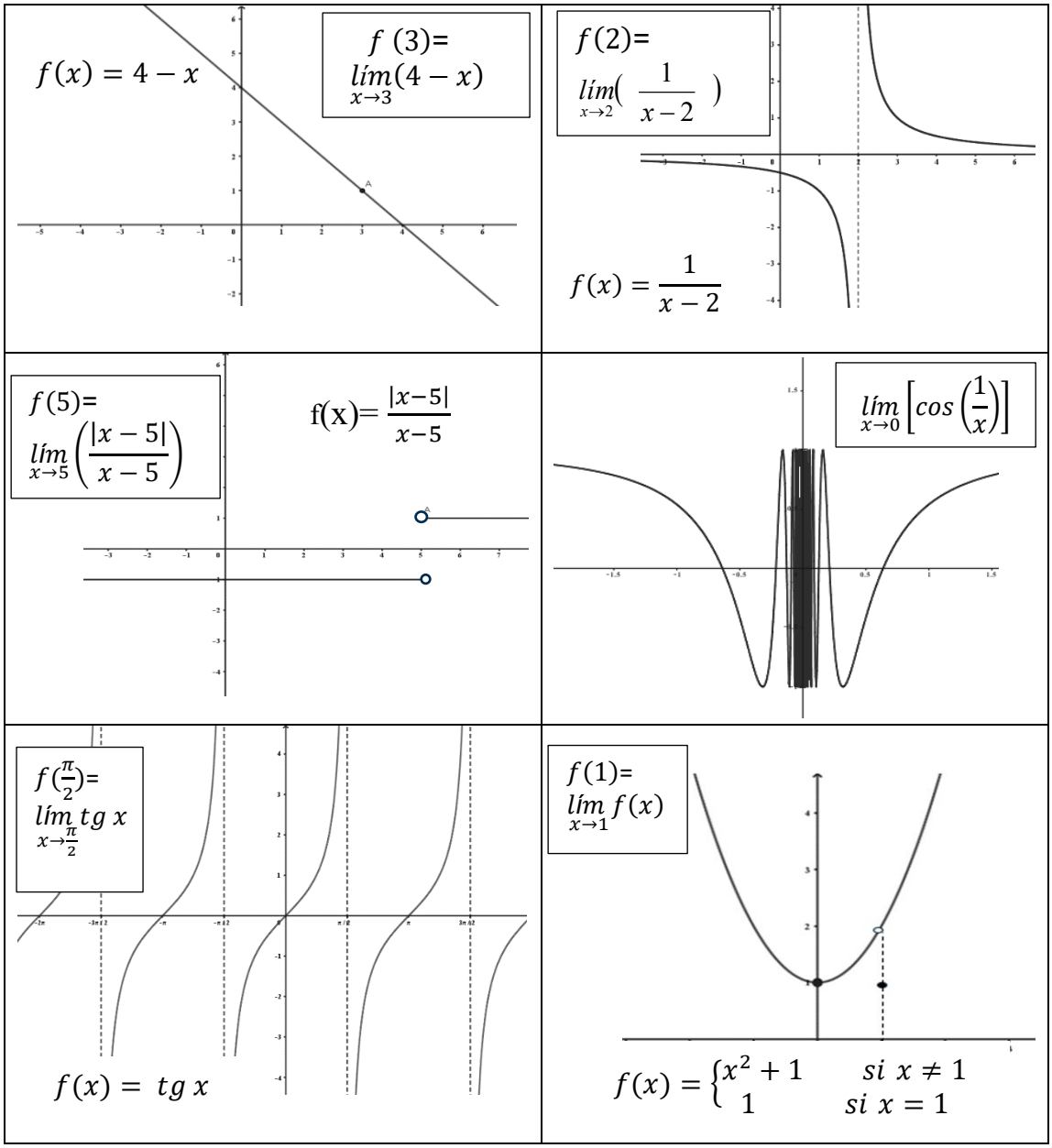
a) $E^*(1,2)$	b) E (1,2)	c) E (2,1)

5) La representación gráfica del entorno E^* (2,2) es:

a) 	b) 	c) 

Ej.2-02

Observar cada gráfico y completar. Indicar, observando el grafico, el valor del límite, si éste existe:



Ej.2-03

Dada la siguiente función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & si\ x \leq 0 \\ 4x-1 & si\ 0 < x \leq 1 \\ x^2-5x+7 & si\ x > 1 \end{cases}$

Analizar si existen los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ b) $\lim_{x\to 2} f(x)$ c) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, justificar la respuesta.

Ej.2-04

Hallar k real para que exista el límite en el punto indicado:

$a)\ f(x) = \begin{cases} sen(kx) & si\ x < \frac{\pi}{2} \\ cos\ x & si\ x > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad x = \frac{\pi}{2}$; b) $f(x) = \begin{cases} x^3+2x-1 & si\ x < 3 \\ \frac{k}{x+1} & si\ x \geq 3 \end{cases} \quad x = 3$

Ej.2-05

Hallar a y b reales para que: $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ y $f(1) = 1$ en la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} bx^2 + ab & si \quad x \geq 0 \\ 2(x^2+b)^{\frac{1}{2}} - b & si \quad x < 0 \end{cases}$$

PROPIEDADES ALGEBRAICAS DE LÍMITES
CÁLCULO DE LÍMITES INMEDIATOS

Ej.2-06

Calcular los siguientes límites inmediatos, aplicando las propiedades correspondientes:

a) $\lim_{x\to -1}\left(x^2 - 4x + 3\right) =$ b) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}}{x^3} =$ c) $\lim_{x\to -4} log_3(-x^2 - 3x + 5) =$

d) $\lim_{x\to -1} 3^{\sqrt{x^3-x^2+2}} =$ e) $\lim_{x\to -\pi} sen\, x =$ f) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} arcsen\, x =$

INFINITÉSIMOS: PROPIEDADES Y OPERACIONES. CÁLCULO DE LÍMITES INDETERMINADOS

f es infinitésimo en x=a $\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = 0$

Ej.2-07

Indicar si la función es infinitésima en el punto indicado, y analizar si lo es en algún otro valor de x:

a) $f(x) = x^3 - 8$; en $x = 2$ b) $f(x) = x^3 - 8$; en $x = 1$ c) $f(x) = sen\, x$;en $x = \pi$.

Ej.2-08

Calcular el valor real del parámetro “q” de modo que:

a) La función $f(x) = \frac{x^4 - q}{x}$ sea un infinitésimo en $x = 3$.

b) $\lim_{x\to q} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - x - 2}$ sea un cociente de infinitésimos.

Ej.2-09

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} =$ b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^5-1}{x-1} =$ c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} =$ d) $\lim_{x\to 0} \frac{3x+2x^2}{x} =$

e) $\lim_{x\to -1} \frac{x^5+2x^3+x^2+2}{x^3-3x^2-2x+2} =$ f) $\lim_{x\to 0} \frac{(a+x)^2-a^2}{x} =$ g) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+4x^2+4x}{(x+2)(x-3)}$

h) $\lim_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-9}} =$ i) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x} =$ J) $\lim_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} =$ k) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{|x|-2} =$

Ej.2-10

Aplicar el Teorema de Compresión para calcular:

a) $\lim_{x\to -1} f(x)$, sabiendo que $1 \le f(x) \le x^2 + 2x + 2$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2}$,, sabiendo que $x^2 - \frac{x^4}{3} \le f(x) \le x^2$

c) $\lim_{x\to 0} f(x)$, sabiendo que $|f(x) - 1| \le x^2$

Ej.2-11

Calcular los siguientes límites:

Tener en cuenta los límites notables: $\lim_{z\to 0} \frac{senz}{z} = 1$; $\lim_{z\to 0} \frac{tgz}{z} = 1$

a) $\lim_{x\to 0} \frac{3.sen2x}{sen5x} =$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{tg5x}{3x} =$ c) $\lim_{x\to 0} \frac{1-cos^2 x}{x^2} =$ d) $\lim_{x\to 0} \frac{sen^4 x.cos\, x.tgx}{5.sen4x.tg2x} =$

e) $\lim_{x\to \pi} \frac{(3x^2-12).sen(\pi-x)}{(x-\pi).(x-2)} =$ f) $\lim_{x\to 0} \frac{(x^3-x^2).sen^2 x}{x^2.sen^2\left(\frac{x}{2}\right)} =$ g) $\lim_{x\to 0} \frac{1-cos\, x}{3x^2} =$

h) $\lim_{x\to 0} \frac{sen^m(px)}{qx^r} =$

Ej.2-12

Analizar los límites laterales de las siguientes funciones. Extraer conclusiones acerca de la existencia de estos:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$ b) $\lim_{x\to 0} x\sqrt{\frac{1}{4x^2} - 16}$ c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{|x-2|}$

d) $\lim_{x\to 1} \frac{2}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$ e) $\lim_{x\to 3} \frac{1}{x^2-9}$ f) $\lim_{x\to 3} sec\frac{\pi.x}{6}$

LIMITE INFINITO DE VARIABLE FINITA. LÍMITE FINITO DE VARIABLE INFINITA. LÍMITE INFINITO PARA VARIABLE INFINITA

Ej.2-13

Calcular los siguientes límites inmediatos:

a) $\lim_{x\to -\infty} (x^3 - x^2 + x + 1) =$ b) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} =$ c) $\lim_{x\to \infty} e^x =$

d) $\lim_{x\to -\infty} \frac{3}{e-e^{\frac{1}{x+1}}} =$ e) $\lim_{x\to -\infty} arctg\, x =$ f) $\lim_{x\to -\infty} Th\, x =$

g) $\lim_{x\to \infty} e^{-2x} =$ h) $\lim_{x\to 0^+} \ln x =$ i) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} =$ j) $\lim_{x\to 1} \frac{2}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$

Ej.2-14

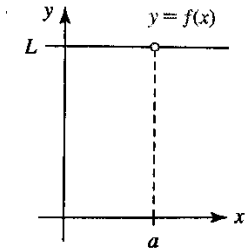
En los gráficos del 1) al 6) establezca cuáles de las condiciones dadas, son aplicables a la gráfica de $y = f(x)$:

Condiciones

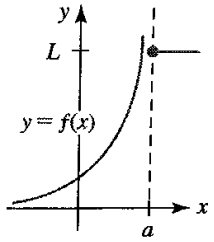
a) $f(a)$ no está definida	b) $f(a)=L$
c) $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$	d) $\lim_{x\to a} f(x) = L$
e) $\lim_{x\to a} \lvert f(x)\rvert = L$	f) $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$
g) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$	h) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

Gráficos

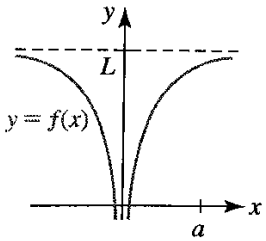
(1)



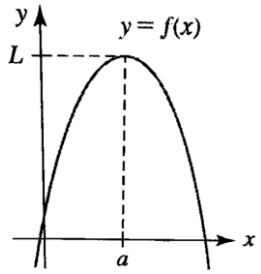
(2)



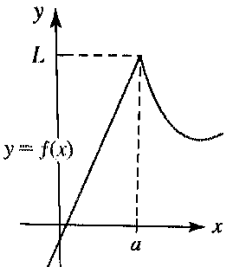
(3)



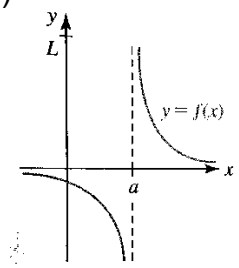
(4)



(5)



(6)



Ej.2-15

Calcular los siguientes límites (identificar el tipo de indeterminación):

Grupo A: a) $\lim_{x\to\infty} \frac{8x^3-x+2}{3x^3+x^2+1}$ b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{7x^3-x+1}{2x^2-x+2}$ c) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2}{x-1}+\frac{3x}{x+1}\right)$

d) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^2}{x+1}-2x+2\right)$

Grupo B: a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2+3^x}{2+2^x}$ b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x+1}{e^x-1}$ c) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$

Grupo C: a) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{\frac{1-x}{1-64x}}\right)^{\frac{1+2x}{3x-1}}$ b) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}} =$ c) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right) =$

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x+5x-\sqrt{4x^2-7x}}{7x-5+\sqrt{9x^2-2}} =$

Ej.2-16

Hallar:

a) El valor real de "a" de modo que $\lim_{x\to -2} \frac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2}$ exista. Calcular el límite.

b) Los valores reales de m de tal manera que $\lim_{x\to m} \frac{x^2-mx+3x-3m}{x-m} = m^2 - 27$

c) Los valores reales de a y b de modo tal que:

$i)$ $\lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2-2x+3}{x-1} + ax + b\right] = 0$; $ii)$ $\lim_{x\to+\infty} \left(ax + b - \frac{x^3+1}{x^2+1}\right) = 0$

Ej.2-17

Calcular los siguientes límites:

Tener en cuenta los límites notables: $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$; $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Grupo 1: a) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ b) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x+1}\right)^x$ c) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x-1}{2x}\right)^{3x}$

d) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{5x+2}{5x-1}\right)^{x+4}$

Grupo 2: e) $\lim_{t\to 0}(1-2t)^{\frac{1}{t}}$ f) $\lim_{t\to 0} \left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{t}+\frac{1}{2}}$ g) $\lim_{t\to 0} \left(\frac{4t+6}{6}\right)^{\frac{1}{3t}+1}$

h) $\lim_{t\to 0}(1+at)^{\frac{1}{bt}}$

Ej.2-18: Resolver los siguientes problemas de contexto, justificando cada paso:

1) En un experimento biológico, la población de una colonia de bacterias (en millones) después de x días está dada por: $y = \frac{4}{2+8.e^{-2x}}$.

a) ¿Cuál es la población inicial de la colonia?

b) Resolviendo $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, se obtiene información acerca de si la población crece indefinidamente o tiende a estabilizarse en algún valor fijo. Determine cuál de estas situaciones ocurre.

2) Los ingenieros industriales han estudiado un trabajo particular en una línea de montaje. La función $y = f(t) = 120 - 80.e^{-0.3.t}$ es la función de la curva de aprendizaje que describe el número de unidades terminadas por hora para un empleado normal de acuerdo con el número de horas de experiencia t que él tiene en su trabajo.

a) Determine el número de unidades que puede terminar un empleado en el momento que ingresa a esa empresa y luego de su primera hora de experiencia.
b) ¿Cuántas unidades puede terminar un empleado cuando el número de horas de experiencia en la fábrica crece indefinidamente?

3) La Federación de caza de cierto estado introduce 50 ciervos en una determinada región. Se cree que el número de ciervos crecerá siguiendo el modelo: $N(t) = \frac{10.(5+3t)}{1+0.04.t}$, donde t es el tiempo en años.

a) Calcule el número de animales que habrá luego de 5 y 10 años.
b) ¿A qué valor tenderá la población cuando t tiende a infinito?

ASÍNTOTAS

La recta $x = a$ es asíntota vertical de $f \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \infty$

La recta $y = k$ es asíntota horizontal de $f \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} [f(x) - k] = 0$

La recta $y = mx + b$ es asíntota oblicua de $f \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$

De modo que $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ $\qquad b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$

Ej.2-19: Calcular las ecuaciones de las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, en caso de que las haya. Representar gráficamente las funciones dadas, teniendo en cuenta, además, intersecciones con los ejes, simetrías, intervalos de positividad y negatividad:

a) $y = \frac{x^2}{x^2-9}$ b) $y = \frac{3x^2+2}{2x-1}$ c) $y = \frac{-4x}{x^2+4}$ d) $f(x) = \frac{-x^2+1}{x}$

e) $y = \frac{x^2-3x+1}{x^3}$ f) $y = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x} & si \quad x > 0 \\ -1 + e^{-x^2} & si \quad x \leq 0 \end{cases}$ g) $f(x) = \frac{|x-7|+\sqrt{5+x^2}}{x-4}$

Ej.2-20: Determinar los parámetros indicados en los siguientes problemas, justifique cada paso y verifique con GeoGebra:

1) Escribir una función racional con asíntotas verticales en $x = 6$ y $x = -2$, y un cero en $x = 3$

2) Hallar los valores reales de "a" y "b" para que las rectas $y = \frac{5}{3}$ y $x = \frac{1}{ln\,4} + 1$ sean asíntotas de $g(x) = \frac{a}{b - e^{\frac{1}{x-1}}}$. Para los valores de "$a$" y "b" hallados clasificar las discontinuidades que presenta g(x).

3) Sea $h: Dh \to R \,/\, h(x) = ax + \frac{3x-10}{x-5}$, ¿Cuánto valen los parámetros reales a y k para que la recta $y = 2x + k$ sea asíntota de $h(x)$? Escribir la ecuación de la otra asíntota que posee la función *h*.

4) Hallar a, b y c reales sabiendo que las asíntotas de $f(x) = \frac{ax^2+bx-8}{x+c}$ tienen ecuaciones: $y = 3x - 1; x = 4$.

5) Hallar a y b reales para que la recta $y = 2x + 1$ sea asíntota de la curva $y = \frac{ax^2}{bx+4}$

6) Hallar el valor real de a para que f(x) =$x.e^{\frac{a}{x}}$ tenga asíntota oblicua $y = x + 1$

Ej.2-21

Graficar la curva de ecuación $y = f(x)$ que cumpla con las condiciones indicadas:

a) Tiene asíntota vertical $x = -3$, asíntota oblicua $y = -x + 4$, $\lim_{x\to -3} f(x) = +\infty$ y corta a la asíntota oblicua en el punto (0, 4)

b) $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 4$, $\lim_{x\to -\infty} [f(x) + x] = 0$ y no corta al eje x

c) Tiene $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ asíntota horizontal y=7, f(x)< 7 para todo x del dominio, $\lim_{x\to -2^+} f(x) = 5$; $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$

CONTINUIDAD. DISCONTINUIDADES: CLASIFICACIÓN

f es continua en x=a $\Leftrightarrow$ $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$

Lo cual implica las siguientes tres condiciones:

$$\begin{cases} 1)\ \exists f(a) \\ 2)\ \exists \lim_{x\to a} f(x) = L \\ 3)\ f(a) = L \end{cases}$$

En consecuencia, existen casos de discontinuidades:

Discontinuidad

- **Evitable:** existe límite finito en el punto, pero no se verifica la 3er condición.
- **Esencial:** no existe límite finito en el punto

Ej.2-22

Analizar si las siguientes funciones presentan discontinuidades; en tal caso, clasificar su tipo y, de ser posible, redefinir la función para evitar la discontinuidad:

a) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ *b)* $y = \frac{x-3}{x^2 - 9}$ c) $y = \frac{sen(2x-10)}{x-5}$ d) $y = \frac{|x+2|}{x+2}$

e) $y = \frac{x-1}{|x-1|}$ $f)$ $f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x \le 0 \\ 1/x & si\ 0 < x \le 1 \\ \sqrt[3]{2-x} & si\ x > 1 \end{cases}$ $g) f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \forall x < 1 \\ x^2 & \forall x \ge 1 \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1} & \forall x \ne 1 \\ 2 & si \quad x = 1 \end{cases}$ i) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \forall x \ne 1 \\ 2 & si \quad x = 1 \end{cases}$

.

Ej.2-23

Encontrar valores reales para las constantes "$\boldsymbol{a}$" y "b" de modo que las funciones definidas en cada caso sean continuas:

a) $f(x)=\begin{cases}\frac{ax}{\tan x} & x>0\\ a^2-2 & x\le 0\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}x & x\le 1\\ a.x+b & 1<x<4\\ -2x & x\ge 4\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}x^2+ax & x\le 2\\ a-x^2 & x>2\end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{x-1}{x+1}} & x>-1\\ 3x+a & x\le -1\end{cases}$ f) $f(x)=\begin{cases}\frac{sen(bx)}{2x} & x\neq 0\\ 3 & x=0\end{cases}$

EJERCICIOS INTEGRADORES DE LA UNIDAD 2

Ej.1) Determinar si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas, justificando la respuesta

a) $Si\ f(x)=\begin{cases}\frac{sen\,(x+4)}{2x+8} & si\ x<-4\\ \frac{1}{4}\sqrt{x+8} & si\ x>-4\end{cases}\ entonces$ $\begin{matrix}i)\ Existe\ \lim\limits_{x\to -4} f(x)\\ ii) f\ es\ continua\ en\ x=-4\end{matrix}$

b) Si f y g son continuas en $x=2$, entonces $\frac{f}{g}$ es continua en $x=2$

c) Si $\lim\limits_{x\to 0}\frac{senx}{x}=1$ entonces $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen|x|}{x}=1$

d) Si existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, entonces $f(a)$ necesariamente está definida.

e) Si $f(a)$ está definida y existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, entonces f es continua en a.

f) Si una función tiene límites laterales para x tendiendo a x_0, existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

g) Una función puede tener una asíntota vertical en un punto donde está definida.

h) Si hay discontinuidad evitable en a, entonces existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

i) La función $f(x)=\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-1}$ presenta asíntota vertical y oblicua

Ej.2) Calcule $k\in \mathbf{R}$ para que se cumpla la condición:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(kx)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+1-\sqrt{5x-1}}{x^2+x-6}$

b) Sea continua en $x=0$ $g(x)=\begin{cases}(1+kx)^{\frac{3}{x}} & x\neq 0\\ e^{4-k^2} & x=0\end{cases}$

Ej.3)

a) Determinar los valores reales de a y b para que la función f sea continua

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < -1 \\ ax + b & -1 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x+2} & x > 2 \end{cases}$$

b) Construir una función f con asíntota vertical en x=2, asíntota horizontal en y=1 y que pase por el origen de coordenadas.
c) Esbozar una función f y dar su expresión analítica, sabiendo que cumple simultáneamente:

- Tiene una discontinuidad evitable en $x = -1$
- Tiene una discontinuidad esencial en $x = 2$
- Tiene una asíntota vertical en $x = 4$

Ej.4) La altura de un proyectil disparado desde el nivel del suelo está dada por:

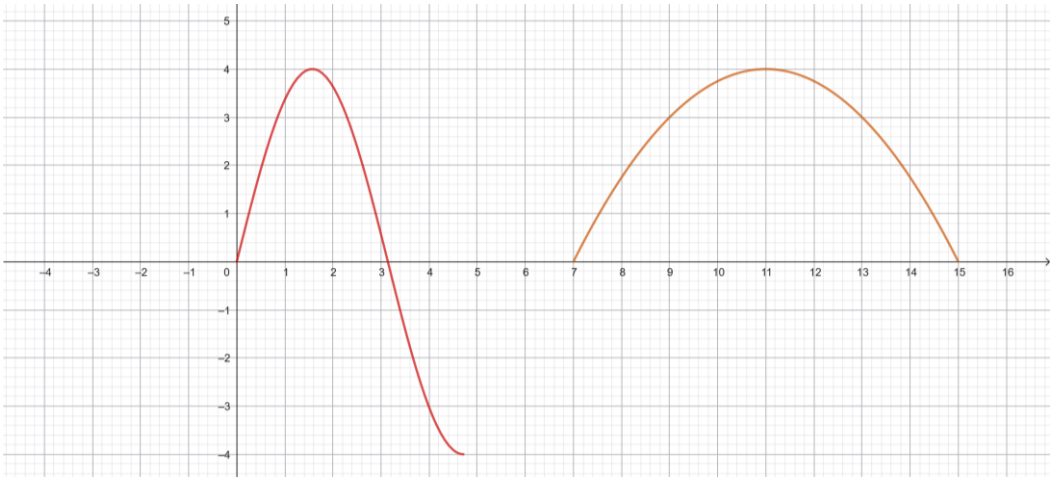
$S(t) = -16t^2 + 256t$, donde S se mide en pies y t en segundos.

a) Determine la altura del proyectil en t= 2 y t = 6.
b) Calcular la velocidad media del proyectil en el intervalo de tiempo $[2; 6]$ (Teniendo en cuenta que la velocidad promedio o media se calcula $V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$)
c)Utilizando $V_m = \frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$, escribir una expresión para la velocidad promedio del objeto en el lapso de $t_0 = a$ y $t = a + h$. Expresar algebraicamente la velocidad promedio en funciòn de t , para $t_0 = 3$
d)La velocidad instantanea en el instante t_0 se define como:

$$\boldsymbol{V(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}}$$

Escribir una expresión para la velocidad instantánea en el instante t_0= a.
Utilizar la misma para calcular la misma para $t_0 = 16$
e) ¿Cuàl es la altura màxima que alcanza el proyectil ?
f) En què instante el proyectil choca contra el suelo.

Ej.5) Una empresa de ingeniería está diseñando una pequeña montaña rusa experimental para un parque de diversiones. El recorrido tendrá 15 metros de longitud horizontal y estará formado por tres tramos, como se observa en la figura.



Los ingenieros ya diseñaron el primer y el último tramo utilizando curvas suaves. Sin embargo, aún deben definir el tramo intermedio que conectará ambas partes. Se busca que el recorrido final conecte los tres tramos sin saltos en la trayectoria y utilice la menor cantidad posible de material estructural en el tramo intermedio.

A partir del gráfico:
a) Determinar la expresión de la función que modela el primer tramo del recorrido.
b) Determinar la expresión de la función que modela el último tramo.
c) Proponer una expresión para el tramo intermedio que conecte ambos segmentos utilizando la menor cantidad de material posible.
d) Justificar qué tipo de función resulta conveniente utilizar para ese tramo y por qué.
e) Escribir la función por tramos completa que modela el recorrido de la montaña rusa.
f) Durante una revisión del proyecto, los ingenieros deciden que el punto más alto de la montaña rusa debería superar los 4 metros de altura para que la atracción resulte más emocionante. Proponer una modificación en alguno de los tramos del recorrido que permita cumplir esta condición y explicar cómo afecta esta modificación a la expresión algebraica de la función correspondiente.

Ej.6) En una fábrica se estudia la cantidad de piezas que un operario puede producir por hora en función de su experiencia en el puesto.
Un modelo propuesto por los ingenieros es $\boldsymbol{P(t) = \frac{120t}{t+4}}$ donde $\boldsymbol{t}$ representa las horas de experiencia del operario en ese trabajo y $\boldsymbol{P(t)}$ representa la cantidad de piezas producidas por hora
a) Determinar el dominio matemático de la función. ¿Qué ajustes harías para que el dominio tenga sentido en términos del problema?
b) Hallar las asíntotas de la función e interpretarlas a la luz de la situación problemática.

ALGUNAS RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

Ej.2-01
1) b 2) a 3) b 4) a 5) b

Ej.2-02
$f\,(3)=1$; $\lim\limits_{x\to 3}(4-x)=1$
$\nexists f(2)$; $\lim\limits_{x\to 2}\left(\ \frac{1}{x-2}\ \right)=\infty$
$\nexists f(5)$; $\nexists \lim\limits_{x\to 5}\left(\frac{|x-5|}{x-5}\right)$
$\nexists \lim\limits_{x\to 0}\left[cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]$
$\nexists f\left(\frac{\pi}{2}\right)$; $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} tg\ x=\infty$
$f(1)=1$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$

Ej.2-03
a)3 b) 1 c) -1

Ej.2-04
$\boldsymbol{a})\ k=2n\,, n\in\mathbb{Z}$; $\nexists f(\frac{\pi}{2})$; **b)** $k=128\ \ f(3)=32$

Ej.2-05
$a=\ 3\ \ b=\frac{1}{4}$

Ej.2-06
$\boldsymbol{a})\ 8$ **b)** $\frac{3}{8}$ **c)** 0 **d)** 1 **e)** 0 **f)** $\frac{\pi}{6}$

Ej.2-07
a) Si; **b)** No; **c)** Si, en $x=0+k\pi$

Ej.2-08
a) q =81 **b)** q =2

Ej.2-09
a) 2; **b)** 5; **c)** 12; **d)** 3; **e)** 9/7, **f)** 2a g) 0 ; **h**) $\frac{\sqrt{6}}{6}$; **i)** $\frac{1}{2}$; **j)** $\frac{9}{8}$;**k)** 12

Ej.2-10

a) 1; **b)** 1; **c)** 1

Ej.2-11

$\boldsymbol{a})\ \frac{6}{5}$; $\boldsymbol{b})\ \frac{5}{3}$; $\boldsymbol{c})\ 1$; $\boldsymbol{d})\ 0$; **e)** $-3(\pi+2)$; **f)** -4; **g)** $\frac{1}{6}$; **h)** $si\ m>r: L=0$;
$si\ m<r: L=\infty; Si\ m=r: L=\frac{p^m}{q}$

Ej.2-12
a) $\nexists\, L$(L_d =1; L_i = -1); **b)** $\nexists\, L$(L_d =0,5; L_i = -0,5); **c)** $\nexists\, L$(L_d =3; L_i = -3).
d) $\nexists\, L$(L_d =0; L_i = 2); **e)** $\nexists\, L$; **f)** $\nexists\, L$

Ej.2-13

a) -∞; **b)** + ∞; **c)** + ∞; 0; **d)** $\frac{3}{e-1}$; **e)** $\frac{-\pi}{2}$; **f)** -1; **g)** + ∞; 0; **h)** - ∞; **i)** + ∞, - ∞; **j)** 0; 2

Ej.2-14

1) (a, c, d, e, f) 2) (b, c, d, e) 3) (a, f) 4) (b, c, d, e) 5) (a, c, d, e) 6) (a)

Ej.2-15

Grupo A: a) 8/3 b) ∞ c) ∞ ; d) 0
Grupo B: a) 1 b) 2 c) si x → +∞: $L = 1$; sí x → −∞: $L = -1$; d) 1
Grupo C: a) ¼ b) 2 c) ½ d) $x \to +\infty = \frac{1}{10}; x \to -\infty = 5/4$

Ej.2-16

a) 15; **b)** $m = 6;\ m = -5$; **c)** *i)* a= -1; b= 1; $ii)\ a = 1,\ b = 0$

Ej.2-17
a) e^2 **b)** e **c)** $e^{-\frac{3}{2}}$ **d)** $e^{\frac{3}{5}}$ **e)** e^{-2} **f)** $e^{\frac{1}{2}}$ **g)** $e^{\frac{2}{9}}$ **h)** $e^{\frac{a}{b}}$

Ej.2-18

1) a) 0,4 millones=400000 bacterias b) Se estabiliza en 2 millones de bacterias.
2) a) 40 unidades, 60 unidades b) 120 unidades ;3**)** a) N (5) = 166 ciervos; N (10) =250 ciervos b) 750 ciervos

Ej.2-19

a) AV. $x = 3;\ x = -3$; AH. $y = 1$; **b)** AV. $x = \frac{1}{2}$; AO. $y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$ **; c)** AH. $y = 0$ **d)** A.V. $x = 0$; A. O. $y = -x$; **e)** A.V. $x = 0$; A.H. $y = 0$; f) A.H. y=-1; A.O. y=x g**)** A.V $x = 4$; A.H $y = 2$; $y = -2$

Ej.2-20

1) A cargo del estudiante, la respuesta no es única. **2)** a=5, b=4, f es disc. Esencial en x=1; **3)** a=2; k=3; la otra asíntota es Vertical: $x = 5$;**4)** a=3; b=-13; c=-4; **5)** $a = -16\ ; b = -8$; **6**) a=1

Ej.2-21 A cargo del estudiante, la respuesta no es única.

Ej.2-22
a) disc. esenc. en x =1 y en x =-1; b**)** disc. esenc. en x =-3 y evit. en x =3

c) disc. evit. en x =5; d**)** disc. esenc. en x = -2; e**)** disc. esenc. en x = 1
f) disc. esenc. en x=0, salto infinito; **g)** continua en **R**; **h)** disc. evit. en x = 1;
i**)** continua en **R**.

Ej.2-23

a) $a = 2$ ó $a = -1$; b) $a = -3$ y $b = 4$; c) $a = -8$; d) No existe; e) $a = 3$; f) $b = 6$

EJERCICIOS INTEGRADORES

Ej.1
a) i) Verdadero. ii) Falso. b) Falso c) Falso
d) Falso. e) Falso. f) Falso, no aclara que los límites laterales sean iguales.
g) Verdadero. h) Verdadero. i) Falso

Ej.2
a) $k = \pm\frac{\sqrt{15}}{15}$ b) $k = 1$ ó $k = -4$

Ej.3
a) a = 5/3, b = −4/3.

Ej.4
a) S (2) =448 pies S (6) =960 pies. b) 128 pies/seg. c) Vm=160-16h
d) -256 pies/seg e) 1024 pies f) 16 seg

Ej.5

$$f(x)\begin{cases} 4\,sen\,x & 0 \le x < \frac{3}{2}\pi \\ \frac{4}{7-\frac{3}{2}\pi}x - \frac{28}{7-\frac{3}{2}\pi} & \frac{3}{2}\pi \le x \le 7 \\ -\frac{1}{4}(x-7)(x-15) & 7 < x \le 15 \end{cases}$$

Ej.6
a) Dominio de la función $\mathbf{R} - \{-4\}$. Según el problema t≥ 0
b) AH, un operario con experiencia produce 120 piezas por hora. AV no tiene sentido en términos del problema