PRODUCTO ESCALAR

Definición y sus aplicaciones

)

Producto Escalar

Lo podemos definir también como la herramienta que nos permite calcular el ángulo entre dos vectores, distintos del vector nulo, con origen común.

Definición

El producto escalar es una operación entre dos vectores del plano o del espacio.

Sean $\bar{a} \in \mathbf{R}^3$ y $\bar{b} \in \mathbf{R}^3$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \, cos\hat{\alpha}$$

Ejemplo:

Calcular el producto escalar entre : $\bar{u} = (2,1,-3)$ $\; y \; el \; versor \; \check{J}$

$$\bar{u} \cdot \check{j} = |\bar{u}||\check{j}| \cos \hat{\alpha}$$

$$\bar{u} \cdot \check{j} = \sqrt{14} \;\; 1 \cos \hat{\alpha}$$

¿Cómo calcular el cosα? Podemos usar, **en este caso particular**, cosenos directores

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\bar{u} \cdot \hat{j} = \sqrt{14} \;\; 1 \;\; \frac{1}{\sqrt{14}} = 1$$

Propiedades :

Propiedades para el producto escalar de dos vectores

P.1 $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall \vec{b} \in \mathbf{R}^3,\ \vec{a}\cdot\vec{b} \in \mathbf{R}$

P.2 $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3,\ \vec{a}\cdot\vec{a} \in \mathbf{R}_{\geq 0} \wedge \vec{a}\cdot\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$. En particular, $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$

P.3 Propiedad conmutativa: $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall \vec{b} \in \mathbf{R}^3,\ \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

P.4 Prop. distributiva con respecto a la suma: $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall \vec{b} \in \mathbf{R}^3, \forall \vec{c} \in \mathbf{R}^3,\ \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

P.5 Propiedad asociativa: $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall \vec{b} \in \mathbf{R}^3, \forall \lambda \in \mathbf{R},\ \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$

P.6 $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3,\ \vec{a}\cdot\vec{0} = \vec{0}\cdot\vec{a} = 0$

P.7 $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3, \forall \vec{b} \in \mathbf{R}^3,\ \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\overset{\angle}{(\vec{a},\vec{b})}$

P.8 $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3 - \{\vec{0}\}, \forall \vec{b} \in \mathbf{R}^3 - \{\vec{0}\},\ \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$. Condición de perpendicularidad

P.9 $\forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3 - \{\vec{0}\}, \forall \vec{b} \in \mathbf{R}^3 - \{\vec{0}\},\ \mathrm{Proy}_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\overset{\angle}{(\vec{a},\vec{b})}\,\hat{b} \Rightarrow \mathrm{Proy}_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\hat{b} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\vec{b}$

P 7 El producto escalar entre dos vectores es igual a la suma de los productos entre las componentes homólogas

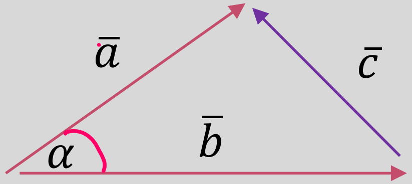
H

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

T

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

D



$$\bar{a} = \bar{b} + \bar{c}$$
$$\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$$
$$\bar{c} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

Aplico Teorema del coseno: $$|\bar{c}|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - \underbrace{2|\bar{a}||\bar{b}|cos\hat{\alpha}}_{\bar{a} \cdot \bar{b}}$$

$$2\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - [a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2 + a_3^2 - 2a_3b_3 + b_3^2]$$

Cancelando: $2\bar{a} \cdot \bar{b} = 2a_1b_1 + 2a_2b_2 + 2a_3b_3$

$$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

P8 si el producto escalar entre dos vectores, distintos del vector nulo es igual a 0, sí y solo sí son perpendiculares

H $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \;\; si \; \bar{a} \neq \bar{0} \;\wedge \bar{b} \neq \bar{0}$

T $\bar{a} \perp \bar{b}$

D $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$

$|\bar{a}|\,|\bar{b}| \cos \hat{\alpha} = 0$

$\neq 0$ $\neq 0$

$\cos \hat{\alpha} = 0$

$\hat{\alpha} = 90^0$

$$\boxed{\bar{a} \perp \bar{b}}$$

H $\bar{a} \perp \bar{b}$

T $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$

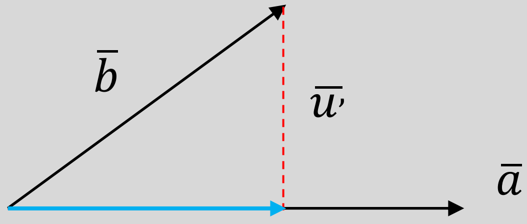
D $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \cos \hat{\alpha}$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \underbrace{\cos 90^0}_{= 0}$

$$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} = 0}$$

P 9 APLICACIÓN GEOMÉTRICA

Proyección de un vector sobre la dirección de otro



$$\bar{u} = Proy\,\bar{b}_{\bar{a}} = \lambda \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$$

$\bar{b} = \bar{u} + \bar{u}'$ Multiplico m. a m. por el vector $\bar{a}$

$$\bar{b} \cdot \bar{a} = (\bar{u} + \bar{u}') \cdot \bar{a}$$

$\bar{b} \cdot \bar{a} = (\bar{u} \cdot \bar{a}) + \underbrace{(\bar{u}' \cdot \bar{a})}_{=0}$ Propiedad distributiva

$$\bar{b} \cdot \bar{a} = \bar{u} \cdot \bar{a}$$

Reemplazo a $\bar{u} = \lambda \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$

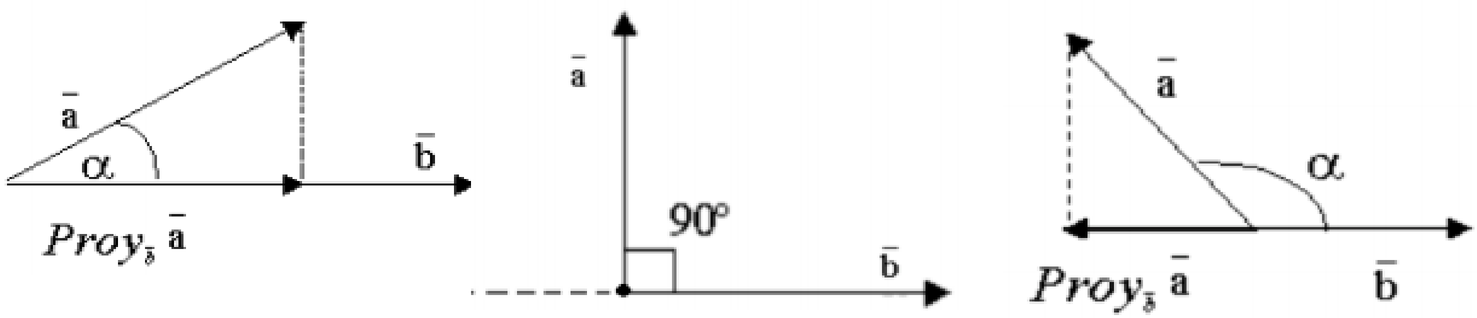
$$\bar{b} \cdot \bar{a} = \lambda \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} \cdot \bar{a} \quad = \lambda\, |\bar{a}|^2 / |\bar{a}|$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{\bar{b} \cdot \bar{a}}{|\bar{a}|}$$

$$Proy\,\bar{b}_{\bar{a}} = \left(\frac{\bar{b} \cdot \bar{a}}{|\bar{a}|}\right) \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$$

$$\boxed{Proy\,\bar{b}_{\bar{a}} = \frac{\bar{b} \cdot \bar{a}}{|\bar{a}|^2}\, \bar{a}}$$

$0 \leq \alpha < \pi/2$ | $\alpha = \pi/2$ | $\pi/2 < \alpha \leq \pi$



Sentido de $Proy_{\bar{b}}\,\bar{a}$ igual al sentido de $\bar{b}$

$Proy_{\bar{b}}\,\bar{a} = \bar{0}$ ($\bar{a}$ y $\bar{b}$ perpendiculares)

Sentido de $Proy_{\bar{b}}\,\bar{a}$ opuesto al sentido de $\bar{b}$

EJEMPLO:

Ejercicio 1

Siendo $\bar{u}$ y $\bar{v}$ tales que: $(\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v})=17$ y $|\bar{u}|=9$

Calcular el módulo del vector $\bar{v}$.

Ejercicio 2

Sean los vectores $\bar{a}=(1,-1,2)$ y $\bar{b}=(0,1,m)$ $m \in R$

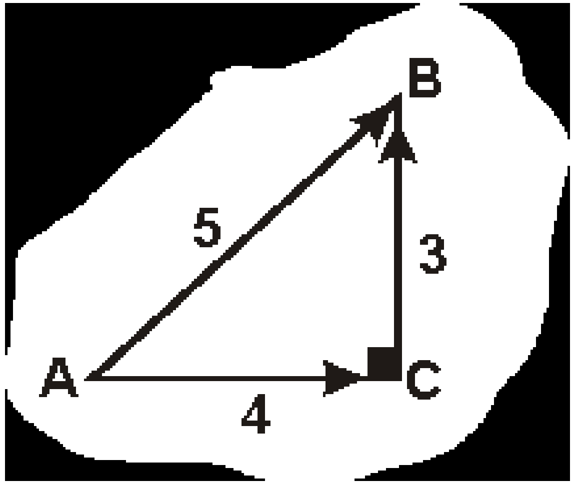
a) Hallar el valor de *m* para que los vectores formen un ángulo de 30º

Ejercicio 3

Los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ forman entre sí un ángulo de **60°** y el módulo de $\vec{\mathbf{A}}$ vale **3**, hallar el módulo de $\vec{\mathbf{B}}$, para que $\vec{\mathbf{A}}-\vec{\mathbf{B}}$ sea perpendicular a $\vec{\mathbf{A}}$.

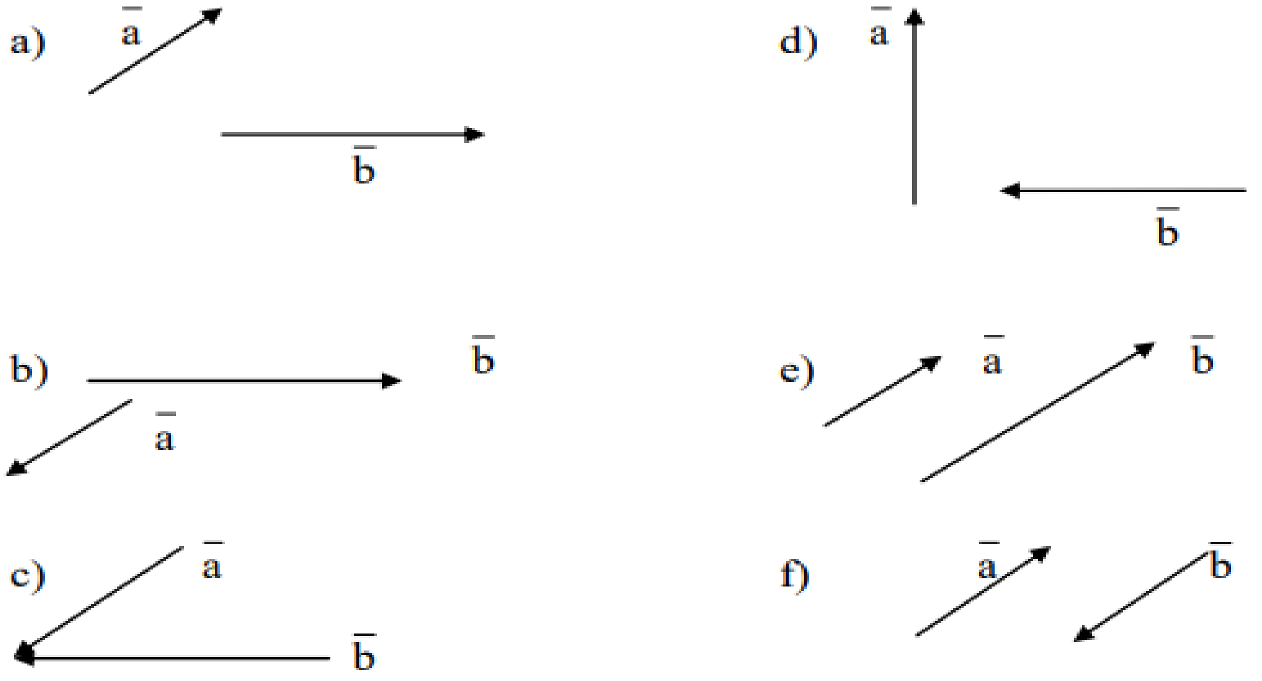
Ejercicio 4

Tomando como base los lados del triángulo **ABC**, se establecen los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{CB}$. Sumando los tres vectores.¿Cuál será el módulo y el ángulo de inclinación del vector resultante con respecto al vector $\overrightarrow{AC}$?



Ejercicio 5

1) Dibuja el vector proyección de a sobre b en los siguientes casos:



2) Si la componente escalar del vector proyección de $\bar{a}$ sobre $\bar{b}$ es $\sqrt{2}$ y el módulo de $\bar{a}$ es 2, ¿ qué ángulo forman $\bar{a}$ y $\bar{b}$?