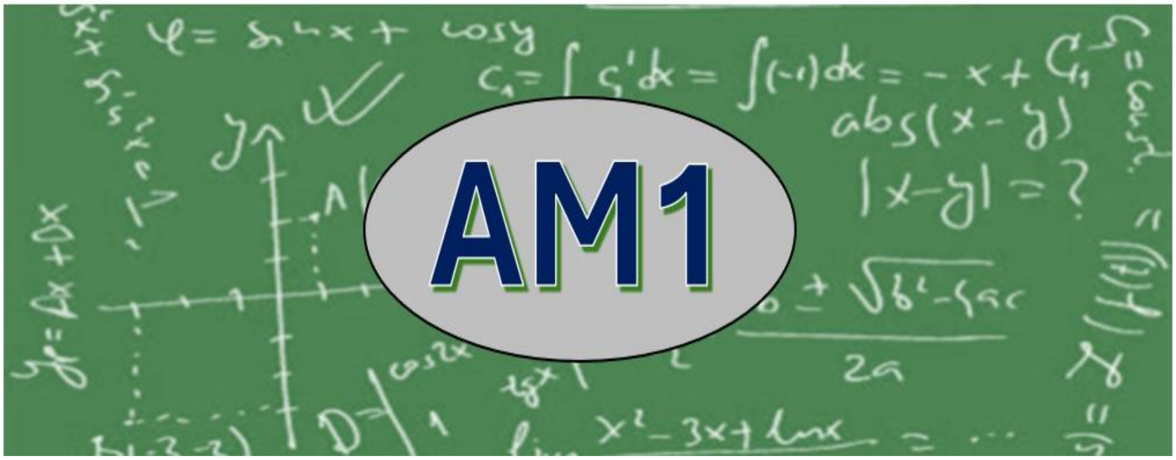


TRABAJO PRÁCTICO N°1: FUNCIONES REALES

ANÁLISIS MATEMÁTICO 1

MATERIAS BÁSICAS

UTN – Facultad Reg. Haedo

BIOINGENIERIA- 1 18/1 2/ 1 6-1 K

TRABAJO PRÁCTICO 1: FUNCIONES REALES

COMPETENCIAS

- Identificar, formular y resolver situaciones problemáticas que involucren distintos tipos de funciones.
- Utilizar de manera efectiva las técnicas y herramientas de la ingeniería
- Aprender en forma continua y autónoma
- Comunicar con efectividad

Ej.1: Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones, expresar el conjunto solución con notación de intervalos

$a) x^2 - 2x = 0$ b) $\dfrac{3x+1}{x+1} + x = 1$ c) $0 = \frac{|x+1|}{x^2-1}$ a) $-|x+3| + 2 = 0$

e) $2e^{x+1} = 2$ f) $\ln(x^2+1) - \ln x^2 = 0$ g) $\ln|2x+1| = 0$ $h)\sqrt{2x-1} - x = 0$

$i)\ \dfrac{-x-9}{x+5} \geq 1$ $j)\ \dfrac{3x^3 - 6x}{x} < 0$ $k)\ 9 - x^2 < 0$ $l)\ \left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 - 1 > 0$

$m)\ |x^2 - 1| \leq 0$ $n)\ \sqrt{2x-1} - x < 0$ o) $\ln(2x+1) > 0$ p) $2e^{x+1} - 2 < 0$

$q)|2 - x| - 15 \geq 0$

Respuestas:

a) x= 2 , x=0 **b)** -3 y 0 **c)** $\emptyset$ **d)** -5 y -1 **e)** -1 **f)** $\emptyset$ **g)** -1, 0 **h) 1**

i) $\{-7 \leq x < 5\} = [-7; 5)$

j) $\{-\sqrt{6} < x < 0 \ \vee 0 < x < \sqrt{6}\} = (-\sqrt{6}\ ; 0) \cup (0; \sqrt{6})$

k) $\{x < -3 \ \vee x > 3\} = (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$

l) $\left\{x > \frac{7}{2} \vee x < \frac{3}{2}\right\} = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$

m) x= -1, x=1

n) $\left\{\frac{1}{2} \leq x < 1 \ \vee x > 1\right\} = \left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$

o) $\{x > 0\} = (0;\ +\infty)$

p) $\{x < -1\} = (-\infty; -1)$

q) $\{x \leq -13 \ \vee x \geq 17\} = (-\infty; -13] \cup [17; +\infty)$

Ej.2- Graficar las funciones y obtener analíticamente la intersección de sus gráficas

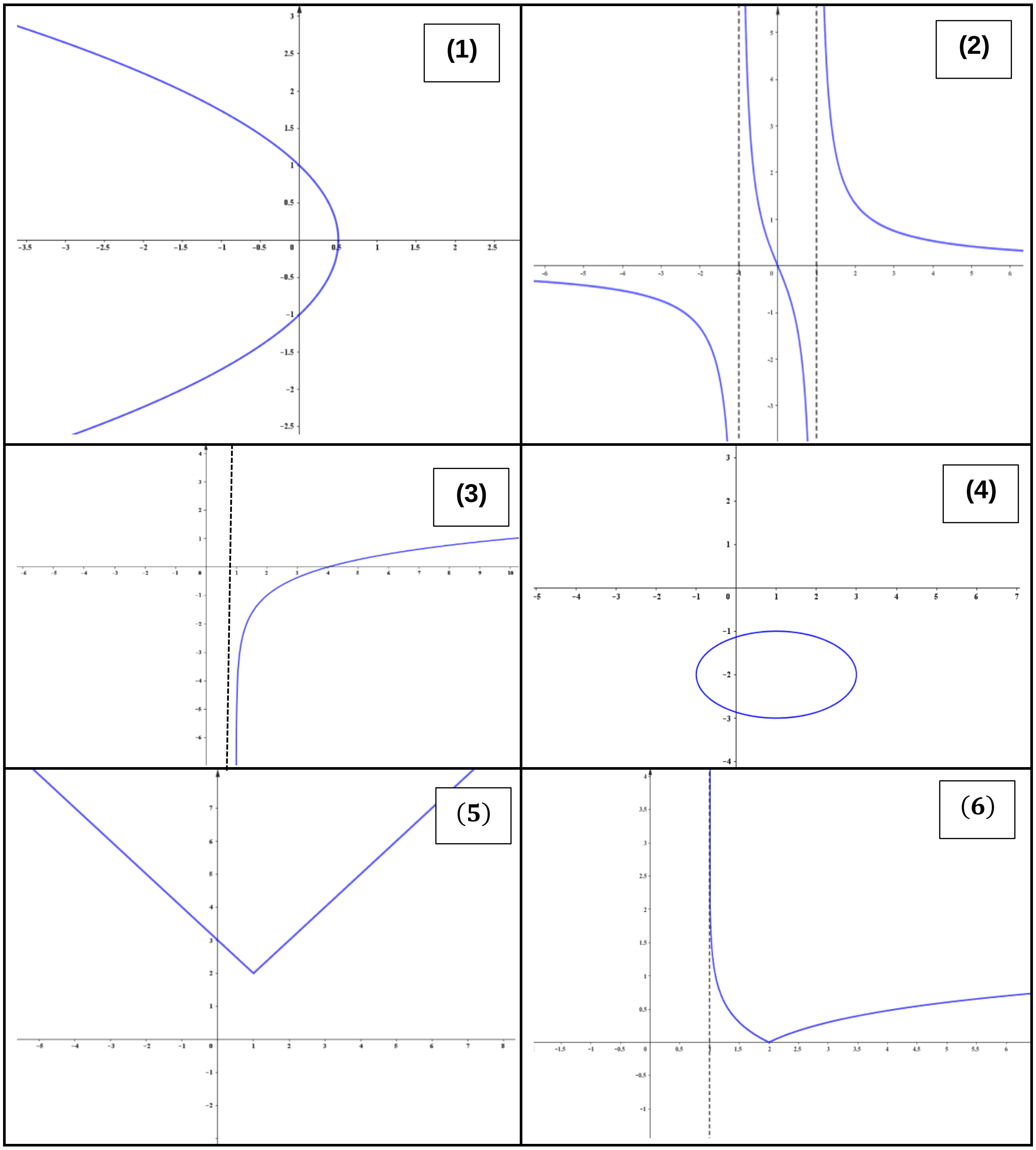
a) $\begin{cases} y = 3x^2 - 5x + 4 \\ y = -5x - 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 3x^3 + 4 \\ y = -x^2 - 2x \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 2 \\ y = e^x - 1 \end{cases}$

Respuestas:

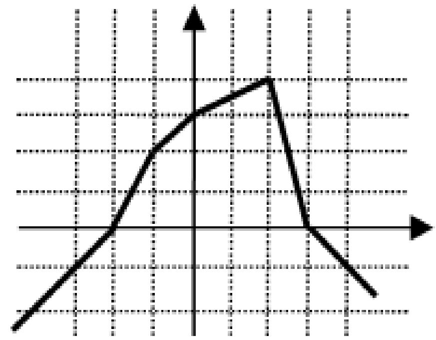
a) $\emptyset$ **b)** (-1; 1) **c)** (ln 3; 2)

CONCEPTO DE FUNCIÓN-DOMINIO, IMAGEN, RAÍCES, GRÁFICO, BIYECTIVIDAD, FUNCIÒN INVERSA, PARIDAD, DESPLAZAMIENTOS

Ej.3-Observando las siguientes gráficas, reconocer las que corresponden a función y establecer su: dominio, imagen, Intersección con los ejes coordenados, intervalos de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y decrecimiento.



Ej.4-Observando la gráfica de una función f responder:



a) $f\,(2) = ...\quad f\,(-1) = \cdots.\quad f\,(0) = ...\ f(3) = \cdots$
b) Determinar analíticamente la variación de f con respecto a la variación en x en el intervalo $[-1{,}2]$y $[0{,}3]$. Representar e interpretar dicha variación.
c) Encontrar {x $\epsilon\mathbb{R}$ / $f(x) = 0$}
d) Encontrar {x $\epsilon\mathbb{R}$/$f(x) = 4$}
e) Establecer {x $\epsilon\mathbb{R}$/$f(x) > 0$}
f) Establecer {x $\epsilon\mathbb{R}$/$f(x) < 0$}
g) Encontrar las preimágenes de -1 y la imagen de 3.

Respuestas:

b) $\Delta f/\Delta x$=2/3; $\Delta f/\Delta x$ =-1 **c)** x= -2; x=3 **d)** x= 2 **e)** (-2; 3) **f)** $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$ **g)** f (4) =-1 f (-3) =-1; f (3) =0

Ej. 5- Resolver los siguientes problemas de aplicación:

1) Para construir una caja sin tapa, se cortan cuadrados de x cm de lado en las cuatro esquinas de un cartón de 10cm de ancho por 8cm de largo, y se doblan los lados.
(a)Expresar la función A (x), área de la base.
(b)Expresar la función V (x), volumen de la caja.
(c)Realizar la gráfica para cada función e indicar dominio e imagen en cada caso, en el contexto del problema.
Respuestas:
a) A(x) = $4x^2 - 36x + 80$ **b)** V(x) = = $4x^3 - 36x^2 + 80$x

2) De acuerdo con la fórmula $\boldsymbol{p(d) = k\,d + 1}$; donde $\boldsymbol{k}$ es una constante, la presión $\boldsymbol{p}$ que experimenta un buzo bajo el agua (en unidad de atmósferas) está relacionada con la profundidad $\boldsymbol{d}$ a la que se encuentra (en metros). La presión es de 1 atmósfera en la superficie; a 100 metros es, aproximadamente de 10,94 atmósferas (considerando que ese valor es la profundidad mayor que puede un buceador alcanzar para no tener apnea). Responder:

a) ¿Cuál es la variable dependiente e independiente en la situación planteada?
b) Determinar la función $\boldsymbol{p(d)}$ que brinda la presión a la que está sometido el buzo en función de la profundidad donde se encuentra hasta ese nivel. Hallar el dominio y la imagen de esta función de acuerdo con el contexto del problema.
c) Determinar la presión del buzo a los 50 metros de profundidad.
d) ¿Cuál es la variación de la presión en el intervalo de profundidad [50, 100]?
e) ¿Cuál es la variación de la presión cada 50 metros?

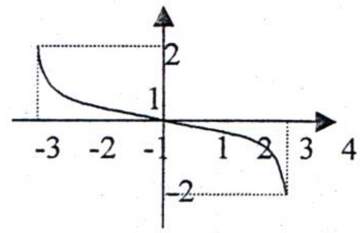
Respuestas: b) $p(d) = 0{,}0994\ d + 1$; c) 5,97 atm; d) $\Delta P = 4{,}97$ atm

BIYECTIVIDAD – FUNCIÓN INVERSA

Ej.6- Responder:

Según la gráfica de f(x): [-3,3] → [-2,2],

- ¿Cuál es el dominio y la imagen?
- ¿Por qué es biyectiva?,
- Estimar el valor de $f^{-1}(2)$
- Realizar la gráfica de $f^{-1}(x)$ considerando la simetría con respecto a y=x



Ej.7- a) Determinar dominios e imágenes apropiados para que las siguientes expresiones representen funciones biyectivas.
b) Hallar las correspondientes funciones inversas dando sus dominios e imágenes.

$a)\ f(x) = \sqrt{x-1}$ $\quad b)\ g(x) = x^3 - 2$ $\quad c)\ h(x) = |x+1|$ $\quad d)\ j(x) = (x-1)(x+1)$

$e)\ y = 2x - 1$ $\quad f)\ y = \dfrac{x+1}{x}$ $\quad g)\ y = ln(x-1)$ $\quad h)\ y = \sqrt{9 - x^2}$

Respuestas:

a) Df=$[1;+\infty)$; $If = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
b) Df = $\mathbb{R}$; If= $\mathbb{R}$
c) Df=$\mathbb{R}$;$If = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
d) Df = $\mathbb{R}$; If = $[-1;+\infty)$
e) Df = $\mathbb{R}$; If=$\mathbb{R}$
f) Df = $\mathbb{R} - \{0\}$; If= $\mathbb{R} - \{1\}$
g) Df= $(1; +\infty)$; If= $\mathbb{R}$
h) Df= $[-3; 3]$

Ej.8- a) Determinar analíticamente cuáles de las siguientes funciones son pares o impares.
b) Indicar, la simetría de cada curva en relación con su paridad.

a)$f_1(x) = 4 - x^2$ $\quad$ b)$f_2(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad$ c)$f_3(x) = -\sqrt{4 - x^2}$ $\quad$ d) $f_3(x) = -(x-1)^2$
e)$f_4(x) = x^3$ $\quad$ f)$f_5(x) = \frac{1}{x}$ $\quad$ g) $f_6\ (x) = \frac{3}{x^2}$

Respuestas:

a) Par **b)** Impar **c)** Par **d)** No tiene paridad **e)** Impar
f) Impar **g)** Par

Ej.9- Dadas las funciones: a) $f(x) = \sqrt{x+3}$, b) $f(x) = (x-1)^2$, c) $f(x) = ln\ x$,realiza sus gráficas y dibuja las curvas generadas por las siguientes transformaciones:

a) $y = f(x) + 2$ $\quad$ c) $y = f(x) - 2$ $\quad$ e) $y = f(x+2)$
b) $y = f(x-5)$ $\quad$ d) $y = -f(x)$ $\quad$ f) $y = f(-x)$

FUNCIONES ALGEBRAICAS ENTERAS

Ej.10- Hallar el valor de k para que se verifiquen las siguientes condiciones

a) $kx + 2y = 3$ y $f(-2) = 3$
b) $y = \frac{-1}{6}x + \frac{k}{3}$ y abscisa al origen igual a $\frac{1}{2}$
c) $x - 2ky + 2 = 0$; ordenada al origen -2

d) $y = (5k-1)x$; paralela a $3x - 2y = 10$
e) $y = (k^2-3)x^2 - kx + k - 1$ tenga vértice en (1;0)
f) $\begin{cases} y = k^2x^2 + (k-2)x + 1 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$ se intersectan en (0;1) y (-1;3)
g) La rectas de ecuación $y = 8kx + 3$ e $y = k^2x - 2$ son perpendiculares

Respuestas: **a)** k= 3/2 **b)** k= 1/4 **c)** k= -1/2 **d)** k= 1/2 **e)** k=2 **f)** k= 1 **g) k = -1/2**

FUNCIÓN IRRACIONAL, MÓDULO, EXPONENCIAL y LOGARITMICA

Ej. 11- Determinar el dominio, las intersecciones con los ejes e intervalos de positividad y negatividad de cada una de las siguientes funciones. Utilizar los datos obtenidos para representar gráficamente.

a) $y = \sqrt{x-1}$ b) $y = \sqrt{1-x^2}$ c) $y = -\sqrt{x^2+1} - 3$
d) $f(x) = \log_2(x^2+3)$ e) $g(x) = \log_5(x-2) + 1$
f) $h(x) = \log(1-x^2)$ g) $i(x) = 2\ln(-x)$ h) y= $-3|x-1| + 6$

Respuestas:

Dominio	**Intersección con el eje x**	**Intersección con el je y**	**C⁺**	**C⁻**
a) $[1; +\infty)$	(1;0)	No tiene	$(1; +\infty)$	$\emptyset$
b) $[-1; 1]$ **c)** $\mathbb{R}$ **d)** $\mathbb{R}$ **e)** $(2; +\infty)$ **f)** $(-1; 1)$ **g)** $(-\infty; 0)$ **h)** $\mathbb{R}$	(-1;0) y (1;0) No tiene No tiene (2,2; 0) (0;0) $(-1; 0)$ (3; 0) y (-1;0)	(0;1) (0; -4) $(0; \log_2 3)$ No tiene (0;0) No tiene (0; 3)	$(-1; 1)$ $\emptyset$ $\mathbb{R}$ $(2,2; +\infty)$ $\emptyset$ $(-\infty; -1)$ (-1;3)	$\emptyset$ $\mathbb{R}$ $\emptyset$ $(-\infty; 2,2)$ $(-1,0) \cup (0;1)$ $(-1; 0)$ $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$

Ej. 12-

a) Dibujar con GeoGebra las siguientes funciones exponenciales, indicando su dominio e imagen.

a₁) $y = 3^x$ a₂) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ a₃) $y = e^x$ a₄) $y = e^{-x}$ a₅) $y = 4^x - 2$ a₆) $y = 2^x + 1$

b) Encontrar la función exponencial $f(x) = C.a^x$ (con a>0), tal que la gráfica de esta pasa por los puntos (1,6) y (3,24).

Respuestas: a= 2; C = 3

Ej.13-: Resolver los siguientes problemas de aplicación

1) Un elemento radiactivo decae de tal manera que, después de t días, el número de N miligramos presentes, está dado por: $N(t) = 100\, e^{-0.062t}$
a) ¿Cuántos miligramos están presentes inicialmente?
b) ¿Cuántos miligramos están presentes después de 10 días?

2) La sangre es una disolución reguladora. Cuando el dióxido de carbono es absorbido en los flujos de sangre, esta produce ácido carbónico y reduce los niveles de pH. El cuerpo compensa produciendo bicarbonato, que es una base débil, para neutralizar el ácido.
La ecuación Henderson-Hasselbach puede ser usada para calcular el pH de una disolución reguladora: $pH = 6.1 + \log\left(\frac{800}{x}\right)$, donde x es la presión parcial del dióxido de carbono en las arterias, medida en torr.
Encontrar la presión parcial del dióxido de carbono en las arterias si es que el pH es 7.2

3) La rapidez a la que se carga una batería es más lenta cuanto más cerca está la batería de su carga máxima C_0. El tiempo (en horas) necesario para cargar una batería completamente descargada a una carga C está dado por:

$$t = -k \ln\left(1 - \frac{C}{C_0}\right)$$

donde k es una constante positiva que depende de la batería. Para cierta batería, k=0.25. Si esta batería está completamente descargada, ¿cuánto tomará cargarla al 90% de su carga máxima C_0?

Respuestas:

1) a) N (0) =100 mg; b) N (10) =53.8mg 2) $x = 63{,}55$ 3)$t = 0.575646\ horas$

FUNCIONES ALGEBRAICAS HOMOGRÁFICAS

Ej.14- a) Verificar si las siguientes funciones son homográficas. b) Descomponerlas en la suma de una parte entera más otra fraccionaria. c) Determinar el dominio, intersección con los ejes coordenados, intervalos de positividad y negatividad, asíntotas vertical y horizontal. Graficar

$(a)\ y = \frac{3x+2}{x+1}$ $(b)\ y = \frac{-4x-1}{2x-3}$ $(c)\ y = \frac{x}{-3x-1}$ $(d)\ y = \frac{x-1}{x}$

Respuestas:

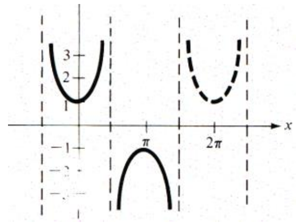
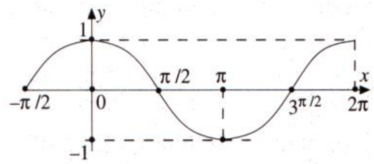
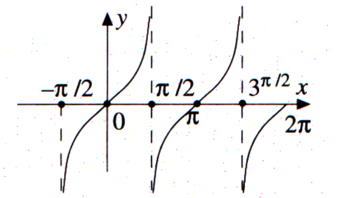
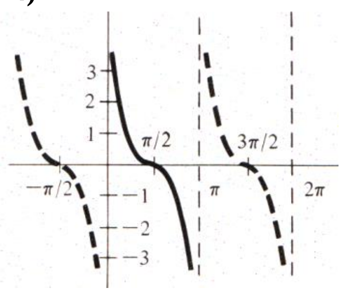
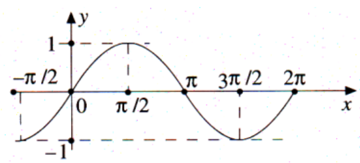
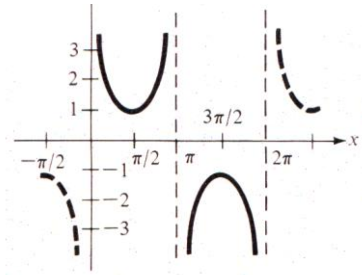
Dominio	Intersección con ejes	Intervalos de positividad y negatividad	Asíntotas
a) $\mathbb{R} - \{-1\}$	x=-2/3; y= 2	$C^+ = \left(-\frac{2}{3};\ +\infty\right) \cup (-\infty;\ -1)$; $C^- = (-1;\ -2/3)$	AV: $x = -1$; AH: $y = 1$
b) $\mathbb{R} - \{3/2\}$	x= -1/4; y= 1/3	$C^+ = (-1/4;\ 3/2)$; $C^- = (3/2;\ +\infty) \cup (-\infty;\ -1/4)$	AV: $x = 3/2$; AH: $y = -2$
c) $\mathbb{R} - \{-1/3\}$	x= 0; y= 0	$C^+ = (-1/3;\ 0)$; $C^- = (0;\ +\infty) \cup (-\infty;\ -1/3)$	AV: $x = -1/3$; AH: $y = -1/3$
d) $\mathbb{R} - \{0\}$	x=1; $\nexists f(0)$	$C^+ = (0;\ +\infty) \cup (-\infty;\ 0)$; $C^- = (0;\ 1)$	AV: $x = 0$; AH: $y = 1$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS CIRCULARES

Ej. 15-Emparejar las ecuaciones de las siguientes funciones circulares con las gráficas correspondientes, escribir en cada caso dominio, imagen, raíces o ceros, polos, paridad y asíntotas. Definir la función inversa de cada una, su dominio e imagen y esbozar su gráfica.

a) y = sen x b) y = cos x c) y = tg x

d) y = cosec x   e) y = sec x   f) y = cotg x

 1)	2) 	 3)
4) 	5) 	6) 

<u>Ej.16-</u> Graficar las siguientes funciones trigonométricas determinando: dominio, imagen, amplitud (si corresponde), período, punto máximo y mínimo (si corresponde), ceros o raíces y ordenada al origen.

$(a)\ y = 2\ sen(x-\pi)-1 \quad (b)\ y = \ -cos\ (3x-\pi)+1 \quad (c)\ y = \tan(2x-\pi)$

Respuestas:

Df	If	A	Fase	Periodo	x_0	Punto máximo	Punto mínimo	Ceros
a)$\mathcal{R}$	$[-3;1]$	2	$x-\pi$	2π	π	$\left(2k\pi+\frac{3\pi}{2};1\right)$	$\left(2k\pi+\frac{\pi}{2};-3\right)$	$\frac{7}{6}\pi+2k\pi;$ $\frac{11}{6}\pi+2k\pi$
b)$\mathcal{R}$	$[0;2]$	1	$3x-\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{2}{3}k\pi+\frac{\pi}{3};2\right)$	$\left(\frac{2}{3}k\pi+\frac{\pi}{3};0\right)$	$\frac{2}{3}k\pi+\frac{\pi}{3}$
c) $\mathcal{R}-\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right\}$	$\mathcal{R}$		$2x-\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	No tiene	No tiene	$\frac{\pi}{2}k$

<u>Ej.17-</u> Determinar analíticamente el dominio de las siguientes funciones:

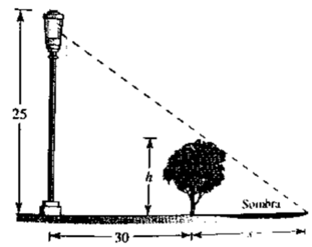
$a)\ y = arcsen(2x+1) \qquad b)\ y = arccos\ (2x^2-x) \qquad c)\ y = \arctan\ \left(\frac{1}{x+1}\right)$

Respuestas:

a) $[-1; 0]$ b) $[-1/2; 1]$ c) $(-\infty;\ -1) \cup (-1; +\infty)$

Ej.18- Resolver los siguientes problemas de aplicación:

1) Un árbol se planta a 30 pies de la base de un poste de luz que mide 25 pies de altura. Expresar la longitud de la sombra del árbol como una función de su altura.



2) Suponga que la función: $T(t) = 50 + 10\, sen\left[\frac{\pi}{12}(t-8)\right]$ con $0 \leq t \leq 24$, es un modelo matemático de la temperatura Fahrenheit a las t horas después de medianoche durante cierto día de la semana.
   i) ¿Cuál es la temperatura a las 8 a.m.?
   ii) ¿A qué hora(s) se cumple T(t)=60?
   iii) ¿A qué hora(s) se cumple T(t) = 0?
   iv) Encontrar las temperaturas máxima y mínima, y los horarios en que ocurren.
   v) Trazar la gráfica de T.

Respuestas:

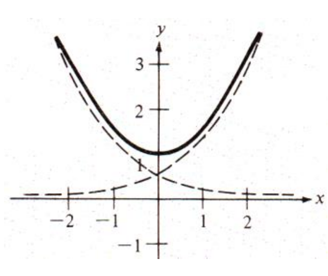
1) $s(h) = \frac{30h}{25-h}$, con $0 < h < 25$; 2) i)$T(8) = 50$ F; ii) $t = 14\ hs$; iii) En ningún momento; iv) Mínima$(2; 40)$, Máxima $(14; 60)$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS HIPERBÓLICAS

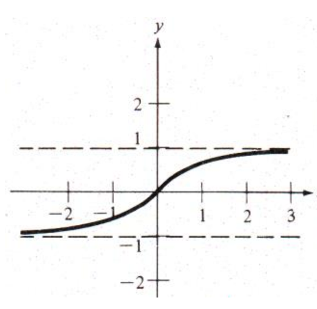
Ej. 19- Emparejar las ecuaciones de las siguientes funciones hiperbólicas con las gráficas correspondientes. Escribir en cada caso dominio, imagen, raíces o ceros y paridad. Definir la función inversa de cada una y esbozar su gráfica considerando su simetría con respecto al eje y=x

a) $y = Sh$ x = $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ b) $y = Ch\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ c) $y = Th\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

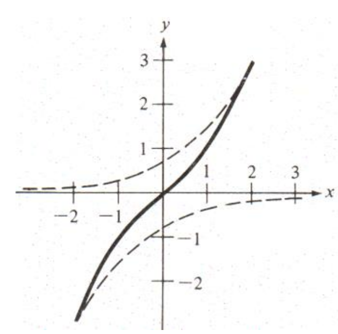
1)



2)



3)



Ej. 20-

a) **Expresar las funciones $Arg\ Sh\ x$ y $Arg\ Ch\ x$ en términos de funciones logarítmicas.**

b) **Si $Sh\ x = -1/2$, encuentre los valores del $Ch\ x$ y $Th\ x$.**

c) **Si $Ch\ x = 3$, encuentre los valores de las funciones $Sh\ x$ y $Th\ x$.**

Respuestas:

$(a) ArgSh\,(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ $\quad ArgCh(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$;$(b)\ Ch\,x = \frac{\sqrt{5}}{2}$;$Th\,x = \frac{-\sqrt{5}}{5}$; $(c)\ Sh\,x = 2\sqrt{2}$; $Th = \frac{2}{3}\sqrt{2}$

FUNCIONES DEFINIDAS POR INTERVALOS

Ej. 21- Realizar el gráfico de las siguientes funciones

a) $f(x) = \begin{cases} -2 & si\ x \leq -3 \\ x & si\ x \in (-3,2] \\ -x & si\ x > 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2+4x-1 & si\ |x| < 2 \\ -4 & si\ |x| \geq 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+4}{2x-2} & si\ -4 \leq x < 1 \\ 3x+1 & si\ 1 \leq x < 3 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \leq \frac{\pi}{2} \\ sen\,x & si\ x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3.\pi}{2}\right] \\ -1 & si\ x > \frac{3.\pi}{2} \end{cases}$

Ej.22- Expresar las siguientes funciones en ramas. Indicar dominio y hallar analíticamente la intersección con los ejes coordenados, intervalos de positividad y negatividad.

a) $y = 2|x+3|$ $\quad b)\ y = \ln|x|$ $\quad c)\ y = |\ln x|$ $\quad d)\ y = |x^2-4|$

e) $y = \sqrt[3]{|x+1|} - 2$ $\quad$ f) $y = x.e^{-2|x|}$ $\quad$ g) $y = 2.\log_2|-x+1| - 4$

Respuestas:

a) $df = \mathcal{R}$; int eje x (-3,0), int eje y $(0;6)$, $C^+ = \mathcal{R} - \{-3\}$,b)$df = \mathcal{R} - \{0\}$, int eje x $(-1;0)$ y $(1;0)$, $C^+ = (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$, $C^- = (-1;1) - \{0\}$

c) df= (0; +∞), int. eje x (1;0), $C^+ = (0;\ +\infty) - \{1\}$

d) $df = \mathcal{R}$; int. eje x (2;0) y (-2;0), int. eje y (0;4), $C^+ = \mathcal{R} - \{-2,2\}$

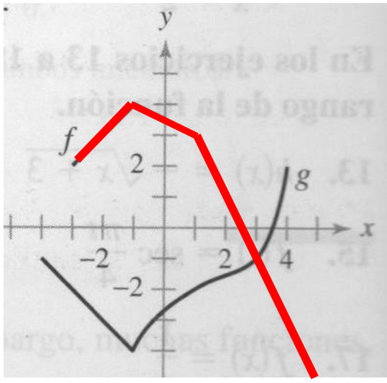
e) $df = \mathcal{R}$; int. eje x (7,0) y (-9,0), int. eje y (0,-1), $C^+ = (-\infty;-9) U (7;+\infty)$, $C^- = (-9;7)$

f) $df = \mathcal{R}$, int. eje x (0,0), int. eje y (0,0), $C^+ = (0;+\infty)$, $C^- = (-\infty;0)$

g) $df = \mathcal{R} - \{1\}$; int. eje x (-3,0) y (5,0), int. eje y (0,-4), $C^+ = (5;+\infty) \cup (-\infty,-3)$,
$C^- = (-3;1) \cup (1,5)$

OPERACIONES ENTRE FUNCIONES: SUMA, RESTA, PRODUCTO, COCIENTE, COMPOSICION

Ej.23- Utilizar las gráficas de f y g para evaluar cada expresión. Si el resultado es indefinido, explicar por qué.



a) $(f \circ g)(3)$	b) $g(f(2)$	c) $g(f(5)$
d) $(f \circ g)(-3)$	e) $(g \circ f)(-1)$	f) $(g(-1)$

<u>Ej.24</u>- Dados los siguientes pares de funciones:

a) $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$ **b)** $f(x) = \ln(-x+1)$ y $g(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x^2 - 1$ **d)** $f(x) = e^x + 1$ y $g(x) = \sqrt[3]{2x}$

(A)Encontrar las funciones que resultan de: $f + g, f - g, fg$ y $\frac{f}{g}$ y sus dominios

(B)Encontrar las funciones $h(x) = y = f\,[\,g\,(x)]$ e $t(x) = y = g\,[\,f\,(x)]$ y sus dominios. Restringir el dominio, si es necesario, para realizar la composición.

(C)Encontrar $(f+g)(4), (f-g)(4), (\,fg)(4), \left(\frac{f}{g}\right)(4), f\,[\,g\,(4)]\; y\; g\,[\,f\,(4)]$

Respuestas:

A)

	a)	b)	c)	d)
f + g	$x^2 + \sqrt{x}$ D f = $[0, +\infty)$ $(f+g)(4) = 18$	$\ln(-x+1) + \frac{1}{x}$ D f= $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$ $\nexists h(4)$	$x^2 + x$ D f = $\mathbb{R}$ $(f+g)(4)$=20	$\sqrt[3]{2x} + e^x + 1$ D f = $\mathbb{R}$ $(f+g)(4)$=$3 + e^4$
f - g	$x^2 - \sqrt{x}$ D f = $[0, +\infty)$ $(f-g)(4) = 14$	$\ln(-x+1) - \frac{1}{x}$ D f= $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$ $\nexists h(4)$	$-x^2 + x + 2$ D f = $\mathbb{R}$ $(f-g)(4) = -10$	$-\sqrt[3]{2x} + e^x + 1$ D f = $\mathbb{R}$ $(f-g)(4) = -1 + e^4$
f. g	$x^2.\sqrt{x}$ D f = $[0, +\infty)$ $(f.g)(4) = 32$	$\frac{1}{x}.\ln(-x+1)$ D f= $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$ $\nexists h(4)$	$x^3 + x^2 - x - 1$ D f = $\mathbb{R}$ $(f.g)(4) = 75$	$\sqrt[3]{2x}.(e^x + 1)$ D f = $\mathbb{R}$ $(f.g)(4) = 2.(e^4 + 1)$
f/g	$x^2/\sqrt{x}$ D f = $(0, +\infty)$ $(f/g)(4) = 8$	x.$\ln(-x+1)$ D f= $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$ $\nexists h(4)$	$\frac{1}{x+1}$ D f = $\mathbb{R} - \{-1\}$ $(f/g)(4) = \frac{1}{5}$	$\frac{e^x + 1}{\sqrt[3]{2x}}$ D f = $\mathbb{R} - \{0\}$ $(f/g)(4)$=$\frac{e^4+1}{2}$

B)

$h(x) = f\ [\ g\ (x)]$	a) D h=D g= $[0;\ +\infty)$ h(x) = x	b)Dh= Dg^*= $(-\infty;0)\cup(1;\ +\infty)$ h(x) = $\ln\left(\frac{-1+x}{x}\right)$
	c) D h= Dg=$\mathbb{R}$ h (x) = x^2	d)Dh = Dg h(x)= $e^{\sqrt[3]{2x}+1}$

$h(x) = g\ [\ f\ (x)]$	a) D h=D f= $\mathbb{R}$ h(x) = $\lvert x\rvert$	b)Dh= Df^*= $(-\infty;0)\cup(0;\ +\infty)$ h(x) = $\ln\left(\frac{-1+x}{x}\right)$
	c) D h= Df=$\mathbb{R}$ h (x) = x^2	d)Dh = Df h(x)= $e^{\sqrt[3]{2x}+1}$

Ej. 25-

Considerando que las funciones compuestas dadas corresponden a $y = (f\ o\ g\ o\ h)\ (x)$,

a) Hallar las funciones simples $y = f(x)$, $y = g(x)$ e $y = h(x)$ y determinar sus dominios e imágenes:

$a_1)$ $y = \sqrt{\ln(x^2+1)}$ $\qquad a_2)$ $y = e^{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$ $\qquad a_3)$ $y = tg(\sqrt[3]{e^x})$

b) Hallar la función inversa de cada una de las funciones del ítem a) y establece su dominio.

Respuestas:

	b1	**b2**	**b3**
Función inversa	$f^{-1}(x) = \sqrt{e^{x^2}-1}$	$f^{-1}(x) = arc\ sen(\ln^2 x)$	$f^{-1}(x) = \ln(arc\ tg\ (3x))$
Dominio	$\mathbb{R}$	$(1/e, e)$	R^+

Ej. 26: Resolver los siguientes problemas de aplicación

1) En un cierto lago, el pez róbalo se alimenta del pez pequeño gobio, y el gobio se alimenta de plancton. Supongamos que el tamaño de la población del róbalo es una función f(n) del número n de gobios presentes en el lago, y el número de gobios es una función g(x) de la cantidad x de plancton en el lago. Expresar el tamaño de la población del róbalo como una función de la cantidad x de plancton, siendo $f(n) = 50 + \sqrt{\frac{n}{150}}$ y $g(x) = 4x + 3$

2) Se conoce que la población de ranas R, calculada en miles, en una determinada región depende de la población de insectos m(medida en millones). La población de insectos **I** a su vez, varía con la cantidad de lluvia c (dada en cm). Si la población de ranas es

$R(m) = 65 + \sqrt{\frac{m}{8}}$ y la población de insectos es $I(c) = 43c + 7.5$

a) Expresar la población de ranas como función de la lluvia
b) Estimar la población de ranas cuando la lluvia es de 1.5 cm.

3)Un charco circular de agua se está evaporando y disminuye lentamente su tamaño. Después de t minutos, el radio del charco mide $\frac{18}{2t+3}$ pulgadas; en otras palabras, el radio es una función del tiempo.

El área A del charco , por ser circular, es una función del radio. a)Expresar el área como función del tiempo. En ese caso b) ¿Qué área cubre el charco después de 10 minutos?

Respuestas:

1) $h(x) = 50 + \sqrt{\frac{4x+3}{150}}$

2) a) $h(c) = 65 + \sqrt{\frac{43c+7.5}{8}}$

b) 68000

3) a) $h(t) = \pi\left(\frac{18}{2t+3}\right)^2$

b) $h(10) = 1.941\ pulg2$

EJERCICIOS INTEGRADORES DE LA UNIDAD 1

A) Indicar Verdadero o Falso. Justificar cada respuesta, en caso de ser falsa mostrar un contraejemplo

a) La ecuación $x.y^2 + x^2 = 3.x$ determina una función

b) La gráfica de la función $f(x) = \frac{2.x^3+x}{x^2}$ es simétrica con respecto al origen de coordenadas.

c) Si $f(x): [0; +\infty) \to [0; +\infty)/y = \sqrt{x}$ es biyectiva, su función inversa es:

$g(x): \mathcal{R} \to [0; +\infty)/y = x^2$

d) Si $x \neq 3$ entonces $\frac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \frac{x-2}{x+3}$

B) Sea f(x) = $\ln(x^2 - 1) - 2$ determinar:

a) Dominio, imagen, intersección con los ejes de coordenadas, conjuntos de positividad y negatividad, paridad.

b) Su relación inversa. ¿Es función biyectiva f? Si es necesario restringir el dominio de f

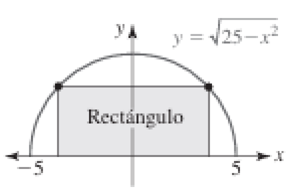
c) Indicar dominio e imagen de $f^{-1}(x)$.

d) Graficar f y f^{-1} y trazar el eje de simetría

e) Realizar la composición: a) $(f \circ f^{-1})(x)$; b)$(f^{-1} \circ f)(x)$, indicar el dominio de cada composición.

f) Sea $g(x) = 2x + 1$, hallar $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$, indicar el dominio.

C) Un rectángulo tiene dos vértices sobre el eje x y dos vértices sobre el semicírculo cuya ecuación es $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$.



a). Expresar el área A(x) del rectángulo como una función de x.

b) Indicar el dominio e imagen de f(x)

c) Indicar el dominio e imagen de la función A(x)

d) Hallar la variación del área con respecto a la variación de x en el intervalo $[1,3]$. Interpretar la variación.

D) Dada la función $y = \frac{x^2-1}{x-1}$, su dominio es $Df = \mathbb{R} - \{1\}$. No está definida en x= 1, pero SI está definida alrededor de x=1.

Exploración numérica. Completar la tabla con valores cercanos a 1 como queramos, para determinar el comportamiento de la función cerca de 1.

X tiende a 1 por la izquierda ⟶ ⟵ X tiende a 1 por la derecha

$\boldsymbol{x}$	**0.75**	**0.9**	**0.99**	**0.999**	**…1…**	**1,001**	**1,01**	**1,1**	**1.25**
$\boldsymbol{f(x)}$									

a) ¿A qué valor tiende la función a medida que x está más cerca de 1, si consideramos los valores de x tendiendo por la derecha y por la izquierda de 1?
b) ¿Cómo es la tendencia del valor de f(x) al considerar x teniendo por la izquierda y por la derecha de x_0=1?

Exploración gráfica. Realizar la gráfica de la función y comprobar si las respuestas dadas en el ítem a) y b) es correcta.

Exploración analítica. Reescribir $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ en forma más sencilla. Indicar su dominio y comparar con la gráfica y exploración aritmética.

FUNCIÒN REAL

CONDICION DE UNICIDAD

CONDICION DE EXISTENCIA

Tipos de funciones

FUNCIÒN INVERSA

- **POLINOMICA**
- **FRACCIONARIA**
- **IRRACIONAL**
- **EXPONENCIAL**
- **LOGARITMICA**
- **HIPERBÒLICAS**
  - Arg Sh x
  - Arg Ch x
  - Arg Th x
- **TRIGONOMÈTRICAS**
  - Arc Sen x
  - Arc Cos x
  - Arc Tan x

CONJUNTOS CARACTERISTICOS

DOMINIO: es el rango de valores que puede tomar la variable **independiente**, para los que existe imagen.

- **Conjunto de positividad:** formado por los valores de x que pertenecen al **dominio** y hacen que **f(x)** sea **positiva**
- **Conjunto de negatividad:** formado por los valores de x que pertenecen al **dominio** y hacen que **f(x)** sea **negativa**
- **Ceros o raíces**: formado por los valores de **x** que pertenecen al **dominio** y hacen que **f(x)=0.**

IMAGEN: es el rango de valores de la variable **dependiente** para los que existe un valor de x.

Ordenada al origen: Valor de la variable **y** para el cual existe $x = 0$

CLASIFICACION

INYECTIVA
f: D f→ B ***es inyectiva*** $\Leftrightarrow \forall x_1 \in$ D f, $\forall\, x_2 \in$ D f: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

SOBREYECTIVA
$\boldsymbol{f}$: Df → $\boldsymbol{B}$ ***es sobreyectiva*** $\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}, \exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Df} \,/\, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{f}$

BIYECTIVA
Una función es biyectiva si y solo si es **inyectiva** y **sobreyectiva**

PROPIEDADES ÚTILES

a) **SI f** es una función biyectiva y **g** su relación inversa **ENTONCES** g es función y también es biyectiva
b) **SI** la relación inversa de **f** es función **ENTONCES** f es función biyectiva

PAR
Una función es par si y solo si para todo x que **pertenece** al **dominio** se verifica que **f(-x) = f(x)**
Simetría con respecto al eje y

IMPAR
Una función es impar si y solo si para todo x que **pertenece** al **dominio** se verifica que **f(-x) = -f(x)**
Simetría con respecto al (0,0)

OPERACIONES CON FUNCIONES

SUMA Y RESTA

$\boldsymbol{h(x) = (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)}$

MULTIPLICACIÒN

$\boldsymbol{h(x) = (f.g)(x) = f(x).g(x)}$

$\boldsymbol{Dh = Df \cap Dg}$

DIVISIÒN

$\boldsymbol{h(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}}$

$\boldsymbol{Dh = Df \cap Dg - \{x \,/\, g(x) = 0\}}$

COMPOSICIÒN

a) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = h(x)$

Condición: $\mathbf{If} \subseteq \boldsymbol{Dg}$

b) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = h(x)$

Condición: $\mathbf{Ig} \subseteq \boldsymbol{Df}$

DEFINICIONES Y PROPIEDADES

PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN

1. $a^0 = 1 \quad con\, a \neq 0$

2. $a^1 = a$

3. $a^n \,.\, a^m = a^{n+m}$

4. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad con \quad a \neq 0$

5. $(a^m)^n = a^{m.n}$

6. $(a.b)^n = a^n \cdot b^n$

7. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad con \quad b \neq 0$

8. $a^{-1} = \frac{1}{a} \quad con \quad a \neq 0$

PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN

1. $\forall a, b \in R^+ \colon \sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$

2. $\forall a, b \in R^+ \colon \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$

4. $\sqrt[n]{a} = (a)^{\frac{1}{n}}$

RELACIÓN DE ORDEN EN LOS NÚMEROS REALES: DESIGUALDADES

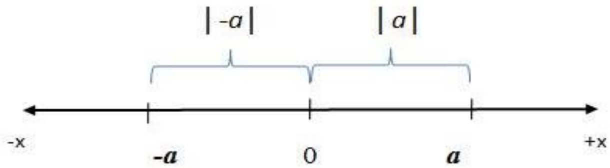
Propiedad Aditiva: $\forall a, b\ y\ c \in \Re$. **Si** a los dos miembros de una **desigualdad** se les suma o resta una misma cantidad, el sentido de la desigualdad no varía.	Dada la desigualdad a > b, se puede escribir: a + c > b + c y a - c > b - c
Propiedad Multiplicativa: $\forall a, b\ y\ c \in \Re$. **Si** los dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por una misma cantidad positiva, el sentido de la desigualdad no varía.	Dada la desigualdad a > b y siendo c una cantidad positiva, puede escribirse: $a > b \ \wedge\ c > 0 \ \Rightarrow\ \mathrm{a.c} > \mathrm{b.c}$
Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por una misma cantidad **negativa**, el sentido de la desigualdad varía.	$a > b \ \wedge\ c < 0 \ \Rightarrow\ \mathrm{a.c} < \mathrm{b.c}$
Si en una desigualdad invertimos ambos miembros de la desigualdad, se invierte el orden de esta, si los números tienen igual signo.	$Si\ a < b \ \Rightarrow\ \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

VALOR ABSOLUTO O MÓDULO

Llamamos valor absoluto de un número real "*a*", que se denota con $|a|$ y se define:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Geométricamente, el valor absoluto de "a" es la distancia desde "a" hasta 0 sobre la recta real. Como las distancias siempre son positivas o nulas podremos decir $|a| \geq 0$. Gráficamente se representa al valor absoluto de la siguiente manera:



<u>PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO</u>

$x \in \mathcal{R};\ \lvert x\rvert \geq 0$	$\lvert x\rvert = \lvert -x\rvert$	$\lvert x.y\rvert = \lvert x\rvert.\lvert y\rvert$	$\left\lvert\frac{x}{y}\right\rvert = \frac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert}\ si\ y \neq 0$
$\lvert x\rvert = a$ sí y solo sí $x = \pm a$			$\lvert x\rvert < a$ sí y solo sí $-a < x < a$
$\lvert x\rvert > a$ sí y solo sí $x > a$ ó $x < -a$			$\lvert x\rvert \leq a$ sí y solo sí $-a \leq x \leq a$
$\lvert x\rvert \geq a$ sí y solo sí $x \geq a$ ó $x \leq -a$			$\sqrt{x^2} = \lvert x\rvert$

<u>PRODUCTOS NOTABLES DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS</u>

<u>BINOMIO AL CUADRADO</u>

$$(a+b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 + 2.a.(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2.a.b + b^2$$

<u>BIINOMIO AL CUBO</u>

$$(a+b)^3 = a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 + 3.a^2.(-b) + 3.a.b^2 + (-b)^3 = a^3 - 3.a^2.b + 3.a.b^2 - b^3$$

<u>PRODUCTO DE BINOMIOS CONJUGADOS</u>

$(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$

<u>CÁLCULO DE LAS RAÍCES DE UN POLINOMIO</u>

a) <u>Polinomio de grado 2</u>

La ecuación asociada al polinomio cuadrático es: $a.x^2 + b.x + c = 0$

Para calcular sus raíces se utiliza la fórmula resolvente: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$.

La expresión factorizada quedará: $a.(x - x_1).(x - x_2)$.

b) <u>Polinomio de 3° grado o más</u>: Buscamos una raíz (x_1) tanteando o con la Regla de Gauss. Formamos con la raíz el divisor $(x - x_1)$ y realizamos la división con la Regla de Ruffini para calcular el cociente. De esta manera reducimos el polinomio de 3 ° grado al producto entre uno de 1° y otro de 2° grado. Luego buscamos las otras raíces como se explicó en los pasos anteriores.

Ejemplo:

$$3x^3 - 9.x^2 - 18x + 24 = (x-1).(3.x^2 - 6.x - 24)$$

Ahora con la fórmula resolvente calculamos las raíces de la ecuación cuadrática y factorizamos $3x^3 - 9.x^2 - 18x + 24 = 3(x-1).(x-4).(x+3)$

ECUACIONES BICUADRÁTICAS

Una ecuación bicuadrática tiene la forma: $a\,x^4 + b\,x^2 + c = 0$

Para resolver ecuaciones bicuadráticas, aplicamos la raíz cuadrada a la resolvente de la ecuación de segundo grado: $\boldsymbol{x_{1,2,3,4}} = \pm\sqrt{\frac{\boldsymbol{-b\pm\sqrt{b^2-4.a.c}}}{\boldsymbol{2a}}}$, obteniéndose así las cuatro raíces.

ECUACIONES FRACCIONARIAS

En las ecuaciones ***fraccionarias,*** se debe tener en cuenta que el denominador debe ser distinto de cero.
Esto nos permite determinar los valores que no puede tomar la variable "*x*".

$$\frac{ax+b}{cx+d} = 0\ ,\ con\ \ x \neq -\frac{d}{c}$$

ECUACIONES IRRACIONALES

Son ecuaciones en las que aparecen raíces afectando a la variable. Se debe tener en cuenta antes de resolver la ecuación el dominio de esta y el índice de la raíz.
Ejemplo: Sí $\sqrt{ax+b} = c$ debemos primero determinar el dominio de la inecuación:
$ax + b \geq 0\ /\ \ x \geq \left(-\frac{b}{a}\right)$ Dominio: $\left(-\frac{b}{a};+\infty\right)$

ECUACIONES CON MÓDULO

Son ecuaciones que se pueden expresar como $|x| = a\ \ con\ a \in \Re_0^{\ +}$. De modo que, aplicando propiedades de módulo, podemos decir que: $\boldsymbol{x = a} \quad \vee \quad \boldsymbol{x = -a}$.

ECUACIONES EXPONENCIALES

La ecuación exponencial con base "*a*" se define como: $\boldsymbol{a^x = b}\ ,\ \boldsymbol{a > 0}\ \wedge \boldsymbol{a \neq 1}$
Una ecuación exponencial se puede resolver:

a) Aplicando propiedades de potenciación, con $\forall\ a > 0 \quad \wedge \quad a \neq 1$

$a^0 = 1$	$a^1 = a$	$a^x.a^y = a^{x+y}$	$a^x : a^y = a^{x-y}$
$(a^x)^y = a^{x.y}$ $\left(a^{log_a x}\right) = x$ $(a^{-x}) = \frac{1}{a^x}$			

b) Aplicando la definición y propiedades de logaritmo.
c) Llamaremos logaritmo en base **a** de **b** al único número c que $a^c = b\ \leftrightarrow log_a b = c$,siendo $\boldsymbol{a > 0} \wedge \boldsymbol{a \neq 1}$, y **b > 0**,

$\forall\ x>0\ e\ y>0:$	
$log_a(1)=0$	$log_a(a)=1$
$log_a(xy)=log_a(x)+log_a(y)$	$log_a\left(\frac{x}{y}\right)=log_a(x)-log_a(y)$
$log_a(x^y)=y\,log_a(x)$	$\log_a\left(a^x\right)=x$

ECUACIONES LOGARITMICAS

La ecuación logarítmica con base "a" se define como: $log_a x = b \quad \leftrightarrow \quad a^b = x$
Para resolver ecuaciones logarítmicas tenemos en cuenta:

a) Definición de logaritmación

$$log_a x = b \quad \leftrightarrow \quad a^b = x$$

b) Propiedades de la logaritmación

$log_a(xy)=log_a(x)+log_a(y)$	$log_a\left(\frac{x}{y}\right)=log_a(x)-log_a(y)$
$log_a(x^y)=y\,log_a(x)$	$log_a(x)=log_a(y)\ entonces\ x=y$

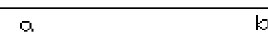
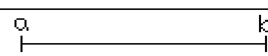
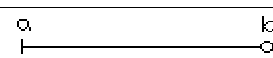
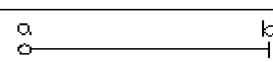
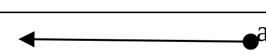
Cuando trabajamos con logaritmos en la calculadora, generalmente necesitamos que sean decimales (base 10) o naturales (base e), de lo contrario debemos realizar un cambio de base para transformarlos mediante la siguiente fórmula:

$$log_a(b)=\frac{log(b)}{log(a)}=\frac{ln(b)}{ln(a)}$$

INTERVALOS REALES

Definimos como "intervalo" al conjunto de números reales comprendido entre dos valores a y b, tal que a < b con a y b $\in \Re$.
En cuanto a la interpretación geométrica, un intervalo se representa mediante un segmento $\overline{ab}$, que podrá incluir o no los extremos del segmento.

CLASIFICACION:

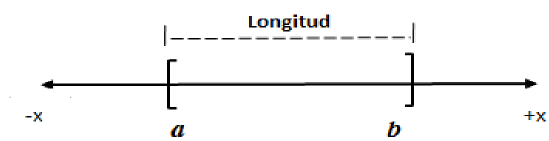
Clasificación	**Notación de Intervalo**	**Notación de Conjunto**	**Representación Gráfica**
Intervalo Abierto	(a,b)	$\{x\in\Re\ /\ a<x<b\}$	
Intervalo Cerrado	$[a,b]$	$\{x\in\Re\ /\ a\le x\le b\}$	
Intervalo semiabierto ó Semicerrado	$[a,b)$	$\{x\in\Re\ /\ a\le x<b\}$	
	$(a,b]$	$\{x\in\Re\ /\ a<x\le b\}$	
Intervalos	$(-\infty,a]$	$\{x\in\Re\ /\ x\le a\}$	

Infinitos	$(-\infty, a)$	$\{x \in \Re \,/\, x < a\}$	a
	$[b,+\infty)$	$\{x \in \Re \,/\, x \geq b\}$	b
	$(b,+\infty)$	$\{x \in \Re \,/\, x > b\}$	b
	$(-\infty,+\infty)$	$\{x \in \Re\}$	

AMPLITUD DE UN INTERVALO

Definimos como Amplitud del intervalo a la diferencia, en valor absoluto, entre los extremos de este (pertenezcan o no al intervalo). Este cálculo no es posible en Intervalos Infinitos.

$\boldsymbol{L = |b - a| = |a - b|}$



INECUACIONES LINEALES

Son inecuaciones de primer grado, que se resuelven despejando la variable.

Ejemplo 1: $2x - 1 < 6 \Rightarrow 2x < 6 + 1 \quad \Rightarrow \quad x < \frac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad Solución = \left(-\infty; \frac{7}{2}\right)$

Ejemplo 2: $-2x - 1 < 6 \Rightarrow -2x < 6 + 1 \Rightarrow \quad x > \frac{-7}{2} \quad \Rightarrow \quad Solución = \left(\frac{-7}{2}; +\infty\right)$

Observación: Por propiedad $a < b \;\wedge\; c < 0 \;\Rightarrow\; a.c > b.c$ para despejar x dividimos ambos miembros por -2, como es negativo debemos invertir el sentido de la desigualdad.

INECUACIONES NO LINEALES

Son las inecuaciones de grado mayor a dos, o de otras potencias. Que se resuelven aplicando la tabla de signos o en la recta real estudiamos los signos del producto o división.

Ejemplo 1: $(x+5)\cdot(x-3)\cdot(4-x) \leq 0$

Tabla de signos:

Factores	$(-\infty;-5)$	-5	(-5; 3)	3	(3;4)	4	$(4;+\infty)$
$x + 5$	$- - -$	0	$+ + +$	+	$+ + +$	+	$+ + +$
$x - 3$	$- - -$	-	$- - -$	0	$+ + +$	+	$+ + +$
$4 - x$	$+ + +$	+	$+ + +$	+	$+ + +$	0	$- - -$
$(x+5)\cdot(x-3)\cdot(4-x)$	$+ + +$	0	$- - -$	0	$+ + +$	0	$- - -$

La solución final será: $S = [-5;3] \cup [4;+\infty)$ o $S = \{x \in \Re / -5 \leq x \leq 3 \quad \vee \quad x \geq 4\}$

Ejemplo 2: $2x^3 - x - 1 \leq 0$

a) Buscamos un cero o raíz (por tanteo o Regla de Gauss). x=1 es un cero o raíz real.

Armamos el divisor (x- cero o raíz) = $(x - 1)$ y realizamos la división para determinar el cociente.

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & & 2 & 2 & 1 \\ \hline & 2 & 2 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$2x^3 - x - 1 = (x-1)(2x^2+2x+1)$$

Buscamos los ceros o raíces de $x^2 + 2x + 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4.2.1}}{2.1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2.1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} \quad No\ son\ raices\ reales$$

Por lo tanto, el polinomio factorizado con su raíz real nos queda asi:
$(x-1)\ (2x^2 + 2x + 1) \leq 0$

Tabla de signos:

Factores	$(-\infty; 1)$	1	$(1; +\infty)$
x -1	$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$
$x^2 + 2x + 1$	$+\ +\ +$	-	$+\ +\ +$
$(x-1)(2x^2+2x+1)$	$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$

La solución final será: S = (-∞; 1] o S = $\left\{x \in \frac{\Re}{x} \leq 1\right\}$

Ejemplo 3

$$\frac{-2x+1}{x-2} \leq 0$$

a) Buscamos los ceros o raíces del numerador y denominador:

$$-2x + 1 = 0 \ \Longrightarrow x = \frac{1}{2} \quad ; \quad x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2$$

Tabla de signos:

Factores	$\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}; 2\right)$	2	$(2; +\infty)$
$-2x\ + 1$	$+++$	0	$---$	-3	$---$
$x - 2$	$+\ +\ +$	$\frac{-3}{2}$	$---$	$\nexists$	$+\ +\ +$
$\frac{-2x+1}{x-2}$	$+++$	0	$+\ +\ +$	$\nexists$	$---$

S = (2; +∞) ∪ $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ o S = $\left\{x \in \frac{R}{x} \geq 2 \ \vee x = \frac{1}{2}\right\}$

INECUACIONES LOGARITMICAS

Ejemplo 1: $\log_2(-x+1) > 1$ si $-x + 1 > 0 \Longrightarrow x < 1;\ \ df = (-\infty; 1)$

Aplicando definición de logaritmación:

$$log_a x = b \quad \Leftrightarrow \quad a^b = x$$
$$2^1 < -x + 1$$

Despejamos x:

$$2 - 1 < -x \implies -1 > x \quad \rightarrow \quad S = (-\infty; -1)$$

Podemos también resolver la inecuación buscando los cero/s o raíz/ces de la expresión $\log_2(-x+1) - 1$

$$\mathrm{Log}_2(-x+1) = 1 \implies 2^1 = -x + 1 \Rightarrow -1 = x$$

<u>Tabla de signos:</u>

Expresión	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$
$\log_2(-x+1) - 1 > 0$	$+++$	0	$---$

S = $(-\infty; -1)$

<u>INECUACIONES EXPONENCIALES</u>

Ejemplo 1: $3^{x+2} - 3^{x+1} > 36$

Reducimos la expresión

$3^x.3^2 - 3.3^x > 36 \implies 3^x(9-3) > 36 \Rightarrow 3^x > 6 \implies \log_3 3^x > \log_3 6 \Rightarrow \boldsymbol{x} > \log_3 6$

S = $(\log_3 6; +\infty)$

Podemos también resolver la inecuación buscando los cero/s o raíz/ces de la expresión $3^{x+2} + 3^{x+1}$

$3^x.3^2 - 3.3^x = 0 \implies 3^x(9-3) = 0 \Rightarrow 3^x = 6 \implies \log_3 3^x = \log_3 6 \Rightarrow \boldsymbol{x} = \log_3 6$

<u>Tabla de signos:</u>

Expresión	$(-\infty; \log_3 6)$	$\log_3 6$	$(\log_3 6\,; +\infty)$
$3^{x+2} - 3^{x+1} > 0$	$---$	0	$+++$

S = $(-\infty; \log_3 6)$

<u>INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO</u>

Sea una inecuación de la forma $|x| \geq a$, se puede resolver aplicando la propiedad:

$$\forall a \in \Re^+,\ sí \quad |x| \geq a \quad \Rightarrow \quad x \geq a \ \vee \ x \leq -a$$

<u>Ejemplo</u> 1 $|x| > 2 \quad \Rightarrow \quad x > 2 \quad \vee \quad x < -2 \qquad \textit{Solución}: (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

Sea una inecuación de la forma $|x| \leq a$, se puede resolver aplicando la propiedad

$$\forall a \in \Re^+, \quad sí \quad |x| \leq a \quad \Rightarrow -a \leq x \leq a$$

Ejemplo 2 $|x| < 4 \quad \Rightarrow \quad -4 < x < 4 \qquad\qquad Solución: (-4; 4)$

Ejemplo 3 $\left|\frac{x}{x-1}\right| < 2 \Leftrightarrow -2 < \frac{x}{x-1} < 2 \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} > -2 \quad y \quad \frac{x}{x-1} < 2$

Resolvemos cada una de las inecuaciones fraccionarias.

$$\frac{x}{x-1} > -2 \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} + 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{x+2(x-1)}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+2x-2}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{3x-2}{x} > 0$$

Factores	$\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}; 1\right)$	1	$(1; +\infty)$
$3x-2$	$-$	0	$+$	1	$+$
$x-1$	$-$	$-\frac{1}{3}$	$-$	0	$+$
$\frac{3x-2}{x-1}$	$+$	0	$-$	$-\nexists$	$+$

$$\frac{x}{x-1} < 2 \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{x-2(x-1)}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-2x+2}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{-x+2}{x-1} < 0$$

Factores	$(-\infty; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$-x+2$	$+$	1	$+$	0	$-$
$x-1$	$-$	0	$+$	1	$+$
$\frac{-x+2}{x-1}$	$-$	$-\nexists$	$+$	0	$-$

$$S = [(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)] \;\cap\; \left[\left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (1; +\infty)\right] \;\Rightarrow\; \boldsymbol{S} = \left(-\infty; \boldsymbol{\frac{2}{3}}\right) \cup (\boldsymbol{2}; +\infty)$$