

**TRABAJO PRÁCTICO N°1:**  
**FUNCIONES REALES**  
**ANÁLISIS MATEMÁTICO 1**

UTN – Facultad Reg. Haedo

## AUTOEVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Te proponemos que luego de atravesar el seminario de ingreso, evalúes tus conocimientos adquiridos resolviendo los siguientes ejercicios.

### Ej. A-01

Factorizar y simplificar las siguientes expresiones:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{x^2-x-6}{x^2-5x-14} \cdot \frac{x^2-3x-28}{x^2-8x+15} = & \text{b) } \frac{ax+2bx+3a+6b}{x^2+6x+9} = & \text{c) } \frac{\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}}{\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}} = \\ \text{d) } \frac{2x e^x + 4 e^x}{x^2+4x+4} = & \text{e) } \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+x} - \frac{1}{x^2+2x+1} = & \text{f) } \frac{4x}{x+1} - \frac{(2x-1)^2}{x^2-1} = \end{array}$$

### Ej. A-02

Racionalizar los denominadores de las siguientes expresiones, utilizando el caso que creas indicado:

$$\text{a) } \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{b) } \frac{2}{\sqrt[3]{2}} \quad \text{c) } \frac{1+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} \quad \text{d) } \frac{x+1}{\sqrt{x+1}} \quad \text{e) } \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} \quad \text{f) } \frac{x^3}{\sqrt[3]{x}}$$

### Ej. A-03

Indicar cuales siguientes proposiciones son verdaderas o falsas en el conjunto de los números reales. Argumentar la respuesta.

$$\text{a) } \forall a \in \mathbf{R}, \forall b \in \mathbf{R}^+, \forall c \neq 0: (a^2 \cdot \sqrt{b} \cdot c^{-2})^4 = a^8 \cdot b^2 \cdot \frac{1}{c^8}$$

$$\text{b) } \forall a, b \in \mathbf{R}: (a + 2b)^3 \cdot b = a^3b + 8b^4$$

$$\text{c) } \forall a \neq 0: a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2$$

### Ej. A-04

¿En qué caso vale el signo igual en la fórmula?:  $\forall a, b \in \mathbf{R} > 0: \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ .

Justificar tu elección.

## TRABAJO PRÁCTICO 1: FUNCIONES REALES

### COMPETENCIAS

- ❖ Identificar, formular y resolver situaciones problemáticas que involucren distintos tipos de funciones.
- ❖ Utilizar de manera efectiva las técnicas y herramientas de la ingeniería
- ❖ Aprender en forma continua y autónoma
- ❖ Comunicar con efectividad

### Ej.1-01

Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones, expresar el conjunto solución con notación de intervalos:

$$a) x^2 - 2x = 0 \quad b) \frac{3x+1}{x+1} + x = 1 \quad c) \frac{|x+1|}{x^2-1} = 0 \quad d) -|x+3| + 2 = 0$$

$$e) 2e^{x+1} = 2 \quad f) \ln(x^2+1) - \ln x^2 = 0 \quad g) \ln|2x+1| = 0 \quad h) \sqrt{2x-1} - x = 0$$

$$i) \frac{-x-9}{x+5} \geq 1 \quad j) \frac{3x^3-6x}{x} < 0 \quad k) 9-x^2 < 0 \quad l) \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - 1 > 0$$

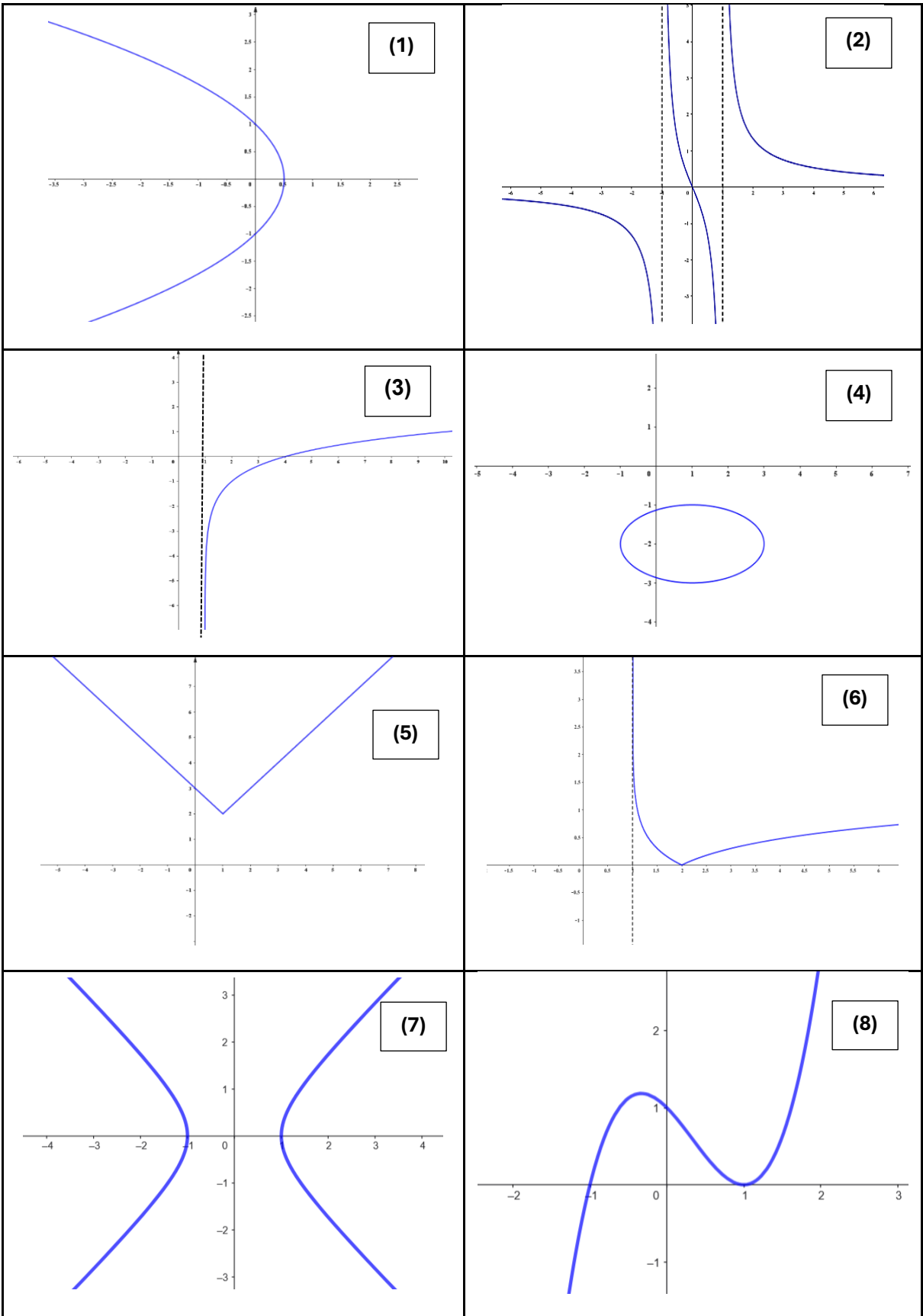
$$m) |x^2-1| \leq 0 \quad n) \sqrt{2x-1} - x < 0 \quad o) \ln(2x+1) > 0 \quad p) 2e^{x+1} - 2 < 0$$

$$q) |2-x| - 15 \geq 0$$

### CONCEPTO DE FUNCIÓN: DOMINIO, IMAGEN, RAÍCES, GRÁFICO, PARIDAD, DESPLAZAMIENTOS, BIYECTIVIDAD Y FUNCIÓN INVERSA.

### Ej.1-02

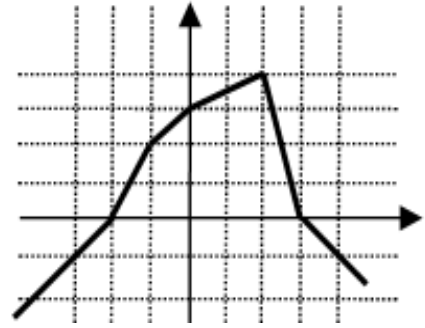
Observando las siguientes gráficas, reconocer las que corresponden a función. En caso de que lo sea, establecer su: dominio, imagen, intersección con los ejes coordenados, intervalos de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y decrecimiento.



**Ej.1-03**

Observando la gráfica de una función  $f$  responder:

- a)  $f(2) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $f(-1) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  
 $f(3) = \underline{\hspace{2cm}}$
- b) Determinar analíticamente la variación de  $f(x)$  con respecto a la variación en  $x$  en el intervalo  $[-1; 2]$  y  $[0; 3]$ .  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ . Representar e interpretar dicha variación.
- c) Observando el gráfico:
- Encontrar  $\{x \in \mathbf{R} / f(x) = 0\}$
  - Encontrar  $\{x \in \mathbf{R} / f(x) = 4\}$
  - Establecer  $\{x \in \mathbf{R} / f(x) > 0\}$
  - Establecer  $\{x \in \mathbf{R} / f(x) < 0\}$
  - Encontrar las preimágenes de  $-1$  y la imagen de  $3$ .



**Ej.1-04**

Dadas las funciones elementales: a)  $f(x) = \sqrt{x}$ , b)  $f(x) = x^2$ , c)  $f(x) = \ln x$ , escribir las fórmulas respectivas aplicando las transformaciones indicadas. Graficar la función y las curvas generadas por las transformaciones:

- a)  $y = f(x) + 2$       b)  $y = f(x) - 2$       c)  $y = f(x + 2)$       d)  $y = f(x - 5)$   
 e)  $y = -f(x)$       f)  $y = f(-x)$       g)  $y = 0,5 \cdot f(x)$       h)  $y = f(2x)$

**Ej.1-05**

Determinar analíticamente cuáles de las siguientes funciones son pares o impares. Indicar, la simetría de cada curva en relación con su paridad.

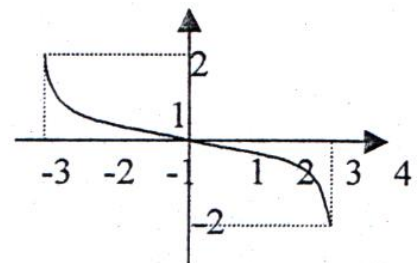
- a)  $f_1(x) = 4 - x^2$       b)  $f_2(x) = \sqrt[3]{x}$       c)  $f_3(x) = -\sqrt{4 - x^2}$       d)  $f_4(x) = -(x - 1)^2$   
 e)  $f_5(x) = x^3$       f)  $f_6(x) = \frac{1}{x}$       g)  $f_7(x) = \frac{3}{x^2}$       h)  $f_8(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$

**Ej.1-06**

Responder:

Según la gráfica de  $f: [-3; 3] \rightarrow [-2; 2]$ ,

- ¿Cuál es el dominio y la imagen de  $f$ ?
- ¿Por qué  $f$  es biyectiva?
- Estimar el valor de  $f^{-1}(2)$
- Realizar la gráfica de  $f^{-1}$  considerando la simetría con respecto a  $y = x$ .



## **FUNCIÓN POLINÓMICA**

### **Ej.1-07**

Resolver los siguientes problemas de aplicación:

1) Para construir una caja sin tapa, se cortan cuadrados de  $x$  cm de lado en las cuatro esquinas de un cartón de 10cm de ancho por 8cm de largo, y se doblan los lados.

(a) Expresar la función  $A(x)$ , área de la base.

(b) Expresar la función  $V(x)$ , volumen de la caja.

(c) Realizar la gráfica para cada función e indicar dominio e imagen en cada caso, en el contexto del problema.

2) De acuerdo con la fórmula  $p(d) = k \cdot d + 1$ ; donde  $k$  es una constante, la presión  $p$  que experimenta un buzo bajo el agua (en unidad de atmósferas) está relacionada con la profundidad  $d$  a la que se encuentra (en metros). La presión es de 1 atmósfera en la superficie; a 100 metros es, aproximadamente de 10,94 atmósferas (considerando que ese valor es la profundidad mayor que puede un buceador alcanzar para no tener apnea).



Responder:

- ¿Cuál es la variable dependiente e independiente en la situación planteada?
- Determinar la función  $p(d)$  que brinda la presión a la que está sometido el buzo en función de la profundidad donde se encuentra hasta ese nivel. Hallar el dominio y la imagen de esta función de acuerdo con el contexto del problema.
- Determinar la presión del buzo a los 50 metros de profundidad.
- ¿Cuál es la variación de la presión en el intervalo de profundidad  $[50 ; 100]$ ?
- ¿Cuál es la variación de la presión cada 50 metros?

### **Ej.1-08**

Hallar el valor de  $k$  para que se verifiquen las siguientes condiciones

- $kx + 2y = 3$  y  $f(-2) = 3$ .
- $y = -\frac{1}{6}x + \frac{k}{3}$  y abscisa al origen igual a  $\frac{1}{2}$ .
- $x - 2ky + 2 = 0$ ; ordenada al origen  $-2$ .
- $y = (5k - 1)x$ ; paralela a  $3x - 2y = 10$ .
- $y = (k^2 - 3)x^2 - kx + k - 1$  tenga vértice en  $(1 ; 0)$ .

f)  $\begin{cases} y = k^2x^2 + (k - 2)x + 1 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$  se intersectan en  $(0 ; 1)$  y  $(-1 ; 3)$ .

g) Las rectas de ecuación  $y = 8kx + 3$  e  $y = k^2x - 2$  son perpendiculares.

## **FUNCIÓN EXPONENCIAL, LOGARÍTMICA, IRRACIONAL Y MÓDULO**

### **Ej.1-09**

I) Graficar las siguientes funciones exponenciales. Indicar su dominio e imagen.

a)  $y = 3^x$       b)  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$       c)  $y = e^x$       d)  $y = e^{-x}$       e)  $y = 4^x - 2$

f)  $y = 2^x + 1$

II) Encontrar la función exponencial  $f(x) = C \cdot a^x$  (con  $a > 0$ ), tal que la gráfica de esta pasa por los puntos  $(1, 6)$  y  $(3, 24)$ .

### **Ej.1-10**

Determinar el dominio, las intersecciones con los ejes e intervalos de positividad y negatividad de cada una de las siguientes funciones. Utilizar los datos obtenidos para representar gráficamente.

a)  $y = \sqrt{x - 1}$

b)  $y = \sqrt{1 - x^2}$

c)  $y = -\sqrt{x^2 + 1} - 3$

d)  $y = \log_2(x^2 + 3)$

e)  $y = \log_5(x - 2) + 1$

f)  $y = \log(1 - x^2)$

g)  $y = 2 \ln(-x)$

h)  $y = -3|x - 1| + 6$

### **Ej.1-11**

Graficar las funciones y obtener analíticamente la intersección de sus gráficas

a)  $\begin{cases} y = 3x^2 - 5x + 4 \\ y = -5x - 3 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} y = 3x^3 + 4 \\ y = -x^2 - 2x \end{cases}$

c)  $\begin{cases} y = 2 \\ y = e^x - 1 \end{cases}$

d)  $\begin{cases} y = \log_2(x + 2) \\ y = 1 \end{cases}$

e)  $\begin{cases} y = |x + 1| - 1 \\ y = -x - 2 \end{cases}$

f)  $\begin{cases} y = \sqrt{x - 4} \\ y = \frac{1}{2}(x - 3) \end{cases}$

### **Ej.1-12**

Determinar dominios e imágenes apropiados para que las siguientes expresiones representen funciones biyectivas.

I) Hallar las correspondientes funciones inversas dando sus dominios e imágenes.

II) Graficar en GeoGebra y comprobar la simetría de  $f$  y  $f^{-1}$  con respecto a la recta  $y = x$ .

a)  $f(x) = \sqrt{x - 1}$       b)  $g(x) = x^3 - 2$       c)  $h(x) = |x + 1|$       d)  $i(x) = (x - 1)(x + 1)$

e)  $j(x) = 2x - 1$       f)  $y = \frac{x+1}{x}$       g)  $y = \ln(x - 1)$       h)  $y = \sqrt{9 - x^2}$

**Ej.1-13**

Resolver los siguientes problemas de aplicación

- 1) Un elemento radiactivo decae de tal manera que, después de  $t$  días, el número de  $N$  miligramos presentes, está dado por:  $N(t) = 100 e^{-0.062t}$
- a) ¿Cuántos miligramos están presentes inicialmente?
- b) ¿Cuántos miligramos están presentes después de 10 días?

- 2) La sangre es una disolución reguladora. Cuando el dióxido de carbono es absorbido en los flujos de sangre, esta produce ácido carbónico y reduce los niveles de pH. El cuerpo compensa produciendo bicarbonato, que es una base débil, para neutralizar el ácido.

La ecuación Henderson-Hasselbach puede ser usada para calcular el pH de una disolución reguladora:  $pH = 6.1 + \log\left(\frac{800}{x}\right)$ , donde  $x$  es la presión parcial del dióxido de carbono en las arterias, medida en torr.

Encontrar la presión parcial del dióxido de carbono en las arterias si es que el pH es 7.2

- 3) La rapidez a la que se carga una batería es más lenta cuanto más cerca está la batería de su carga máxima  $C_0$ . El tiempo (en horas) necesario para cargar una batería completamente descargada a una carga  $C$  está dado por:

$$t = -k \ln\left(1 - \frac{C}{C_0}\right)$$

donde  $k$  es una constante positiva que depende de la batería. Para cierta batería,  $k=0.25$ . Si esta batería está completamente descargada, ¿cuánto tomará cargarla al 90% de su carga máxima  $C_0$ ?

**FUNCIONES ALGEBRAICAS HOMOGRÁFICAS**

**Ej.1-14**

- I) Verificar si las siguientes funciones son homográficas.
- II) Descomponerlas en la suma de una parte entera más otra fraccionaria.
- III) Determinar el dominio, intersección con los ejes coordenados, intervalos de positividad y negatividad, asíntotas vertical y horizontal. Graficar.

(a)  $y = \frac{3x+2}{x+1}$       (b)  $y = \frac{-4x-1}{2x-3}$       (c)  $y = \frac{x}{-3x-1}$

(d)  $y = \frac{x-1}{x}$       (e)  $y = \frac{1}{3x-9}$       (f)  $y = \frac{2x-4}{1+2x}$

## FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS CIRCULARES

### Ej.1-15

Emparejar las ecuaciones de las siguientes funciones circulares con las gráficas correspondientes, escribir en cada caso dominio, imagen, raíces o ceros, polos, paridad y asíntotas. Definir la función inversa de cada una, su dominio e imagen y esbozar su gráfica.

a)  $y = \text{sen}(x)$

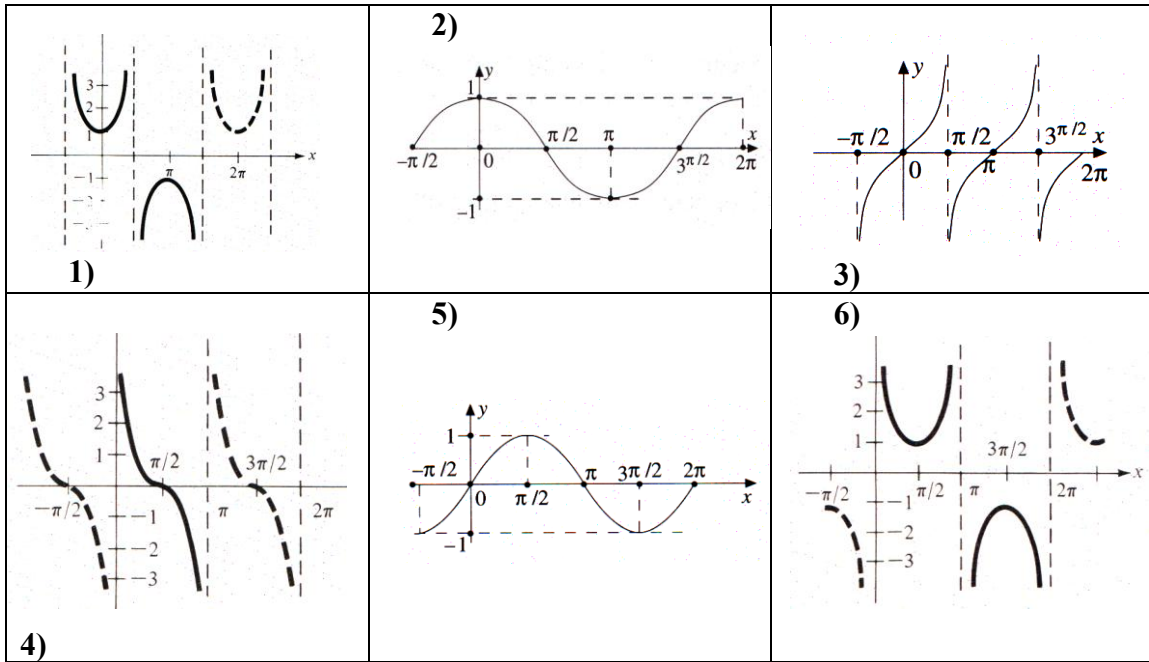
b)  $y = \text{cos}(x)$

c)  $y = \text{tg}(x)$

d)  $y = \text{cosec}(x)$

e)  $y = \text{sec}(x)$

f)  $y = \text{cotg}(x)$



### Ej.1-16

Graficar las siguientes funciones trigonométricas determinando: dominio, imagen, amplitud (si corresponde), período, punto máximo y mínimo (si corresponde), ceros o raíces y ordenada al origen.

(a)  $y = 2 \text{sen}(x - \pi) - 1$

(b)  $y = -\text{cos}(3x - \pi) + 1$

(c)  $y = \text{tan}(2x - \pi)$

### Ej.1-17

Determinar analíticamente el dominio de las siguientes funciones:

a)  $y = \text{arcsen}(2x + 1)$

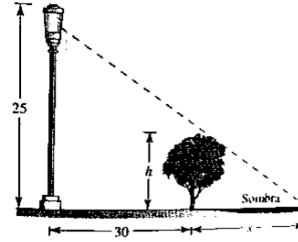
b)  $y = \text{arccos}(2x^2 - x)$

c)  $y = \text{arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right)$

### Ej.1-18

Resolver los siguientes problemas de aplicación:

- 1) Un árbol se planta a 30 pies de la base de un poste de luz que mide 25 pies de altura. Expresar la longitud de la sombra del árbol como una función de su altura.



- 2) Suponga que la función:  $T(t) = 50 + 10 \operatorname{sen} \left[ \frac{\pi}{12} (t - 8) \right]$  con  $0 \leq t \leq 24$ , es un modelo matemático de la temperatura Fahrenheit a las  $t$  horas después de medianoche durante cierto día de la semana.
- ¿Cuál es la temperatura a las 8 a.m.?
  - ¿A qué hora(s) se cumple  $T(t)=60$ ?
  - ¿A qué hora(s) se cumple  $T(t) = 0$ ?
  - Encontrar las temperaturas máxima y mínima, y los horarios en que ocurren.
  - Trazar la gráfica de  $T$ .

## FUNCIONES HIPERBÓLICAS

### Ej.1-19

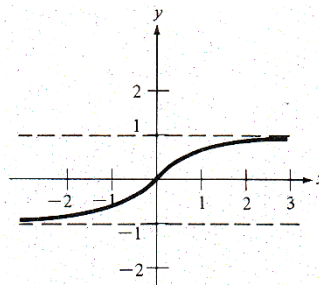
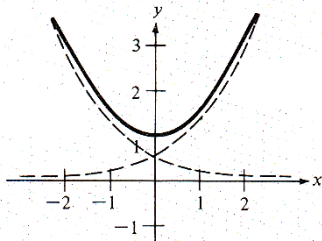
Emparejar las ecuaciones de las siguientes funciones hiperbólicas con las gráficas correspondientes. Escribir en cada caso dominio, imagen, raíces o ceros y paridad. Definir la función inversa de cada una y esbozar su gráfica considerando su simetría con respecto al eje  $y = x$ .

a)  $y = Sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

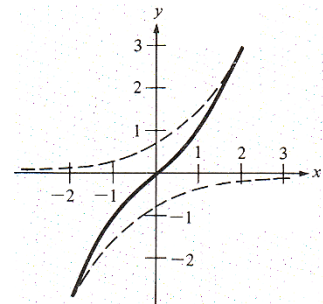
b)  $y = Ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

c)  $y = Th(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

1)



2)  
3)



### Ej.1-20

- Expresar las funciones  $\operatorname{ArgSh}(x)$  y  $\operatorname{ArgCh}(x)$  en términos de funciones logarítmicas.
- Si  $Sh(x) = -1/2$ , encuentre los valores del  $Ch(x)$  y  $Th(x)$ .
- Si  $Ch(x) = 3$ , encuentre los valores de las funciones  $Sh(x)$  y  $Th(x)$ .

**FUNCIONES DEFINIDAS POR INTERVALOS**

**Ej.1-21**

Realizar el gráfico de las siguientes funciones

$$a) f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \leq -3 \\ x & \text{si } x \in (-3; 2] \\ -x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 1 & \text{si } |x| < 2 \\ -4 & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{2x+4}{2x-2} & \text{si } -4 \leq x < 1 \\ 3x + 1 & \text{si } 1 \leq x < 3 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq \frac{\pi}{2} \\ \text{sen}(x) & \text{si } x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \\ -1 & \text{si } x > \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

**Ej.1-22**

Expresar las siguientes funciones en ramas. Indicar dominio y hallar analíticamente la intersección con los ejes coordenados, intervalos de positividad y negatividad.

a)  $y = 2|x + 3|$

b)  $y = \ln|x|$

c)  $y = |\ln(x)|$

d)  $y = |x^2 - 4|$

e)  $y = \sqrt[3]{|x + 1|} - 2$

f)  $y = x \cdot e^{-2|x|}$

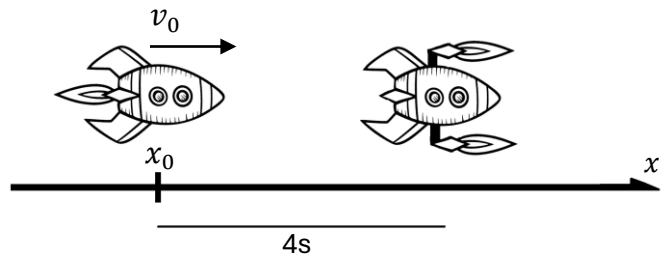
g)  $y = 2 \log_2|-x + 1| - 4$

**Ej.1-23**

Se comienza a observar una nave que se desplaza por el espacio en línea recta a una velocidad constante  $v_0$ , cuando pasa por el punto  $x_0$ . A los 4 segundos de ser observada, la nave enciende sus retropropulsores lo que la desacelera, y luego la mueve en sentido opuesto al que iba.

Datos:

- $v_0 = 2 \text{ m/s}$
- $a = -1,44 \text{ m/s}^2$



Ecuaciones de desplazamiento:

- MRU:  $x(t) = x_0 + v_0(t - t_0)$
- MRUV:  $x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$

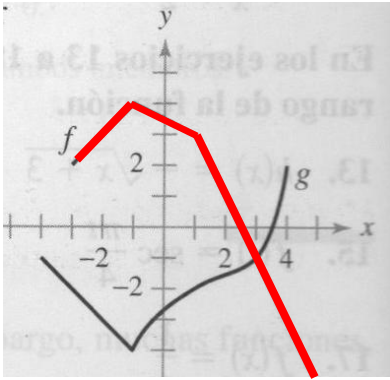
- Definir una función  $x(t)$  que represente la posición de la nave desde que se la observa por primera vez hasta que vuelve al punto  $x_0$ .
- Esbozar una gráfica de la función.

**OPERACIONES ENTRE FUNCIONES**

**SUMA, RESTA, PRODUCTO, COCIENTE, COMPOSICIÓN**

**Ej.1-24**

Utilizar las gráficas de  $f$  y  $g$  para evaluar cada expresión. Si el resultado es indefinido, explicar por qué.



a) $(f \circ g)(3)$	b) $g(f(2))$	c) $g(f(5))$
d) $(f \circ g)(-3)$	e) $(g \circ f)(-1)$	f) $f(g(-1))$

**Ej.1-25**

Dados los siguientes pares de funciones:

a)  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = \sqrt{x}$

b)  $f(x) = \ln(-x + 1)$  y  $g(x) = \frac{1}{x}$

c)  $f(x) = x + 1$  y  $g(x) = x^2 - 1$

d)  $f(x) = e^x + 1$  y  $g(x) = \sqrt[3]{2x}$

(A) Encontrar las funciones que resultan de:  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $f \cdot g$  y  $\frac{f}{g}$ , y sus dominios.

(B) Encontrar las funciones  $h(x) = f[g(x)]$  y  $t(x) = g[f(x)]$  y sus dominios. Si es necesario, restringir el dominio para realizar la composición.

(C) Encontrar  $(f + g)(4)$ ,  $(f - g)(4)$ ,  $(f \cdot g)(4)$ ,  $\left(\frac{f}{g}\right)(4)$ ,  $f[g(4)]$  y  $g[f(4)]$ .

**Ej.1-26**

Considerando que las funciones compuestas dadas corresponden a  $y = (f \circ g \circ h)(x)$ ,

I) Hallar las funciones simples  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  e  $y = h(x)$  y determinar sus dominios e imágenes:

a)  $y = \sqrt{\ln(x^2 + 1)}$

b)  $y = e^{\sqrt{\sin(x)}}$

c)  $y = \text{tg}(\sqrt[3]{e^x})$

II) Hallar la función inversa de cada una de las funciones del ítem I) y establecer su dominio.

**Ej.1-27**

Resolver los siguientes problemas de aplicación

1) En un cierto lago, el pez róbalo se alimenta del pez pequeño gobio, y el gobio se alimenta de plancton. Supongamos que el tamaño de la población del róbalo es una función  $f(n)$  del número  $n$  de gobios presentes en el lago, y el número de gobios es una función  $g(x)$  de la cantidad  $x$  de plancton en el lago. Expresar el tamaño de la población del róbalo como una función de la cantidad  $x$  de plancton, siendo

$$f(n) = 50 + \sqrt{\frac{n}{150}} \quad \text{y} \quad g(x) = 4x + 3$$

2) Se conoce que la población de ranas  $R$ , calculada en miles, en una determinada región depende de la población de insectos  $m$  ( medida en millones). La población de insectos  $I$  a su vez, varía con la cantidad de lluvia  $c$  (dada en cm). Si la población de ranas es:

$$R(m) = 65 + \sqrt{\frac{m}{8}} \quad \text{y la población de insectos es} \quad I(c) = 43c + 7.5$$

- a) Expresar la población de ranas como función de la lluvia
- b) Estimar la población de ranas cuando la lluvia es de 1.5 cm.

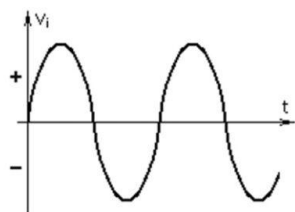
3) Un charco circular de agua se está evaporando y disminuye lentamente su tamaño. Después de  $t$  minutos, el radio del charco mide  $r(t) = \frac{18}{2t+3}$  pulgadas; en otras palabras, el radio es una función del tiempo. El área  $A$  del charco, por ser circular, es una función del radio.

- a) Expresar el área como función del tiempo.
- b) En ese caso, ¿Qué área cubre el charco después de 10 minutos?

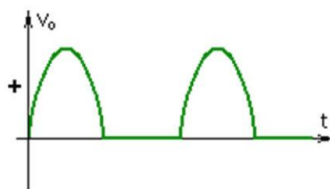
4)

En ocasiones, los ingenieros electrónicos se encuentran con situaciones en donde es necesario trabajar con señales eléctricas de valores únicamente positivos o cero. Esto presenta un problema, ya que las señales eléctricas más comunes son senoidales, representadas por funciones de la forma  $f(t) = \text{sen}(t)$ .

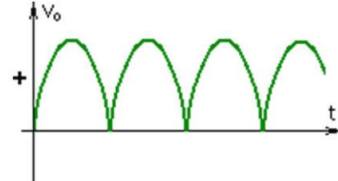
Para solucionarlo, se diseñaron dos circuitos que permiten rectificar (positivizar) las señales: el rectificador de media onda, y el rectificador de onda completa.



Onda sinusoidal de corriente alterna



Onda rectificada (media onda)



Onda rectificada (onda completa)

Uno de ellos “elimina” los semiciclos negativos de la señal, mientras que el otro los convierte en positivos, ambos sin alterar los semiciclos positivos.

Matemáticamente, este proceso se puede modelizar aplicando una composición entre las siguientes funciones a la señal senoidal:

$$g(t) = \sqrt{t} \quad y \quad h(t) = t^2$$

Las posibles composiciones son:

$$A(t) = (g \circ (h \circ f))(t) \quad y \quad B(t) = (h \circ (g \circ f))(t)$$

Responder:

- ¿Es posible realizar ambas composiciones? Si no es así, redefinir los conjuntos necesarios para que ambas funciones compuestas existan.
- Determinar la ecuación de cada función compuesta, indicando el dominio de cada una. Analizar qué función modeliza a cada rectificador.
- Uno de los dos rectificadores, podría haberse modelizado con la función  $i(t) = |t|$ , quedando la señal rectificada  $C(t) = |\text{sen}(t)|$ . ¿A qué rectificador corresponde la función  $i(t)$ ? ¿A cuál de las funciones compuestas es equivalente la función  $C(t)$ ?

## EJERCICIOS INTEGRADORES DE LA UNIDAD 1

### Ej.1)

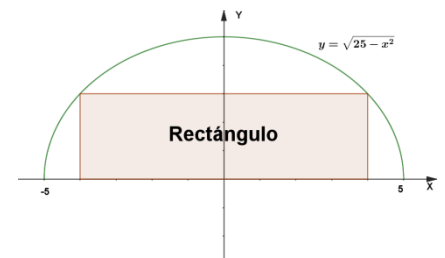
Hallar el valor de  $k$  para que se verifiquen las siguientes condiciones:

- $y = -\log_2(2kx - 1) + 3$ , su dominio es  $\{x \in \mathbf{R} / x > \frac{3}{2}\}$
- $y = 2\sqrt{-3kx + 1} - 4$ ; su intersección con el eje  $x$  es  $(-\frac{3}{2}; 0)$
- $y = \frac{x^2 - 3k}{x + 5}$ ; su intersección con el eje  $y$  es  $(0; 2)$

### Ej.2)

Un rectángulo tiene dos vértices sobre el eje  $x$  y dos vértices sobre el semicírculo cuya ecuación es

$$f(x) = \sqrt{25 - x^2} .$$



- a) Expresar el área  $A(x)$  del rectángulo como una función de  $x$ .
- b) Indicar el dominio e imagen de  $f(x)$
- c) Indicar el dominio e imagen de la función  $A(x)$
- d) Hallar la variación del área con respecto a la variación de  $x$  en el intervalo  $[1 ; 3]$ . Interpretar la variación.

**Ej.3)**

Indicar Verdadero o Falso. Justificar cada respuesta, en caso de ser falsa mostrar un contraejemplo.

- a) La ecuación  $x \cdot y^2 + x^2 = 3x$  determina una función.
- b) La gráfica de la función  $f(x) = \frac{2x^3+x}{x^2}$  es simétrica con respecto al origen de coordenadas.
- c) Si  $f(x) : [0 ; +\infty) \rightarrow [0 ; +\infty) / y = \sqrt{x}$  es biyectiva, su función inversa es:  
 $g(x) : \mathbf{R} \rightarrow [0 ; +\infty) / y = x^2$ .
- d) Si  $x \neq 3$  entonces  $\frac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \frac{x-2}{x+3}$ .
- e) Una función inyectiva nunca es par.
- f) Sea  $f: \mathbf{R} \rightarrow B$  una función, siendo  $B$  el conjunto imagen, entonces  $g(x) = f(x + c)$  tiene siempre el mismo conjunto imagen que  $f$ .
- g) Sea  $f: A \rightarrow B$  una función par, entonces  $g(x) = f(x) + c$  también será función par.
- h) Si la imagen de una función consta de un solo número, entonces su dominio también consta de un solo número.
- i) Existe una función par e impar a la vez, y es única.
- k) El dominio de la función  $f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$  es  $Domf = \mathbf{R} - \{0\}$ .
- n) Si  $f : [0; 2) \rightarrow [-\infty; 0)$  y es biyectiva, entonces se puede afirmar que el valor de  $f^{-1}(1)$  no está definido.
- o) El dominio de la composición  $f \circ g$  entre  $f(x) = \sqrt{x}$  y  $g(x) = -x^2$  es  $\mathbf{R} - \{0\}$ .
- p) La función  $f(x) = Ch(\ln x)$  es equivalente a la función  $g(x) = \frac{x^2+1}{2x}$  para todo  $x \in \mathbf{R}^+$ .

**Ej.4)**

Sea  $f(x) = \ln(x^2 - 1) - 2$  determinar:

- a) Dominio, imagen, intersección con los ejes de coordenadas, conjuntos de positividad y negatividad, paridad.
- b) Su relación inversa. ¿Es  $f$  una función biyectiva? Si es necesario restringir su dominio.
- c) Indicar dominio e imagen de  $f^{-1}(x)$ .
- d) Graficar  $f$  y  $f^{-1}$  y trazar el eje de simetría.
- e) Sea  $g(x) = 2x + 1$ , hallar  $(f \circ g)(x)$  y  $(g \circ f)(x)$ , si es necesario restringir el dominio e indicarlo.

**Ej.5)**

Al trabajar con señales, suele ser útil descomponerlas en su parte par y su parte impar, de forma que:

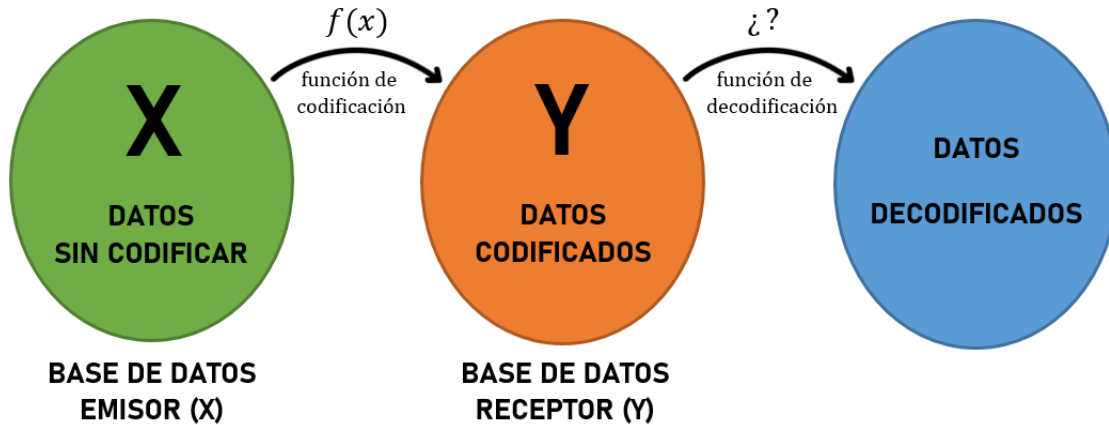
$$f(t) = f_{Par}(t) + f_{Impar}(t)$$

$$f_{Par}(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \qquad f_{Impar}(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

- a) Analizar qué condición de dominio debe tener una función  $f$  para poder descomponerse de esta forma.
- b) Hallar la parte par e impar de la señal  $f(t) = t^3 + t^2 + t + 1$
- c) Hallar la parte par e impar de la señal  $f(t) = \cos(t)$
- d) Hallar la parte par e impar de la señal  $f(t) = \sen(t)$
- e) Hallar la parte par e impar de la señal  $f(t) = e^t$
- f) Hallar la parte par e impar de la señal  $f(t) = \frac{t+1}{t^2+1}$
- g) Para cada señal, verificar que sus partes pares o impares cumplan las condiciones de paridad. Realizar la suma de las partes y verificar que da como resultado la señal original.

**Ej.6)**

Un sistema de transmisión de datos numéricos usa una función matemática  $f(x)$  para codificar la información que se envía. El receptor debe decodificarla para poder interpretarla y luego utilizarla. Ambos emisor y receptor tienen una base de datos propia para gestionar esta información numérica. El siguiente esquema puede ayudar a comprender el sistema:



- a) ¿Qué relación debe guardar la función de decodificación respecto a la de codificación  $f(x)$ ?
- b) Si al codificar dos elementos distintos de la base de datos del emisor ( $X$ ) resultan en el mismo valor numérico, ¿Con qué problema se encontraría el receptor al querer decodificarlos? Relacionar esta idea con un concepto matemático.
- c) Si al codificar todos los elementos de la base de datos del emisor ( $X$ ), quedan elementos en la base de datos del receptor ( $Y$ ) que no resultaron de codificar elementos de  $X$ , ¿Con qué problema se encontraría el receptor al querer decodificar alguno de estos elementos que no salieron de la función de codificación? Relacionar esta idea con un concepto matemático.
- d) Definir las características que debe tener una función de codificación para que la decodificación sea realizable.
- e) En un sistema, la base de datos del emisor es un conjunto  $X = \mathbf{R}^+ = (0; +\infty)$  y la del receptor es  $Y = \mathbf{R} = (-\infty; +\infty)$ .  
Se propone una función de codificación  $f(x) = \ln(x) + \ln(e \cdot x)$ . Determinar si cumple las condiciones para serlo. Si las cumple, hallar la función necesaria para decodificar la información. Graficar ambas funciones en una misma gráfica.
- f) Ayudándose con GeoGebra, analizar si existen datos que al ser codificados mantienen su valor numérico. Si es así, ¿Cuántos?

**ALGUNAS RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS**

**AUTOEVALUACIÓN**

**A-01**

a)  $\frac{x+4}{x-5}$     b)  $\frac{a+2b}{x+3}$     c) 1    d)  $\frac{2e^x}{x+2}$     e)  $\frac{1}{x(x+1)^2}$     f)  $-\frac{1}{(x+1)(x-1)}$

**A-02**

a)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$     b)  $\sqrt[3]{4}$     c)  $\frac{1+2\sqrt{2}}{7}$     d)  $\sqrt{x+1}$     e)  $\frac{x+\sqrt{x}}{x}$     f)  $x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}$

**A-03**

a) V b) F c) V

**A-04**

a = b

**TRABAJO PRÁCTICO N°1**

**1-01**

a) $S = \{0; 2\}$	b) $S = \{-3; 0\}$	c) $S = \emptyset$	d) $S = \{-5; -1\}$
e) $S = \{-1\}$	f) $S = \emptyset$	g) $S = \{-1; 0\}$	h) $S = \{1\}$
i) $S = [-7; -5)$	j) $S = (-\sqrt{2}; 0) \cup (0; \sqrt{2})$		
k) $S = (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$	l) $S = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$		
m) $S = \{-1; 1\}$	n) $S = \left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty]$		
o) $S = (0; +\infty)$	p) $S = (-\infty; -1)$		
q) $S = (-\infty; -13] \cup [17; +\infty)$			

**1-02**

N°	1	2	3	4	5	6	7	8
¿es función ?	No	Sí	Sí	No	Sí	Sí	No	Sí
Domf	-	$\mathbf{R} - \{-1; 1\}$	$(1; +\infty)$	-	$\mathbf{R}$	$(1; +\infty)$	-	$\mathbf{R}$
Imf	-	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	-	$[2; +\infty)$	$[0; +\infty)$	-	$\mathbf{R}$

$\cap \text{ eje } x$	-	(0, 0)	(4, 0)	-	$\emptyset$	(2, 0)	-	(-1, 0); (1, 0)
$\cap \text{ eje } y$	-	(0, 0)	$\emptyset$	-	(0, 3)	$\emptyset$	-	(0, 1)
$C^+$	-	(-1; 0) $\cup$ (1; $+\infty$ )	(4; $+\infty$ )	-	<b>R</b>	(1; 2) $\cup$ (2; $+\infty$ )	-	(-1; 1) $\cup$ (1; $+\infty$ )
$C^-$	-	( $-\infty$ ; -1) $\cup$ (0; 1)	(1; 4)	-	$\emptyset$	$\emptyset$	-	( $-\infty$ ; -1)
$I \uparrow$	-	$\emptyset$	(1; $+\infty$ )	-	(1; $+\infty$ )	(2; $+\infty$ )	-	No se puede determinar a simple vista
$I \downarrow$	-	<b>R</b> - {-1; 1}	$\emptyset$	-	( $-\infty$ ; 1)	(1; 2)	-	

**1-03**

a)  $f(2) = 4$  ;  $f(-1) = 2$  ;  $f(0) = 3$  ;  $f(3) = 0$

b)  $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(2)-f(-1)}{(2)-(-1)} = \frac{2}{3}$

c) i) {-2; 3} ii) {2} iii) (-2; 3) iv) ( $-\infty$ ; -2)  $\cup$  (3;  $+\infty$ ) v) (-3, -1); (4, -1); (3, 0)

**1-05**

a) Par b) Impar c) Par d) No tiene paridad e) Impar f) Impar g) Par  
h) Impar

**1-06**

$Domf = [-3; 3]$      $Imf = [-2; 2]$      $f^{-1}(2) = -3$

**1-07**

1) a)  $A(x) = 4x^2 - 36x + 80$     b)  $V(x) = 4x^3 - 36x^2 + 80x$

c)  $DomA = (0; 4)$      $ImA = (0; 80)$      $DomV = (0; 4)$      $ImV = (0; 320)$

2) a)  $VI \rightarrow d$  ;  $VD \rightarrow p$  ; b)  $p(d) = \frac{9,94}{100}d + 1$  ; c)  $p(50) = 5,97 \text{ atm}$

d)  $\Delta P = 4,97 \text{ atm}$     e)  $\Delta P = 4,97 \text{ atm}$

**1-08**

a)  $k = \frac{3}{2}$     b)  $k = \frac{1}{4}$     c)  $k = -\frac{1}{2}$     d)  $k = \frac{1}{2}$     e)  $k = 2$     f)  $k = 1$     g)  $k = -\frac{1}{2}$

**1-09**

l) a) b) c) d)  $Domf = \mathbf{R}$  ;  $Imf = \mathbf{R}^+$  e)  $Domf = \mathbf{R}$  ;  $Imf = \{y \in \mathbf{R}/y > -2\}$   
f)  $Domf = \mathbf{R}$  ;  $Imf = \{y \in \mathbf{R}/y > 1\}$

ll)  $a = 2$  ;  $C = 3$

**1-10**

Dominio	Intersección con el eje x	Intersección con el eje y	$C^+$	$C^-$
a) $[1; +\infty)$	(1;0)	No tiene	(1; $+\infty$ )	$\emptyset$
b) $[-1; 1]$	(-1;0) y (1;0)	(0;1)	(-1; 1)	$\emptyset$
c) $\mathbf{R}$	No tiene	(0; -4)	$\emptyset$	$\mathbf{R}$
d) $\mathbf{R}$	No tiene	(0; $\log_2 3$ )	$\mathbf{R}$	$\emptyset$
e) $(2; +\infty)$	(2,2; 0)	No tiene	(2,2; $+\infty$ )	(-2; 2,2)
f) $(-1; 1)$	(0;0)	(0;0)	$\emptyset$	$(-1,0) \cup (0;1)$
g) $(-\infty; 0)$	(-1; 0)	No tiene	$(-\infty; -1)$	(-1; 0)
h) $\mathbf{R}$	(3; 0) y (-1;0)	(0; 3)	(-1;3)	$(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$

**1-11**

a)  $\exists(x, y)$ ; b)  $(-1, 1)$ ; c)  $(\ln(3), 2)$ ; d)  $(0, 1)$ ; e)  $(x, -x - 2) \forall x \in (-\infty; -1]$ ; f)  $(5; 1)$

**1-12**

a) $Df = [1; +\infty)$ $If = \mathbf{R}_0^+$	b) $Df = \mathbf{R}$ $If = \mathbf{R}$	c) $Df_1 = (-\infty; -1]$ $Df_2 = [-1; +\infty)$ $If = \mathbf{R}_0^+$
d) $Df_1 = (-\infty; 0]$ $Df_2 = [0; +\infty)$ $If = [-1; +\infty)$	e) $Df = \mathbf{R}$ $If = \mathbf{R}$	f) $Df = \mathbf{R} - \{0\}$ $If = \mathbf{R} - \{1\}$
g) $Df = (1; +\infty)$ $If = \mathbf{R}$	h) $Df_1 = [-3; 0]$ $Df_2 = [0; 3]$ $If = [0; 3]$	

**1-13**

1) a)  $N(0) = 100 \text{ mg}$  ; b)  $N(10)=53.8 \text{ mg}$  2)  $x= 63,55$  3)  $t = 0.575646 \text{ h}$

**1.14**

Dominio	Intersección con ejes	Intervalos de positividad y negatividad	Asíntotas
a) $\mathbf{R} - \{-1\}$	$x=-2/3; y= 2$	$C^+ = \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right) \cup (-\infty; -1)$ $C^- = (-1; -2/3)$	AV: $x = -1$ AH: $y = 1$
b) $\mathbf{R} - \{3/2\}$	$x= -1/4; y= 1/3$	$C^+ = (-1/4; 3/2);$ $C^- = (3/2; +\infty) \cup (-\infty; -1/4)$	AV: $x = 3/2$ AH: $y = -2$
c) $\mathbf{R} - \{-1/3\}$	$x= 0; y= 0$	$C^+ = (-1/3; 0)$ $C^- = (0; +\infty) \cup (-\infty; -1/3)$	AV: $x = -\frac{1}{3}$ AH: $y = -\frac{1}{3}$
d) $\mathbf{R} - \{0\}$	$x=1; \nexists f(0)$	$C^+ = (0; +\infty) \cup (-\infty; 0)$ $C^- = (0; 1)$	AV: $x = 0$ AH: $y = 1$
e) $\mathbf{R} - \{3\}$	$\nexists \cap$ int eje x; $y=-1/9$	$C^+ = (3; +\infty)$ $C^- = (-\infty; 3)$	AV: $x = 3$ AH: $y = 0$
f) $\mathbf{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$	$x=2; y=4$	$C^+ = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (3; +\infty)$ $C^- = \left(-\frac{1}{2}; 3\right)$	AV: $x = -\frac{1}{2}$ AH: $y = 1$

**1-15**

Función	Seno (5)	Coseno (2)	Tangente (3)
Dominio	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\},$ $k \in \mathbf{Z}$
Imagen	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$\mathbf{R}$
Ceros	$\{x = k\pi\}, k \in \mathbf{Z}$	$\left\{x = \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}, k \in \mathbf{Z}$	$\{x = k\pi\}, k \in \mathbf{Z}$
Polos	No tiene	No tiene	$\left\{x = \frac{\pi}{2} + k\pi\right\},$

			$k \in Z$
Paridad	Impar	Par	Impar
Asíntotas	No tiene	No tiene	$\left\{x = \frac{\pi}{2} + k\pi\right\},$ $k \in Z$
Función	Cosecante (6)	Secante (1)	Cotangente (4)
Dominio	$\mathbf{R} - \{x = k\pi\}, k \in Z$	$\mathbf{R} - \left\{x = \frac{\pi}{2} + k\pi\right\},$ $k \in Z$	$\mathbf{R} - \{x = k\pi\},$ $k \in Z$
Imagen	$(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$	$(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$	$\mathbf{R}$
Ceros	No tiene	No tiene	$\left\{x = \frac{\pi}{2} + k\pi\right\},$ $k \in Z$
Polos	$\{x = k\pi\}, k \in Z$	$\left\{x = \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}, k \in Z$	$\{x = k\pi\}, k \in Z$
Paridad	Impar	Par	Impar
Asíntotas	$\{x = k\pi\}, k \in Z$	$\left\{x = \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}, k \in Z$	$\{x = k\pi\}, k \in Z$

### 1-16

Función	(a)	(b)	(c)
Dominio	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R} - \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right\}, k \in Z$
Imagen	$[-3; 1]$	$[0; 2]$	$\mathbf{R}$
Amplitud	$A = 2$	$A = 1$	No corresponde
Período	$T = 2\pi$	$T = \frac{2\pi}{3}$	$T = \frac{\pi}{2}$
Ceros	$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{array} \right\}, k \in Z$	$\left\{x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right\}, k \in Z$	$\left\{x = k\frac{\pi}{2}\right\}, k \in Z$
Ordenada al origen	$y = -1$	$y = 2$	$y = 0$

### 1-17

a)  $Df = [-1; 0]$     b)  $Df = [-1/2; 1]$     c)  $Df = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

**1-18**

1)  $S(h) = \frac{30h}{25-h}$ , con  $0 < h < 25$ ; 2) i)  $T(8) = 50$  F; ii)  $t = 14$  hs; iii) En ningún momento; iv) Mínima(2, 40), Máxima (14, 60)

**1-19**

Función	(3) $Sh(x)$	(1) $Ch(x)$	(2) $Th(x)$
Dominio	<b>R</b>	<b>R</b>	<b>R</b>
Imagen	<b>R</b>	$[1; +\infty)$	$(-1; 1)$
Ceros	$(0, 0)$	No tiene	$(0, 0)$
Paridad	Impar	Par	Impar

**1-20**

(a)  $ArgSh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$      $ArgCh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

(b)  $Ch(x) = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ;  $Th(x) = \frac{-\sqrt{5}}{5}$ ;    (c)  $Sh(x) = 2\sqrt{2}$ ;  $Th(x) = \frac{2}{3}\sqrt{2}$

**1-22**

Función	a) $y = 2 x + 3 $	b) $y = \ln x $	c) $y =  \ln x $	d) $y =  x^2 - 4 $
Dominio	<b>R</b>	<b>R</b> - {0}	<b>R</b> > 0	<b>R</b>
$\cap$ "x"	$(-3, 0)$	$(-1, 0); (1, 0)$	$(1, 0)$	$(-2, 0); (2, 0)$
$\cap$ "y"	$(0, 6)$	No tiene	No tiene	$(0, 4)$
$C^+$	<b>R</b> - {-3}	$(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$	$(0; 1) \cup (1; +\infty)$	<b>R</b> - {-2; 2}
$C^-$	$\emptyset$	$(-1; 0) \cup (0; 1)$	$\emptyset$	$\emptyset$
Función	e) $y = \sqrt[3]{ x + 1 } - 2$	f) $y = xe^{-2 x }$	g) $y = 2 \log_2  -x + 1  - 4$	
Dominio	<b>R</b>	<b>R</b>	<b>R</b> - {1}	
$\cap$ "x"	$(-9, 0); (7, 0)$	$(0, 0)$	$(-3, 0); (5, 0)$	
$\cap$ "y"	$(0, -1)$	$(0, 0)$	$(0, -4)$	
$C^+$	$(-\infty; -9) \cup (7; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$	
$C^-$	$(-9; 7)$	$(-\infty; 0)$	$(-3; 1) \cup (1; 5)$	

**1-23**

a)  $\begin{cases} 2t & \text{si } 0 \leq t < 4 \\ 8 + 2(t - 4) - 0.72(t - 4)^2 & \text{si } 4 \leq t \leq 9 \end{cases}$

**1-24**

- a)  $(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(-1) = 4$       b)  $g(f(2)) = g(1) = -2$   
 c)  $g(f(5)) = g(-5) = \text{No está definido}$       d)  $(f \circ g)(-3) = f(g(-3)) = f(-2) = 3$   
 e)  $(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(4) = 2$       f)  $f(g(-1)) = f(-4) = \text{No está definida}$

**1-25**

A)

	$f + g$	$f - g$	$f \cdot g$	$f/g$
Función (a)	$y = x^2 + \sqrt{x}$	$y = x^2 - \sqrt{x}$	$y = x^2\sqrt{x}$	$y = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$
Dominio	$\mathbf{R} \geq 0$	$\mathbf{R} \geq 0$	$\mathbf{R} \geq 0$	$\mathbf{R} > 0$
Función (b)	$y = \ln(-x + 1) + \frac{1}{x}$	$y = \ln(-x + 1) - \frac{1}{x}$	$y = \frac{\ln(-x + 1)}{x}$	$y = \frac{\ln(-x + 1)}{\frac{1}{x}}$
Dominio	$(-\infty; 0) \cup (0; 1)$	$(-\infty; 0) \cup (0; 1)$	$(-\infty; 0) \cup (0; 1)$	$(-\infty; 0) \cup (0; 1)$
Función (c)	$y = x + x^2$	$y = x - x^2 + 2$	$y = x^3 + x^2 - x - 1$	$y = \frac{x + 1}{x^2 - 1}$
Dominio	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R} - \{-1; 1\}$
Función (d)	$y = e^x + 1 + \sqrt[3]{2x}$	$y = e^x + 1 - \sqrt[3]{2x}$	$y = (e^x + 1)\sqrt[3]{2x}$	$y = \frac{(e^x - 1)}{\sqrt[3]{2x}}$
Dominio	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R} - \{0\}$

B)

	$h(x) = f[ g(x) ]$	$t(x) = g[ f(x) ]$
Función (a)	$y = \sqrt{x^2} = x$	$y = \sqrt{x^2} =  x $
Dominio	$\mathbf{R} \geq 0$	$\mathbf{R}$
Función (b)	$y = \ln\left(-\frac{1}{x} + 1\right) = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$	$y = -\frac{1}{\ln(-x+1)}$
Dominio	$(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; 1)$
Función (c)	$y = (x^2 - 1) + 1 = x^2$	$y = (x + 1)^2 - 1 = x^2 + 2x$
Dominio	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
Función (d)	$y = e^{\sqrt[3]{2x}} + 1$	$y = \sqrt[3]{2(e^x + 1)}$
Dominio	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$

C)

	$(f + g)(4)$	$(f - g)(4)$	$(f \cdot g)(4)$	$(f/g)(4)$	$f[g(4)]$	$g[f(4)]$
Función (a)	18	14	32	8	4	4
Función (b)	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\ln(3/4)$	$\nexists$
Función (c)	20	-10	75	1/3	16	24
Función (d)	$e^4 + 3$	$e^4 - 1$	$2(e^4 + 1)$	$\frac{e^4 + 1}{2}$	$e^2 + 1$	$\sqrt[3]{2(e^4 + 1)}$

**1-26**

I) a)  $f(x) = \sqrt{x}$  ;  $g(x) = \ln(x)$  ;  $h(x) = x^2 + 1$

$Dom(f \circ g \circ h) = \mathbb{R}$  ;  $Im(f \circ g \circ h) = [0; +\infty)$

b)  $f(x) = e^x$  ;  $g(x) = \sqrt{x}$  ;  $h(x) = \text{sen}(x)$

$Dom(f \circ g \circ h) = \{x \in \mathbb{R} / 2k\pi \leq x \leq (2k + 1)\pi\}$  ;  $Im(f \circ g \circ h) = [1; e]$

c)  $f(x) = \text{tg}(x)$  ;  $g(x) = \sqrt[3]{x}$  ;  $h(x) = e^x$

$Dom(f \circ g \circ h) = \left\{x \in \mathbb{R} / x \neq 3 \ln\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$  ;  $Im(f \circ g \circ h) = \mathbb{R}$

II) a)  $(f \circ g \circ h)^{-1}(x) = \sqrt{e^{x^2} - 1}$  ;  $Dom(f \circ g \circ h)^{-1} = [0; +\infty)$

b)  $(f \circ g \circ h)^{-1}(x) = \arcsen[\ln^2(x)]$  ;  $Dom(f \circ g \circ h)^{-1} = [1; e]$

c)  $(f \circ g \circ h)^{-1}(x) = \ln(\arctg^3(x))$  ;  $Dom(f \circ g \circ h)^{-1} = (0; +\infty)$

**1-27**

$$1) h(x) = 50 + \sqrt{\frac{4x+3}{150}} \quad 2) a) h(c) = 65 + \sqrt{\frac{43c+7.5}{8}} \quad 3) a) h(t) = \pi \left(\frac{18}{2t+3}\right)^2$$

$$b) h(1.5) = 68000 \quad b) h(10) = 1.941 \text{ pulg}^2$$

4) a)  $A(t)$  puede realizarse. Para realizar la composición  $B(t)$  es necesario redefinir el dominio.

Para  $B$  :  $Domf^* = \{t \in \mathbf{R} / 2k\pi \leq t \leq (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}\}$

b)  $A : \mathbf{R} \rightarrow [0; 1] / A(t) = \sqrt{(\text{sen } t)^2}$

$B : \{t \in \mathbf{R} / (2k)\pi \leq t \leq (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}\} \rightarrow [0; 1] / B(t) = (\sqrt{\text{sen } t})^2$

$A$  : Rectificador de onda completa;  $B$  : Rectificador de media onda.

c)  $C(t) = A(t)$ , el rectificador de onda completa se puede modelizar como  $A(t) = |\text{sen}(t)|$

### EJERCICIOS INTEGRADORES

#### Ej.1)

a)  $k = -\frac{1}{3}$     b)  $k = \frac{2}{3}$     c)  $-\frac{10}{3}$

#### Ej.2)

a)  $A(x) = 2x\sqrt{25-x^2}$     b)  $Domf = [-5; 5]$      $Imf = [0; 5]$

c)  $DomA = (0; 5)$      $ImA = (0; 25]$     d)  $\frac{\Delta A}{\Delta x} = \frac{A(3)-A(1)}{3-1} = \frac{24-4\sqrt{6}}{2} = 12 - 2\sqrt{6}$

#### Ej.3)

a) F    b) V    c) F    d) F    e) V    f) V    g) V    h) F    i) V    j) F    l) V    m) F    n) V

#### Ej.4)

a)  $Domf = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$  ;  $Imf = \mathbf{R}$  ;

$\cap x : (\sqrt{e^2+1}, 0) ; (-\sqrt{e^2+1}, 0)$  ;  $\cap y$  : No tiene ; Función Par

$C^+ = (-\infty; -\sqrt{e^2+1}) \cup (\sqrt{e^2+1}; +\infty)$  ;  $C^- = (-\sqrt{e^2+1}; -1) \cup (1; \sqrt{e^2+1})$

b)  $f$  no es biyectiva, se redefine el dominio  $\rightarrow Domf^* = (1; +\infty)$  ;  $f^{-1}(x) = \sqrt{e^{x+2}+1}$

c)  $Domf^{-1} = \mathbf{R}$  ;  $Imf^{-1} = (1; +\infty)$

e)  $(f \circ g)(x) = \ln[(2x+1)^2 - 1] - 2 = \ln(4x^2 + 4x) - 2$

$$\text{Dom}(f \circ g) = (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$$

$$(g \circ f)(x) = 2(\ln(x^2 - 1) - 2) + 1 = 2 \ln(x^2 - 1) - 3$$

$$\text{Dom}(g \circ f) = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

**Ej.5)**

a) El dominio debe ser simétrico respecto del 0  $\rightarrow \text{Dom}f = [-a; a]$

b)  $f_{\text{Impar}}(t) = t^3 + t$  ;  $f_{\text{Par}}(t) = t^2 + 1$

c)  $f_{\text{Impar}}(t) = 0$  ;  $f_{\text{Par}}(t) = \cos(t)$

d)  $f_{\text{Impar}}(t) = \text{sen}(t)$  ;  $f_{\text{Par}}(t) = 0$

e)  $f_{\text{Impar}}(t) = \text{Sh}(x)$  ;  $f_{\text{Par}}(t) = \text{Ch}(x)$

f)  $f_{\text{Impar}}(t) = \frac{t}{t^2+1}$  ;  $f_{\text{Par}}(t) = \frac{1}{t^2+1}$

**Ej.6)**

a) La función de decodificación debe ser la inversa de la de codificación.

b) No habría una respuesta única en la decodificación. Inyectividad.

c) No obtendría un valor de  $X$  asociado a este valor de  $Y$ . Sobreyectividad.

d) La función debe ser invertible. Biyectiva: inyectiva y sobreyectiva a la vez.

e)  $f : (0; +\infty) \rightarrow \mathbf{R} / f(x) = 2 \ln(x) + 1$  , es biyectiva.

$$f^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow (0; +\infty) / f^{-1}(x) = e^{\frac{x-1}{2}}$$

f) Existen dos datos (dos intersecciones de  $f$  con la recta identidad) que al ser codificados mantienen su valor numérico.