

ORDEN DE CONTACTO ENTRE DOS CURVAS

Diremos que dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen orden de contacto “ n ” (n entero no negativo) en $x = a$ si

$$f(a) = g(a)$$

$$f'(a) = g'(a)$$

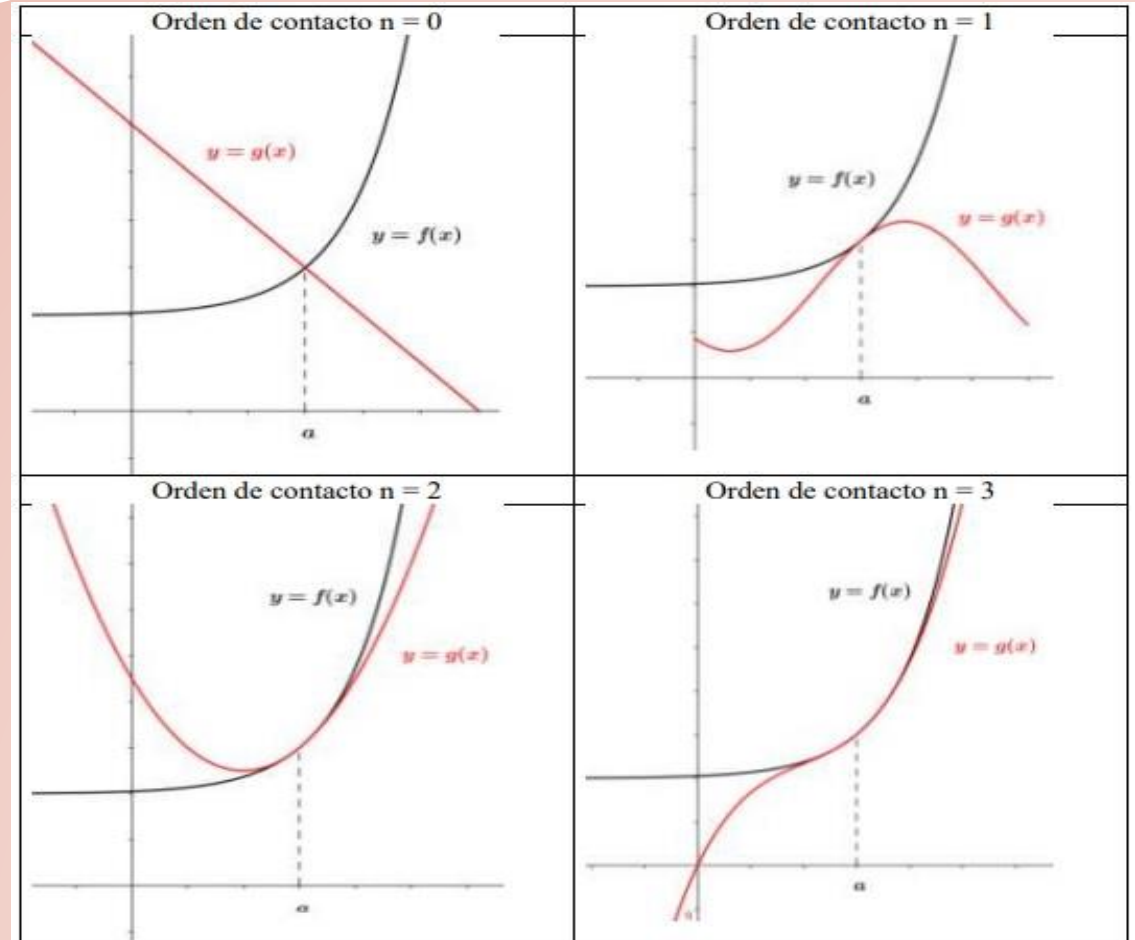
$$f''(a) = g''(a)$$

.....

$$f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a)$$

$$f^{(n+1)}(a) \neq g^{(n+1)}(a)$$

Veamos gráficamente, como al aumentar el orden de contacto entre dos curvas en un punto, son cada vez “**más parecidas**” en el entorno de ese punto:



EJEMPLO 1

Determinar el orden de contacto entre $f(x) = Chx$ y $g(x) = \frac{x^2}{2} + 1$ en el **origen**.

Iremos verificando igualdad entre funciones y sus derivadas hasta llegar a un orden de derivabilidad que sean diferentes en $x = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= Chx & f(0) &= 1 \\ g(x) &= \frac{x^2}{2} + 1 & g(0) &= 1 \end{aligned}$$

(Son iguales)



COMPARTEN **EL PUNTO**

$$\begin{aligned} f'(x) &= Shx & f'(0) &= 0 \\ g'(x) &= x & g'(0) &= 0 \end{aligned}$$

(Son iguales)



COMPARTEN **EL PUNTO**
Y **LA PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE**
TIENEN ORDEN DE CONTACTO **1**

$$\begin{aligned} f''(x) &= Chx & f''(0) &= 1 \\ g''(x) &= 1 & g''(0) &= 1 \end{aligned}$$

(Son iguales)



COMPARTEN **EL PUNTO**, **m_t** Y **LA CURVATURA**
TIENEN ORDEN DE CONTACTO **2** O DE PARABOLA OSCULATRIZ

$$\begin{aligned} f'''(x) &= Shx & f'''(0) &= 0 \\ g'''(x) &= 0 & g'''(0) &= 0 \end{aligned}$$

(Son iguales)



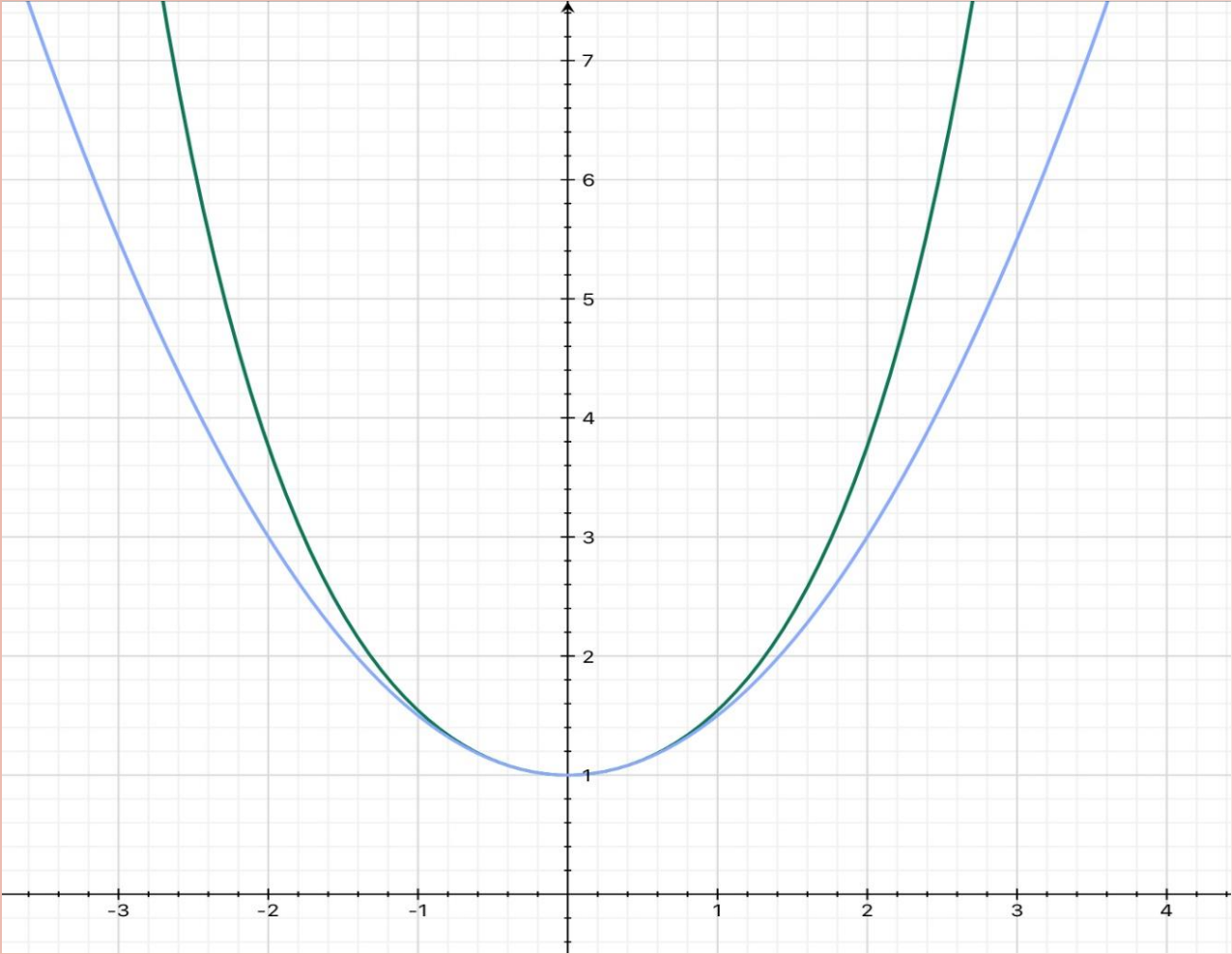
TIENEN ORDEN DE CONTACTO **3**

$$\begin{aligned} f^{iv}(x) &= Chx & f^{iv}(0) &= 1 \\ g^{iv}(x) &= 0 & g^{iv}(0) &= 0 \end{aligned}$$

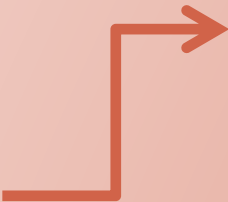
(Son distintas)

Por lo tanto, $f(x)$ y $g(x)$ tienen
orden de contacto **3** en $x = 0$

GRAFICAMENTE

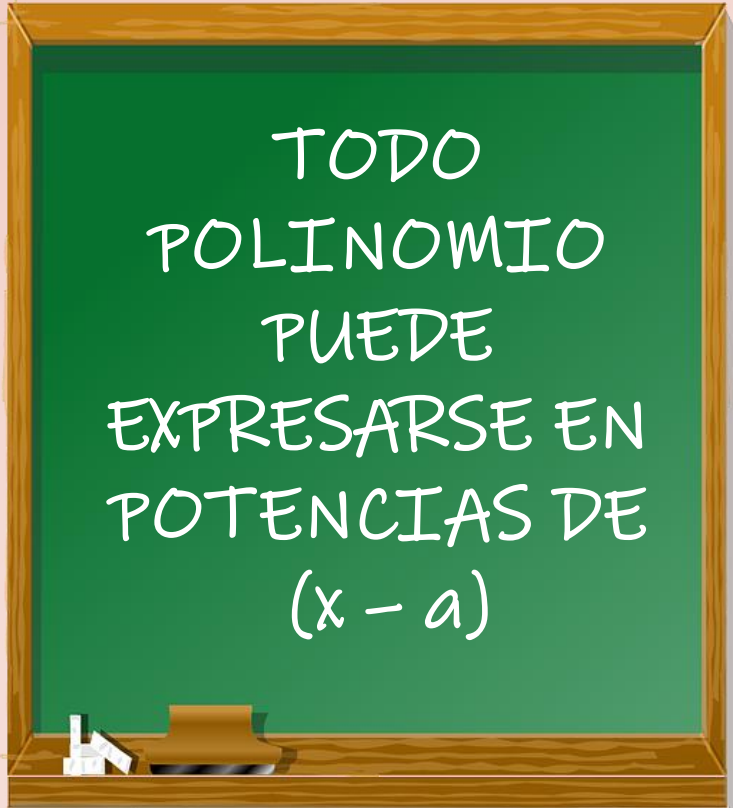


Como vimos, cuanto mayor es el orden de contacto entre dos funciones,
mas parecidas son en el Entorno del punto



Este concepto de contacto entre curvas nos permite ver que podríamos
reemplazar una función POR OTRA en las proximidades de un punto.

Dentro de las funciones mas sencillas, están los
POLINOMIOS



TODO
POLINOMIO
PUEDE
EXPRESARSE EN
POTENCIAS DE
 $(x - a)$

EJEMPLO

$$P(x) = x^3 + 3x - 1$$

TODO POLINOMIO $P(x)$ PUEDE EXPRESARSE CON POTENCIAS DE $x-a$

→ VAMOS A EXPRESAR AL POLINOMIO $P(x) = x^3 + 3x - 1$ EN POTENCIA DE 2

1)

	1	0	3	-1
2		2	4	14
	1	2	7	13

$$P(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 7) + 13$$

$$x^2 + 2x + 7 = (x - 2)(x + 4) + 15$$

2)

	1	2	7
2		2	8
	1	4	15

$$(x - 2)[x - 2 + 6] + 15$$

$$(x - 2)[(x - 2) + 6] + 15$$

$$x^2 + 2x + 7 = (x - 2)^2 + 6(x - 2) + 15$$

Vuelvo al polinomio

$$P(x) = (x - 2)[(x - 2)^2 + 6(x - 2) + 15] + 13$$

$$= \left[\begin{array}{l} P(x) = x^3 + 3x - 1 \end{array} \right.$$

$$= \left[\begin{array}{l} P(x) = 1(x - 2)^3 + 6(x - 2)^2 + 15(x - 2) + 13 \end{array} \right.$$

$$= \left[\begin{array}{l} P(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \dots + A_nx^n \end{array} \right.$$

$$= \left[\begin{array}{l} P(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + a_3(x - a)^3 + \dots + a_n(x - a)^n \end{array} \right.$$

$$P_3(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3$$

$$P(x) = 13 + 15(x - 2) + 6(x - 2)^2 + 1(x - 2)^3$$

$f(x) = x^3 + 3x - 1$	$\longrightarrow$	$f(2) = 8 + 6 - 1 = 13$
$f'(x) = 3x^2 + 3$	$\longrightarrow$	$f'(2) = 12 + 3 = 15$
$f''(x) = 6x$	$\longrightarrow$	$f''(2) = 6 \cdot 2 = 12$
$f'''(x) = 6$	$\longrightarrow$	$f'''(2) = 6$

$$1! = 1 = 1$$

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$a_0 = f(a) \quad \frac{f(2)}{0!} = 13$$

$$a_1 = f'(a) \quad \frac{f'(2)}{1!} = 15$$

$$a_2 = \frac{f''(a)}{2!} \quad \frac{12}{2} = 6$$

$$a_3 = \frac{f'''(a)}{3!} \quad \frac{6}{6} = 1$$

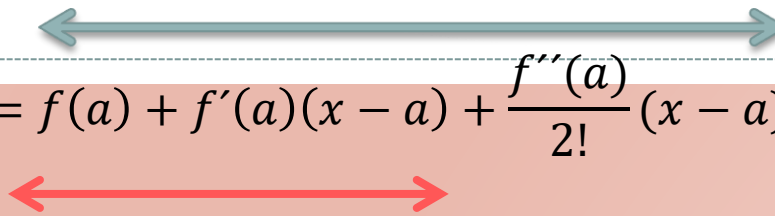
$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots \dots \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

Llamado polinomio de Taylor de grado n de f(x) en x = a

Si el punto es x = 0, el polinomio se llama de Mac Laurin y tiene la forma

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots \dots \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

POLINOMIO DE TYLOR DE GRADO n ORDEN DE CONTACTO n CON LA FUNCION


$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

EL POLINOMIO DE TAYLOR DE ORDEN DE CONTACTO 1, ES LA EC. DE LA RECTA TANGENTE

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2$$

EL POLINOMIO DE TAYLOR DE ORDEN DE CONTACTO 2, ES LA PARABOLA OSCULATRIZ

EJEMPLO

$$f(x) = \text{sen}(x + 1) \quad a = -1 \quad n = 5$$

Para calcular el polinomio de orden cinco necesitamos hasta la quinta derivada de la función inclusive en $a = -1$, por lo tanto:

$f(x) = \text{sen}(x + 1)$	$f(-1) = 0$
$f'(x) = \cos(x + 1)$	$f'(-1) = 1$
$f''(x) = -\text{sen}(x + 1)$	$f''(-1) = 0$
$f'''(x) = -\cos(x + 1)$	$f'''(-1) = -1$
$f^{(IV)}(x) = \text{sen}(x + 1)$	$f^{(IV)}(-1) = 0$
$f^{(V)}(x) = \cos(x + 1)$	$f^{(V)}(-1) = 1$

Luego reemplazamos en la fórmula del Polinomio de Taylor:

$$P_5(x) = f(-1) + f'(-1)(x + 1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x + 1)^2 + \frac{f'''(-1)}{3!}(x + 1)^3 + \frac{f^{(4)}(-1)}{4!}(x + 1)^4 + \frac{f^{(5)}(-1)}{5!}(x + 1)^5$$
$$P_5(x) = 0 + 1 \cdot (x + 1) + 0 - \frac{1}{3!}(x + 1)^3 + 0 + \frac{1}{5!}(x + 1)^5 = (x + 1) - \frac{1}{3!}(x + 1)^3 + \frac{1}{5!}(x + 1)^5$$

Este polinomio aproxima a la función en un entorno de $x = -1$.

Nos puede servir para calcular algún valor aproximado, por ejemplo, el de $\text{sen}(0.1)$, en este caso:

$$\text{sen}(x + 1) \approx (x + 1) - \frac{1}{3!}(x + 1)^3 + \frac{1}{5!}(x + 1)^5 = P_5(x)$$

$$\text{sen}(0.1) \approx (-0.9 + 1) - \frac{1}{3!}(-0.9 + 1)^3 + \frac{1}{5!}(-0.9 + 1)^5 = 0.0998334$$



En la calculadora

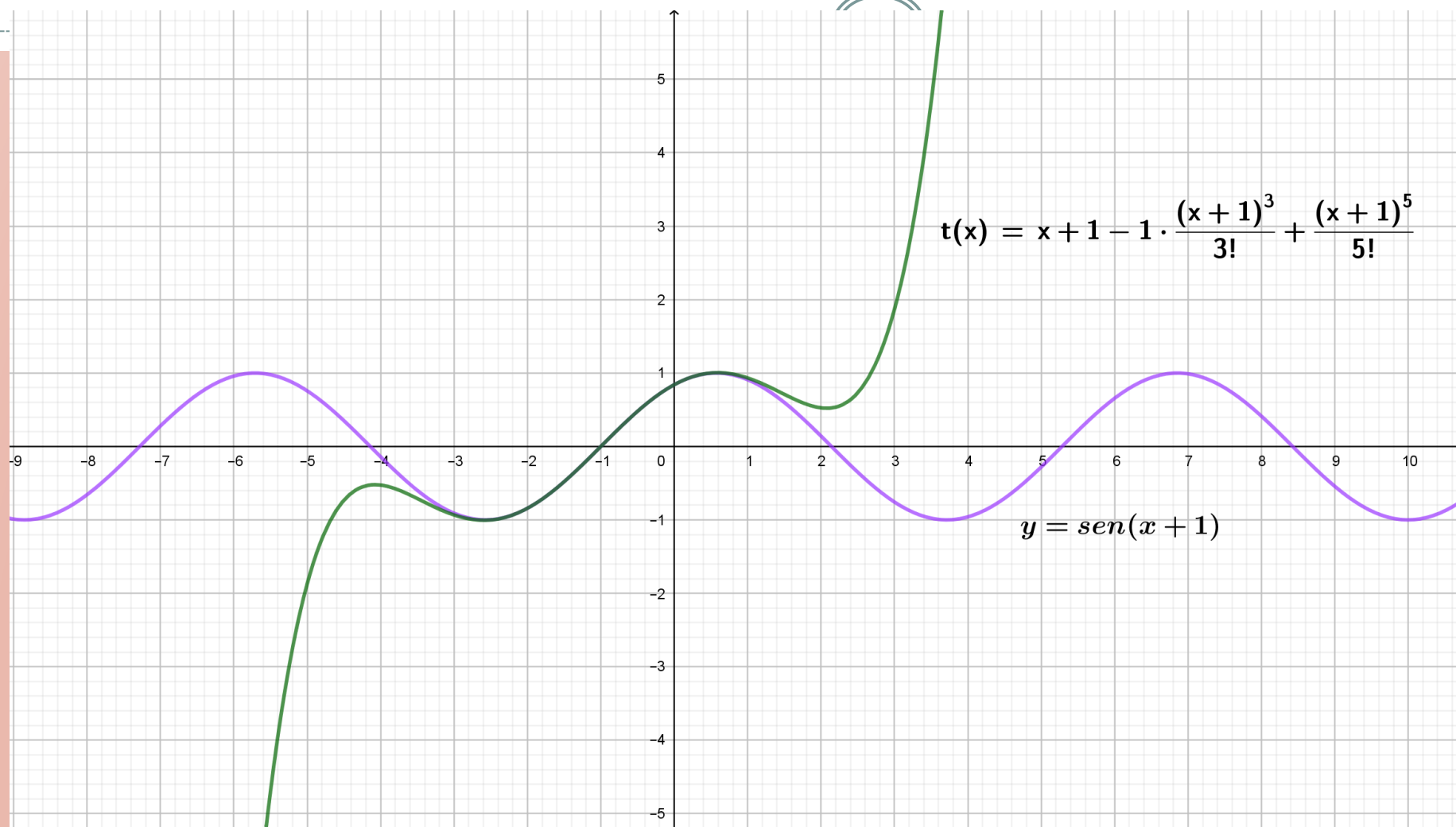
$$\text{sen}(0.1) = 0.0998833416647$$

$$x + 1 = 0.1 \Leftrightarrow x = 0.1 - 1 \Leftrightarrow x = -0.9$$



$$f(x) = \text{sen}(x + 1)$$

$$P(x) = (x + 1) - \frac{1}{3!}(x + 1)^3 + \frac{1}{5!}(x + 1)^5$$



RESTO O TÉRMINO COMPLEMENTARIO

Si $f(x)$ tiene n derivadas en $x = a$; el polinomio de Taylor de **grado n** en $x = a$ aproxima a dicha función en un entorno del punto.

Cuanto mayor es n mejor es la aproximación de la función al polinomio, el error de aproximación que se comete lo llamaremos **TÉRMINO COMPLEMENTARIO** o **RESTO DE LAGRANGE**:

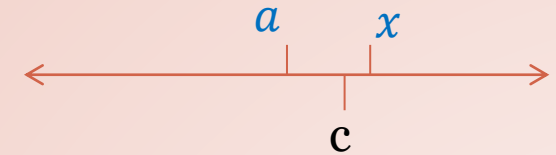
Solo si la función fuera polinómica la aproximación sería exacta

$$R_n(x) = | f(x) - P_n(x) | \quad \text{ó} \quad f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

Se puede demostrar que si la $f(x)$ tiene $n+1$ derivadas en un entorno de $x = a$, ese término complementario tiene la forma:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

con c entre a y x .



Esta forma se llama forma de Lagrange para el resto o término complementario.

EJEMPLO

Calcular el polinomio de Taylor de orden tres para la función $g(x) = x + \text{sen}(x - 1)$ en $a = 1$, utilizarlo para calcular el valor de $g(0.9)$ y **acotar** el error que se comete utilizando la expresión del resto.

➤ Primero hallemos el polinomio de grado tres de $g(x)$ en $a = 1$

➤ La derivada de orden 4 la calculamos para poder hallar el resto (**PERO NO LA EVALUAMOS EN $a = 1$**)

$$g(x) = x + \text{sen}(x - 1) \quad g(1) = 1$$

$$g'(x) = 1 + \cos(x - 1) \quad g'(1) = 2$$

$$g''(x) = -\text{sen}(x - 1) \quad g''(1) = 0$$

$$g'''(x) = -\cos(x - 1) \quad g'''(1) = -1$$

$$g^{(4)}(x) = \text{sen}(x - 1)$$

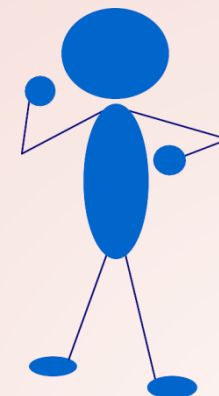
Armamos $P_3(x)$

$$P_3(x) = g(1) + g'(1)(x - 1) + \frac{g''(1)}{2}(x - 1)^2 + \frac{g'''(1)}{6}(x - 1)^3$$

$$P_3(x) = 1 + 2(x - 1) - \frac{1}{6}(x - 1)^3$$

Vamos a aproximar el valor pedido:

$$g(0.9) \approx 1 + 2(0.9 - 1) - \frac{1}{6}(0.9 - 1)^3 = 0.800167$$



El termino complementario nos permite acotar EL ERROR, aplicamos la fórmula de Lagrange:

$$R_3(x) = \frac{g^{(4)}(\mathbf{c})}{4!} (x - 1)^4 = \frac{\text{sen}(\mathbf{c} - 1)}{4!} (x - 1)^4$$

con **c** entre **x** y **1**.

Si **x = 0.9** $\Rightarrow$

$$R_3(0.9) = \frac{\text{sen}(\mathbf{c} - 1)}{4!} (0.9 - 1)^4 = \frac{\text{sen}(\mathbf{c} - 1)}{24} (0.1)^4$$

0.9 < c < 1

Como no sabemos cuánto vale **c**, lo que haremos es **acotarlo**, es decir pensar cuál sería el error más grande posible. En este caso de los tres factores que forman parte de R_3 , el único que se puede acotar es **sen (c-1)**, ya que los demás son valores determinados. Sabemos que la función seno es una **función acotada** por $1 \Rightarrow$

1

$$|R_3(0.9)| = \left| \frac{\text{sen}(c - 1)}{4!} (0.1)^4 \right| = \frac{|\text{sen}(c - 1)|}{24} (0.1)^4 \leq \frac{1 \cdot (0.1)^4}{24} = 4.167 \times 10^{-6}$$

$$|\text{sen}(c - 1)| \leq 1$$



Es decir que el valor exacto de $g(0.9)$ se encuentra en ese entorno

$$\begin{aligned} &\Rightarrow |g(0.9) - P_3(0.9)| < 4.167 \times 10^{-6} \Rightarrow \\ &-4.167 \times 10^{-6} < g(0.9) - P_3(0.9) < 4.167 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

$$-4.167 \times 10^{-6} + P_3(0.9) < g(0.9) < 4.167 \times 10^{-6} + P_3(0.9)$$

$$\mathbf{0.800163 < g(0.9) < 0.800171}$$