Algunas transformaciones especiales

Transformaciones geométricas

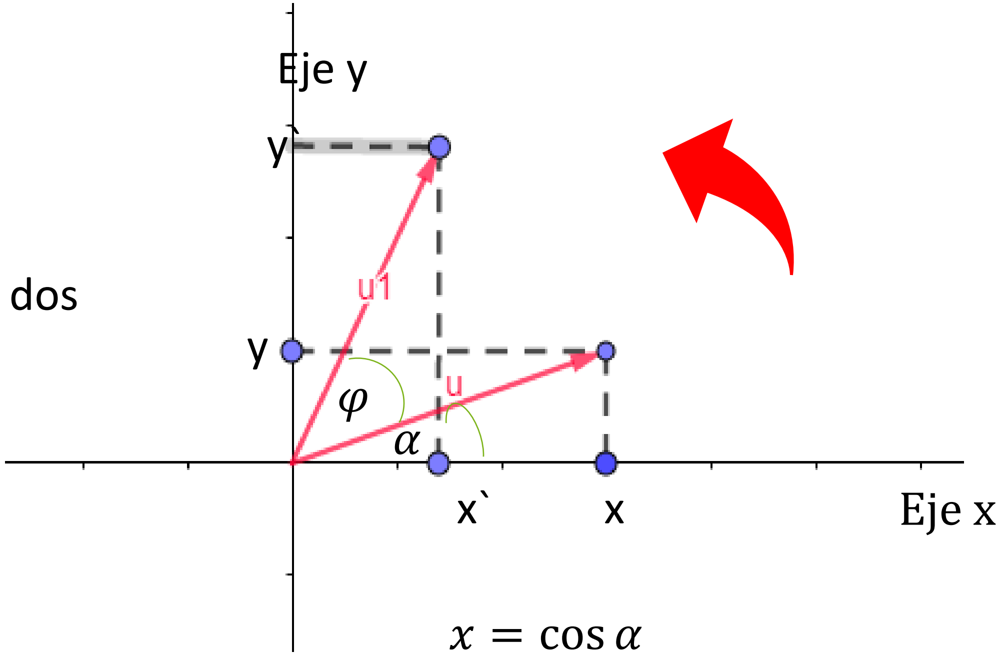
TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS EN EL PLANO

ROTACIÓN DE ÁNGULO φ

$$f(x,y) = (x`, y`)$$

$$f(x,y) = (\cos(\varphi + \alpha)\ , \sin(\varphi + \alpha))$$

Aplicando coseno y seno de la suma de dos ángulos.



$$f(x,y) = (\cos\varphi \cdot \cos\alpha - \sin\varphi \cdot \sin\alpha\ , \sin\varphi \cdot \cos\ \alpha + \sin\alpha \cdot cos\varphi$$

$$f(\ x,y) = (x\cos\varphi - y\sin\varphi\ , x\sin\varphi + y\cos\varphi)$$

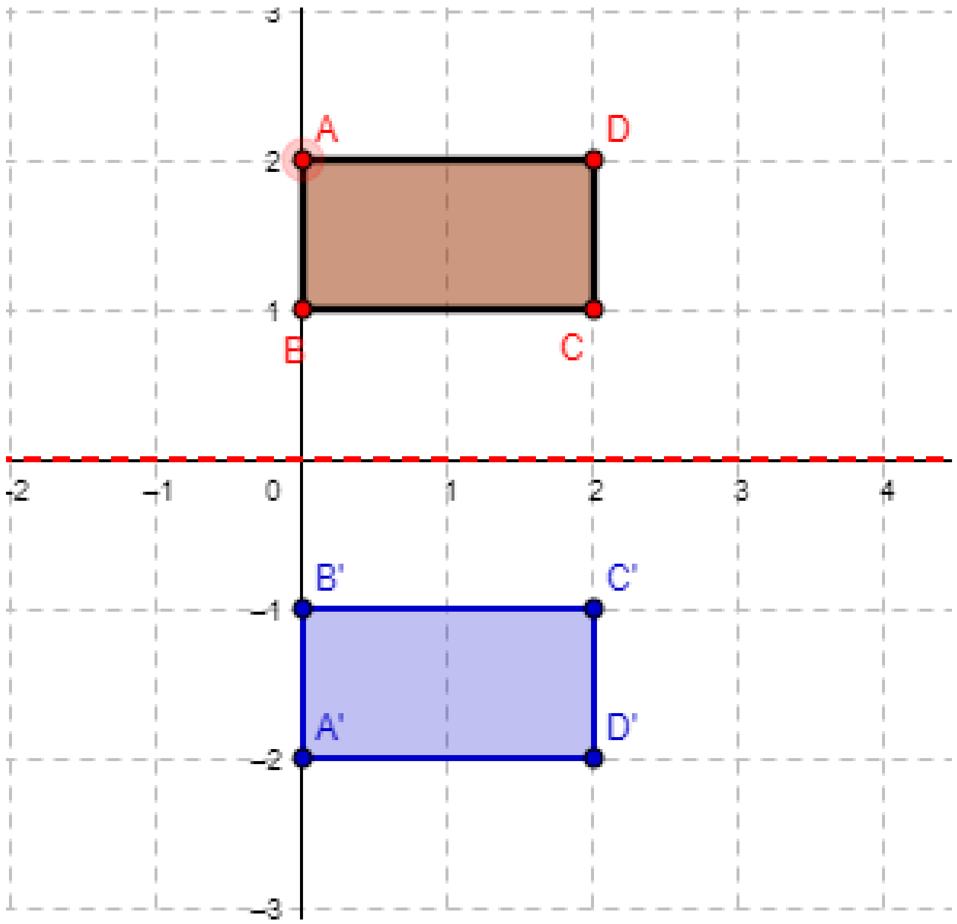
$x = \cos\alpha$

$y = sin\,\widehat{\alpha}$

Matriz de la transformación:

$$A_f = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

REFLEXIÓN O SIMETRÍA DE EJE X



$$f(x\,,y) = (x, -y)$$

$Ejemplo$: $\overline{OC} = (2, 1)$

$f(\overline{OC}) = (2, -1)$

Matriz de la transformación:

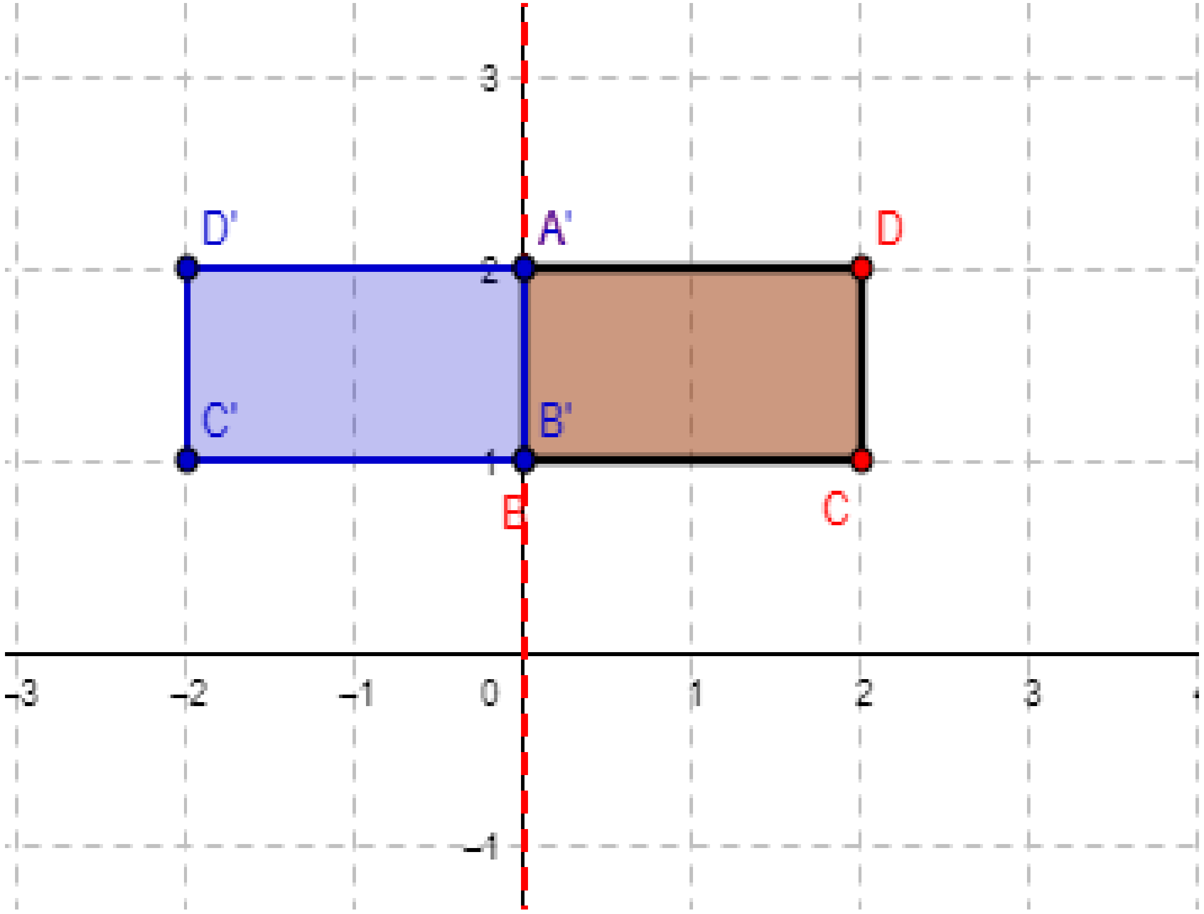
$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

SI fuera el $f(1{,}0) = \underline{(1{,}0)}$

SI fuera el $f(0{,}1) = \underline{(0, -1)}$

Mantienen la dirección

Reflexión o simetría de eje Y



$$f(x\,,y) = (-x, y)$$

$Ejemplo$: $\overline{OC} = (2, 1)$

$f(\overline{OC}) = (-2, 1)$

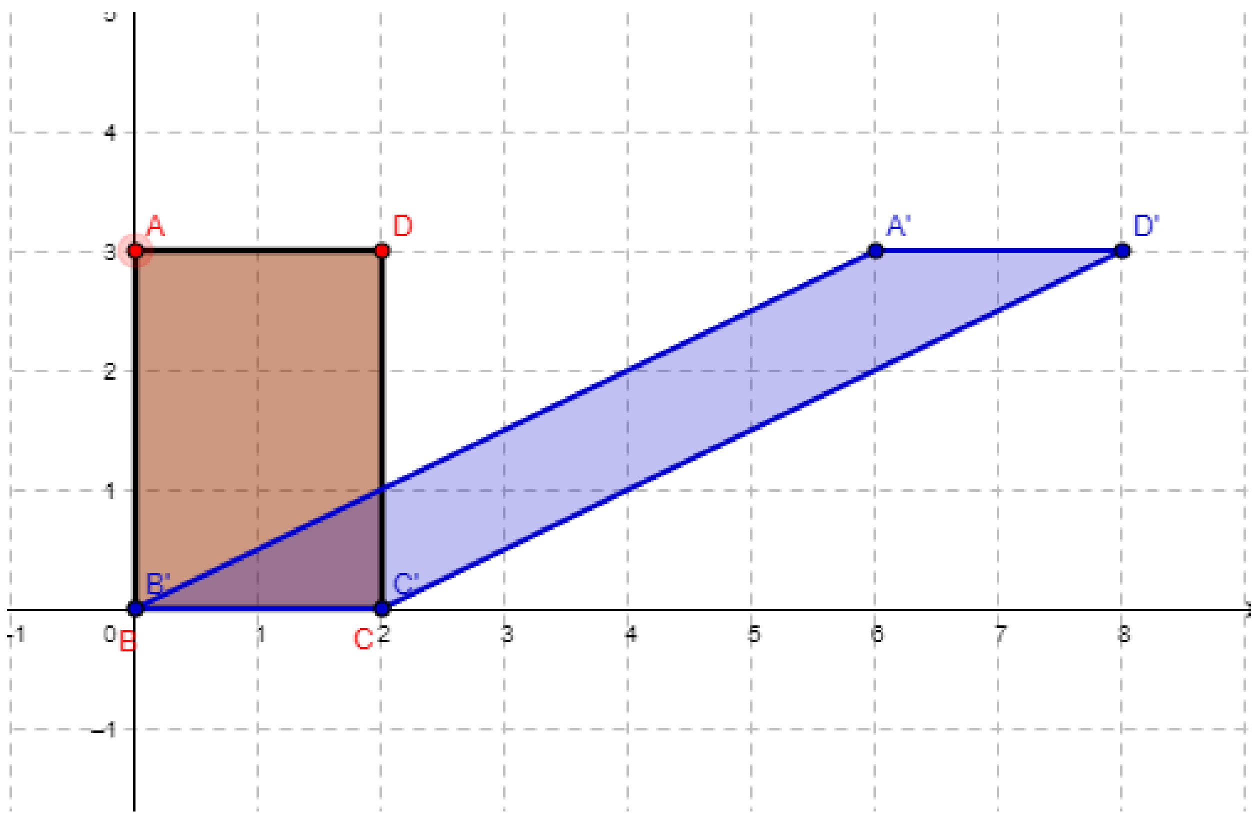
Matriz de la transformación: $A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

SI fuera el $f(1{,}0) =$ $\underline{(-1{,}0)}$

SI fuera el $f(0{,}1) =$ $\underline{(0{,}1)}$

Mantienen la dirección

CORTE O DESLIZAMIENTO A LO LARGO DEL EJE X .(CIZALLANTE)



$$f(x\,,y) = (x + k \cdot y, y)$$

$$Ejemplo\text{: } \overline{OD} = (2, 3)$$

$$f(\overline{OD}) = (2 + 2 \cdot 3, 3)$$

$$f(\overline{OD}) = (8, 3)$$

SI fuera el $f(1{,}0) =$ $\underline{(1{,}0)}$

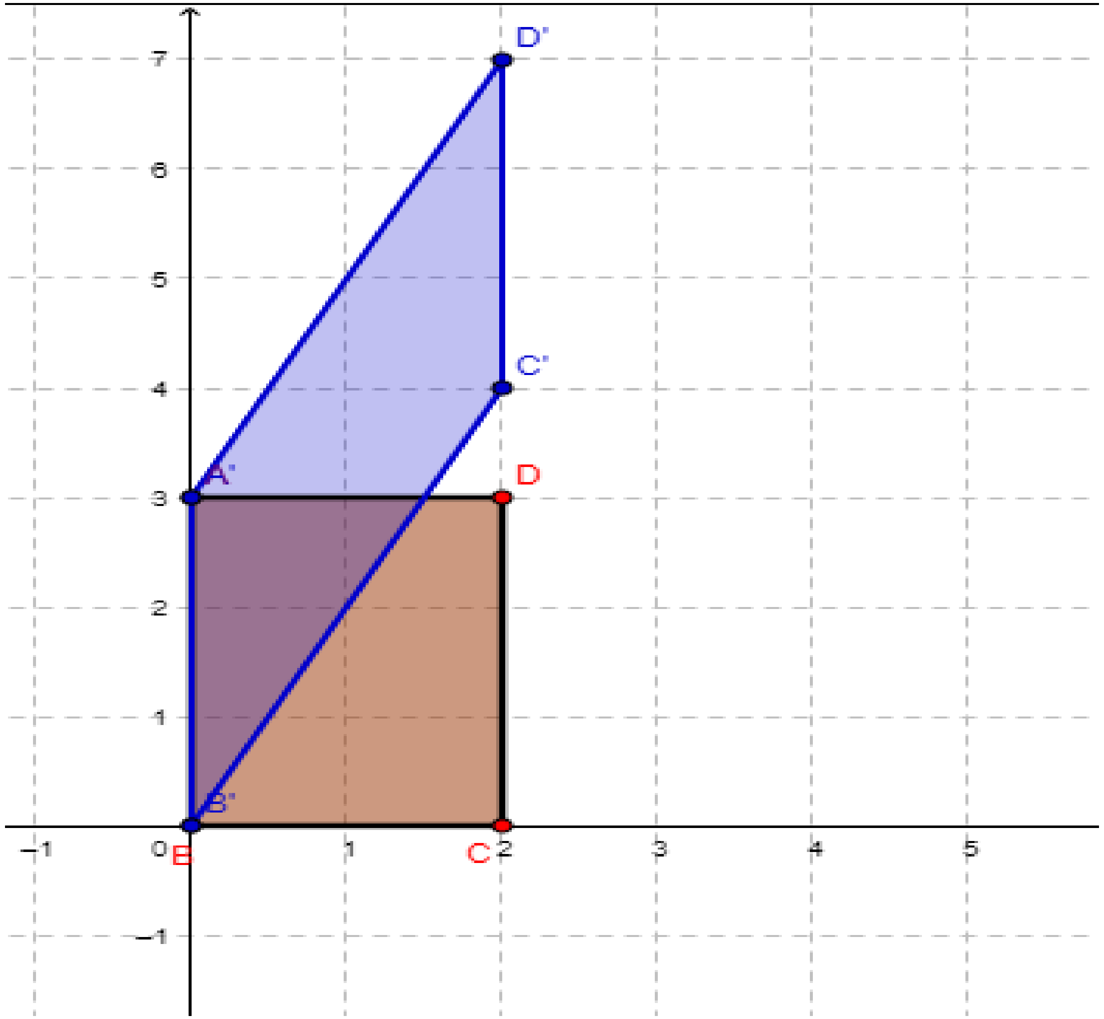
Mantiene la dirección

Matriz de la transformación:

$$A_f = \begin{array}{cc} f\binom{1}{0} & f\binom{0}{1} \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

CORTE O DESLIZAMIENTO A LO LARGO DEL EJE Y .(CIZALLANTE)



$$f(x\,,y) = (x, k \cdot x + y)$$

$Ejemplo$: $\overline{OD} = (2,3)$

$f(\overline{OD}) = (2, 2 \cdot 2 + \ 3)$

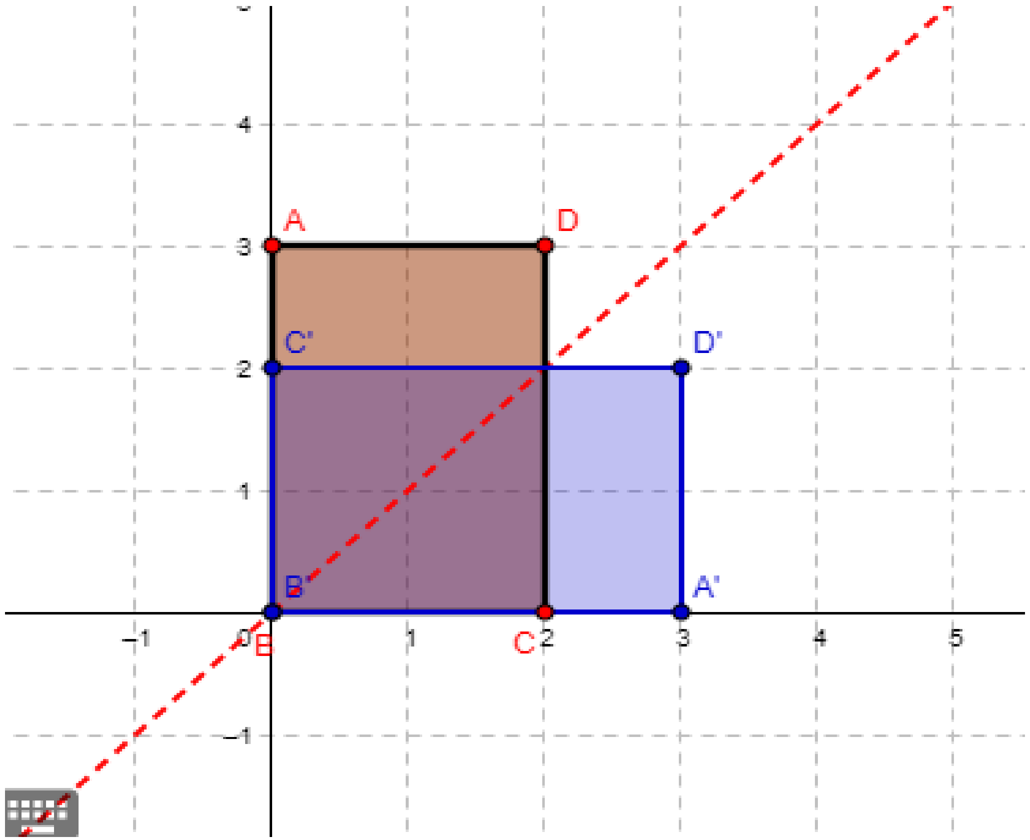
$f(\overline{OD}) = (2,7)$

SI fuera el $f(0,1)$ = $\underline{(0,1)}$

Mantiene la dirección

Matriz de la transformación: $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$

Reflexión respecto de la recta bisectriz del primer cuadrante. $y = x$



$$f(x\,,y) = (y, x)$$

$Ejemplo$: $\overline{OD} = (2,3)$

$f(\overline{OD}) = (3,2)$

Matriz de la transformación: $A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

SI fuera el $f(1,1) =$ $\underline{(1,1)}$

SI fuera el $f(1,-1) =$ $\underline{(-1,1)}$

Mantienen la dirección

CONTRACCIÓN O EXTENSIÓN DE EJE X

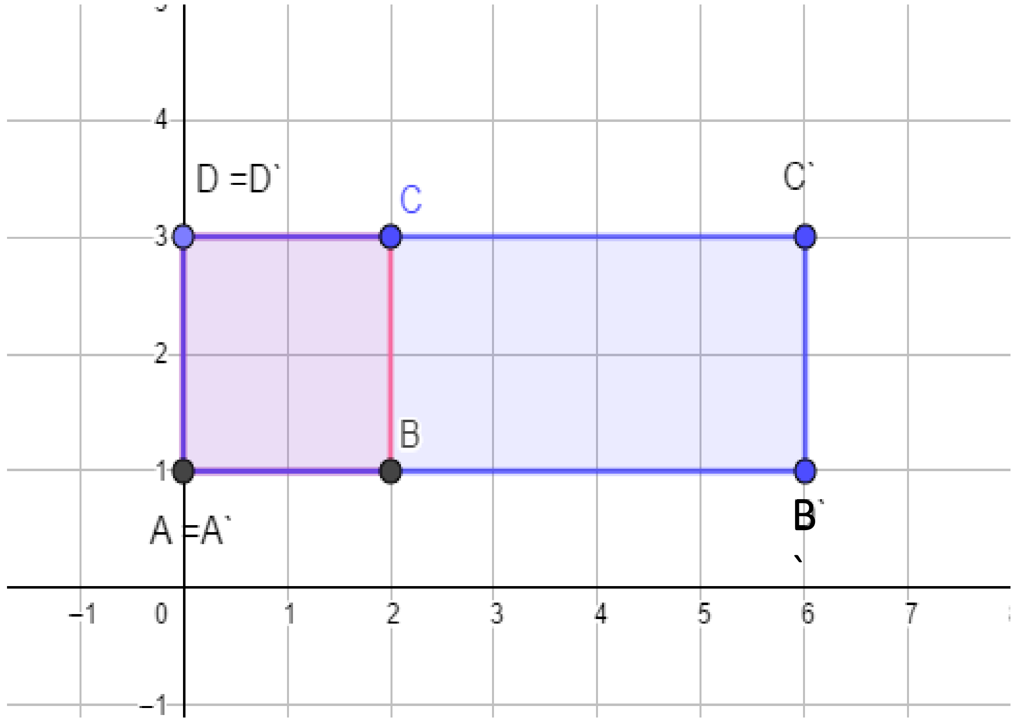
$$f(x\,,y) = (K \cdot x, y)$$

$Ejemplo$: $\overline{OB} = (2, 1)$

$f(\overline{OB}) = (2 \cdot 3, 1)$

$f(\overline{OB}) = (6\,, 1)$

Matriz de la transformación: $A_f = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



SI fuera el $f(1{,}0) = \underline{(k, 0)}$

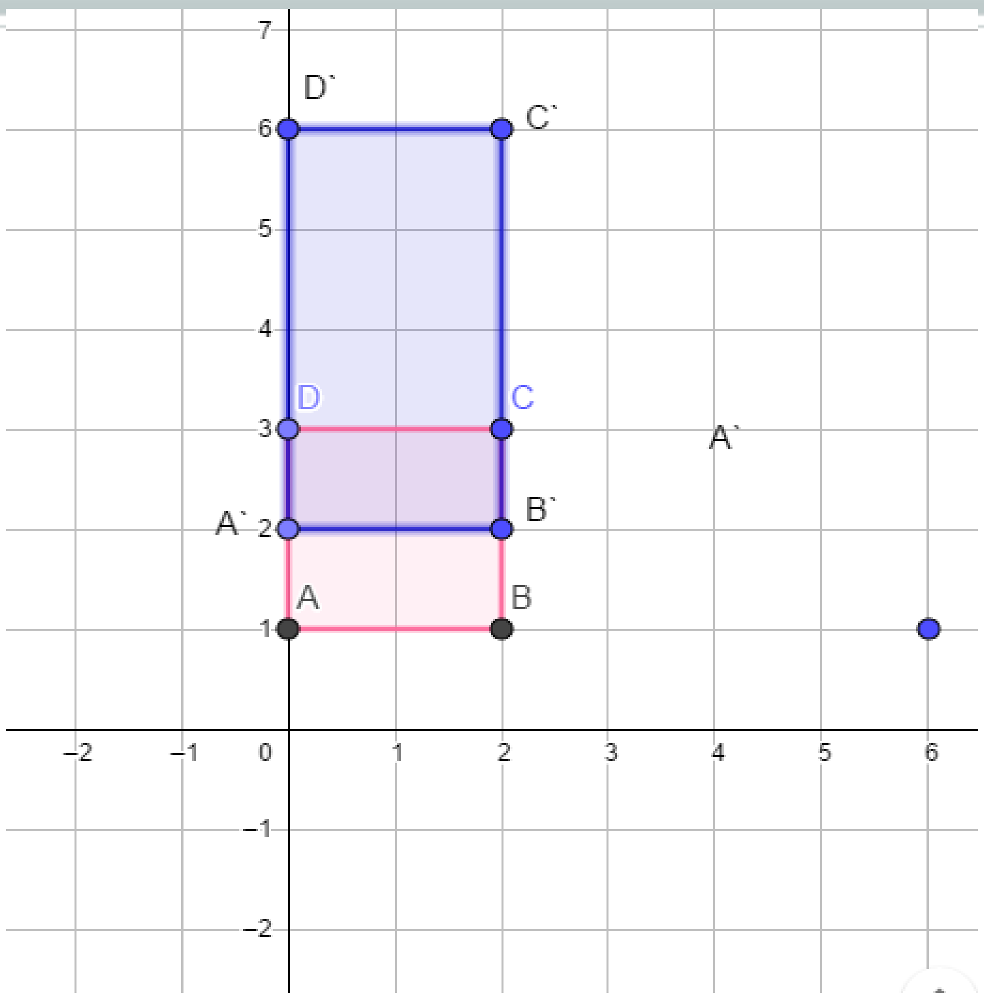
SI fuera el $f(0{,}1) = \underline{(0{,}1)}$

Mantienen la dirección

$Si\ 0 < k < 1\ CONTRACCIÓN$

$Si\ k > 1\ EXTENSIÓN\ O\ ESTIRAMIENTO$

CONTRACCIÓN O EXTENSIÓN DE EJE Y



$$f(x\,,y) = (x, K\cdot y)$$

$$Ejemplo\text{: } \overline{OB} = (2,1)$$

$$f(\overline{OB}) = (2, 1\cdot 2)$$

$$f(\overline{OB}) = (2\,,2)$$

Matriz de la transformación: $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$

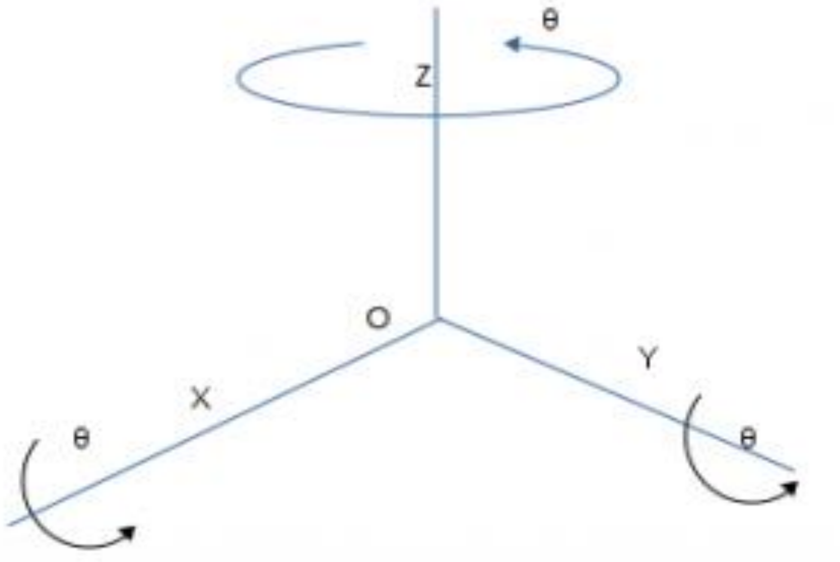
SI fuera el $f(1{,}0) = \underline{(1{,}0)}$

SI fuera el $f(0{,}1) = \underline{(0,k)}$

Mantienen la dirección

$Si\ 0 < k < 1\ CONTRACCIÓN$ $\quad$ $Si\ k > 1\ EXTENSIÓN\ O\ ESTIRAMIENTO$

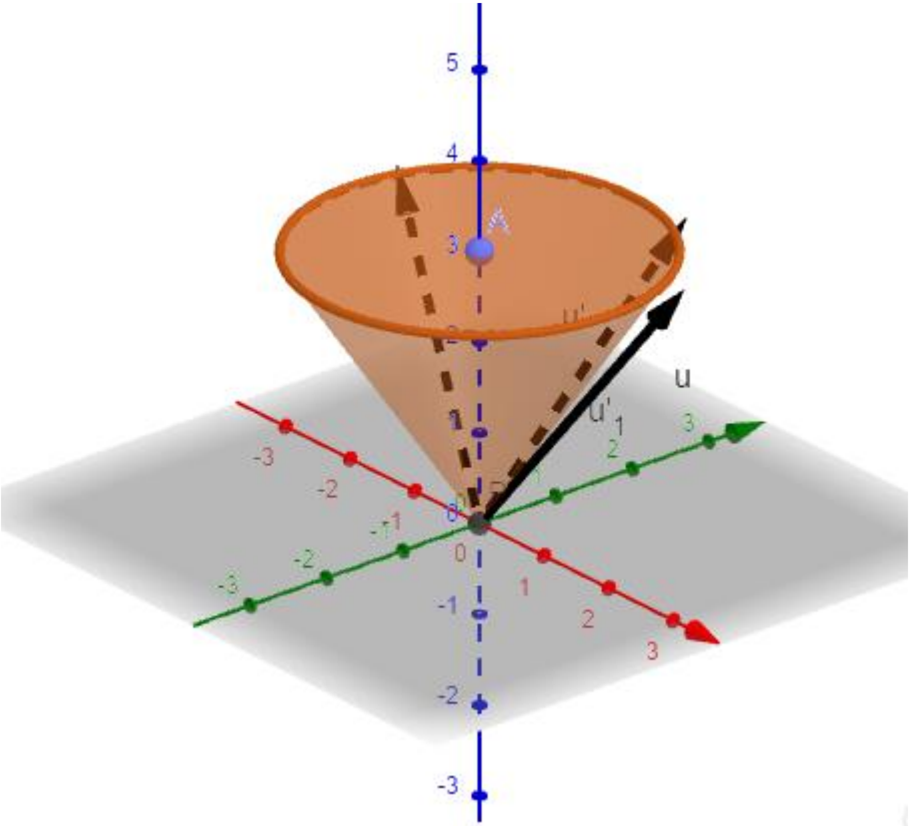
ROTACION ALREDEDOR DE LOS EJES CARTESIANOS



La rotación indicada es en sentido antihorario.

Para entender la rotación en R^3 como una extensión de la rotación en R^2, recordamos que el giro es sobre el eje z, perpendicular al plano coordenado xy, y la componente en z no tendrá cambios

Rotación alrededor del eje z



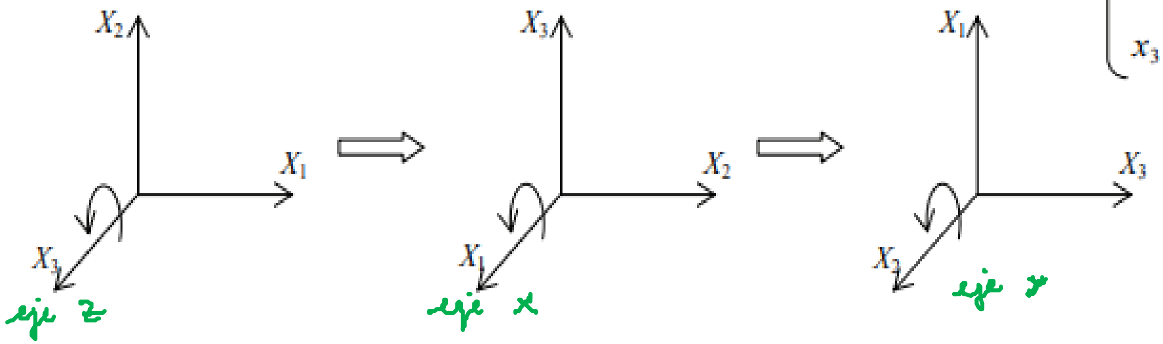
$$\begin{cases} x_1' = x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta \\ x_2' = x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta \\ x_3' = x_3 \end{cases}$$

MATRIZ DE LA ROTACIÓN

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1\cos\theta - x_2\sin\theta \\ x_2' = x_1\sin\theta + x_2\cos\theta \\ x_3' = x_3 \end{cases}$$

Rotación alrededor del eje x y del eje y



Las ecuaciones sobre el eje x e y pueden ser obtenidas mediante permutaciones cíclicas de las componente x_1 , x_2 , x_3

$$\begin{cases} x_2' = x_2\cos\theta - x_3\sin\theta \\ x_3' = x_2\sin\theta + x_3\cos\theta \\ x_1' = x_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2\cos\theta - x_3\sin\theta \\ x_3' = x_2\sin\theta + x_3\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3' = x_3\cos\theta - x_1\sin\theta \\ x_1' = x_3\sin\theta + x_1\cos\theta \\ x_2' = x_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1' = x_1\cos\theta + x_3\sin\theta \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = -x_1\sin\theta + x_3\cos\theta \end{cases}$$

Matriz de la rotación alrededor del eje x

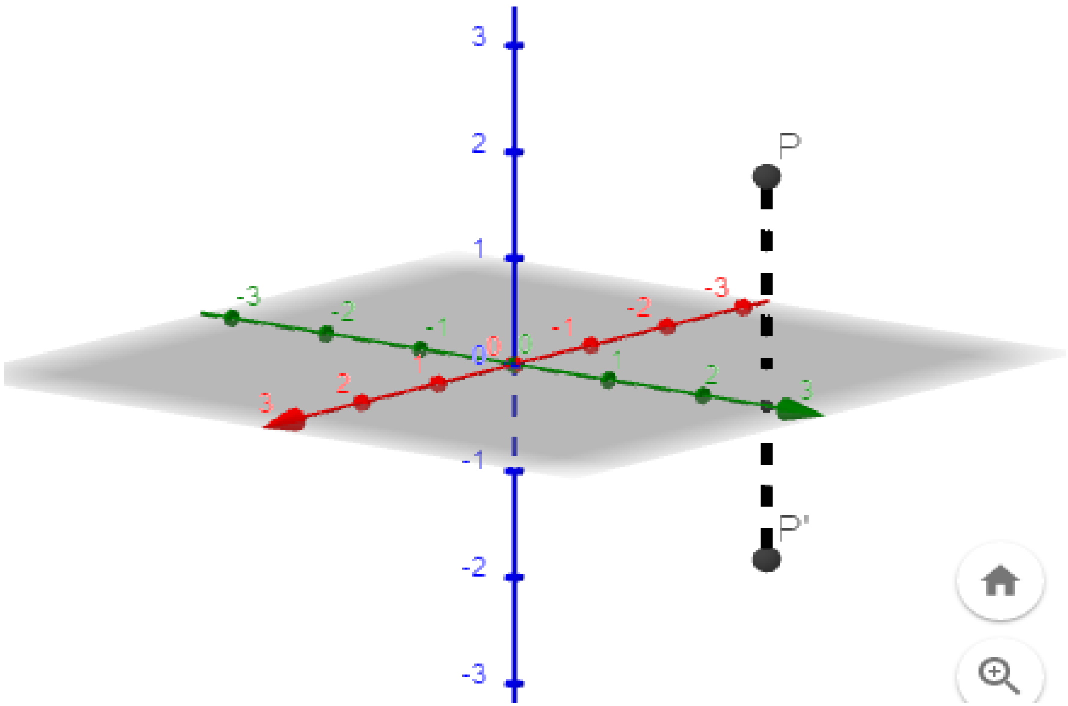
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Matriz de la rotación alrededor del eje y

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Simetría respecto de los planos coordenados

Simetría respecto al plano xy



$$f(x, y, z) = (x, y, -z)$$

Matriz de la simetría respecto al plano xy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

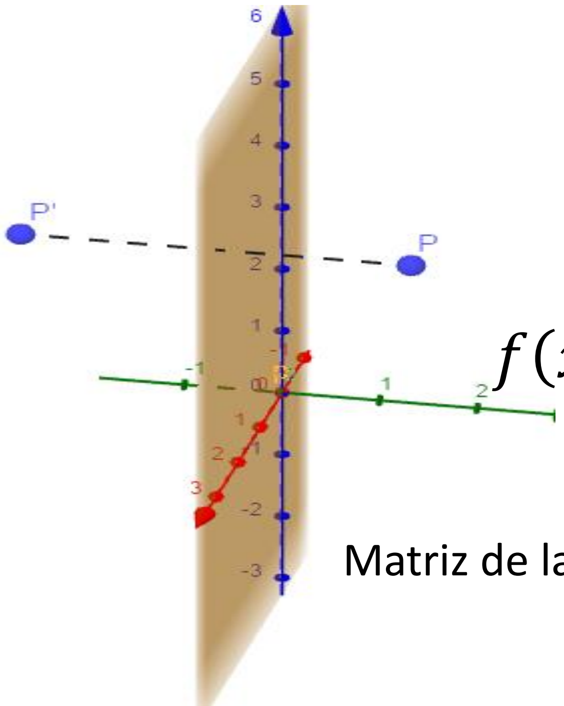
SI fuera el $f(1,0,0) = \underline{(1,0,0)}$

SI fuera el $f(0,1,0) = \underline{(0,1,0)}$

SI fuera el $f(0,0,1) = \underline{(0,0,-1)}$

Mantienen la dirección

Simetría respecto al plano xz



$$f(x\,,y,z) = (x,-y,z)$$

Matriz de la simetría respecto al plano xz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

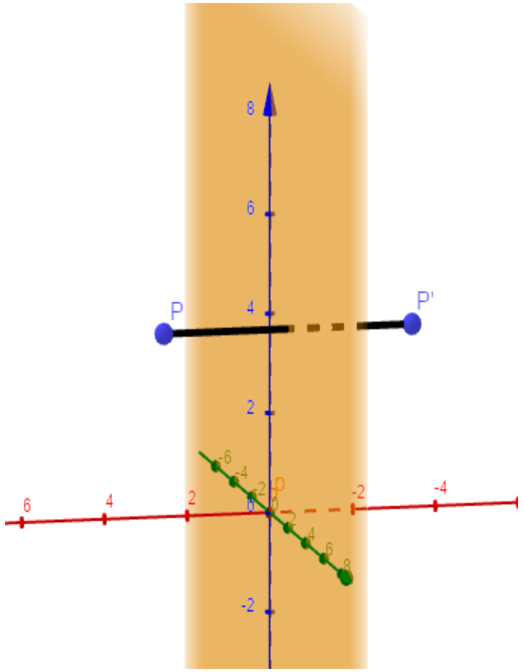
SI fuera el $f(1,0,0) = \underline{(1,0,0)}$

SI fuera el $f(0,1,0) = \underline{(0,-1,0)}$

SI fuera el $f(0,0,1) = \underline{(0,0,1)}$

Mantienen la dirección

Simetría respecto al plano yz



$$f(x\,,y,z) = (-x,y,z)$$

Matriz de la simetría respecto al plano yz

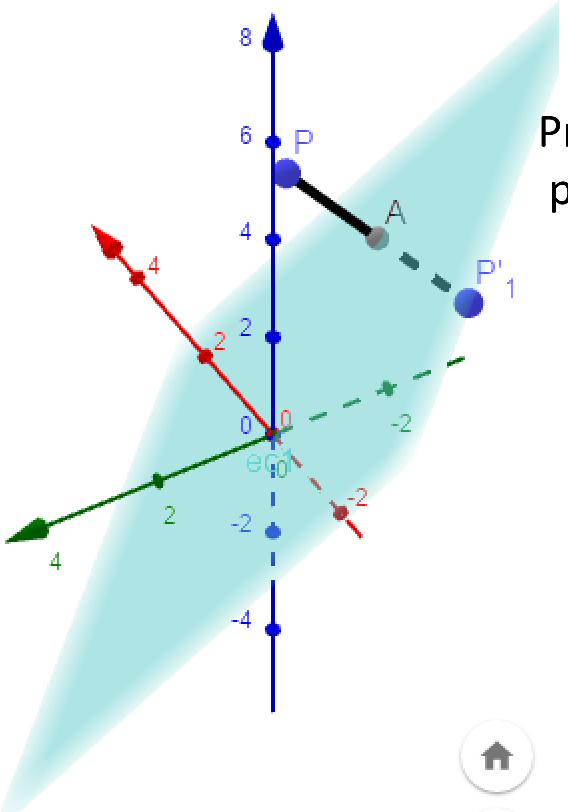
SI fuera el $f(1,0,0) = \underline{(-1,0,0)}$

SI fuera el $f(0,1,0) = \underline{(0,1,0)}$

SI fuera el $f(0,0,1) = \underline{(0,0,1)}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

REFLEXIÓN RESPECTO AL PLANO $x + y + z = 0$



Si fuera un punto $P(3, -2, 2)$

Primero busco el punto A que resulta de la intersección del plano con la recta perpendicular que contiene al punto P

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

Reemplazo en la ecuación del plano para hallar λ :

$$3 + \lambda - 2 + \lambda + 2 + \lambda = 0$$
$$3 + 3\lambda = 0 \ \rightarrow \lambda = -1$$

Reemplazando en la recta hallo el punto $A(2, -3, 1)$

$$\overline{PA} = (-1, -1, -1)$$

$$\overline{OP`} = \overline{OA} + \overline{PA}$$
$$\overline{OP`} = (2, -3, 1) + (-1, -1, -1)$$
$$\overline{OP`} = (1, -4, 0)$$

De la misma forma podría armar la función si tomo un punto P genérico

Si fuera un punto $P(x_1, x_2, x_3)$

- Primero busco el punto A que resulta de la intersección del plano con la recta perpendicular que contiene al punto P

$$r: \begin{cases} x = x_1 + \lambda \\ y = x_2 + \lambda \\ z = x_3 + \lambda \end{cases}$$

Reemplazo en la ecuación del plano para hallar λ :

$$x_1 + \lambda + x_2 + \lambda + x_3 + \lambda = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 3\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-x_1 - x_2 - x_3}{3}$$

Reemplazando en la recta hallo el punto

$$A(x_1 + \frac{-x_1 - x_2 - x_3}{3}, x_2 + \frac{-x_1 - x_2 - x_3}{3}, x_3 + \frac{-x_1 - x_2 - x_3}{3})$$

$$\overline{PA} = (\frac{-x_1 - x_2 - x_3}{3}, \frac{-x_1 - x_2 - x_3}{3}, \frac{-x_1 - x_2 - x_3}{3})$$

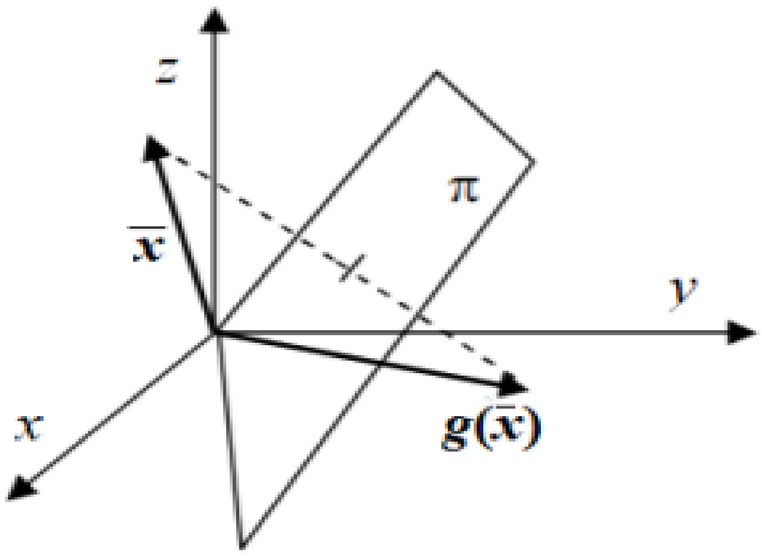
$$A(\frac{2x_1 - x_2 - x_3}{3}, \frac{-x_1 + 2x_2 - x_3}{3}, \frac{-x_1 - x_2 + 2x_3}{3})$$

$$\overline{OP`} = \overline{OA} + \overline{PA}$$

$$\overline{OP`} = \left(\frac{2x_1 - x_2 - x_3}{3}, \frac{-x_1 + 2x_2 - x_3}{3}, \frac{-x_1 - x_2 + 2x_3}{3}\right) + \left(\frac{-x_1 - x_2 - x_3}{3}, \frac{-x_1 - x_2 - x_3}{3}, \frac{-x_1 - x_2 - x_3}{3}\right)$$

$$\overline{OP`} = (\frac{x_1 - 2x_2 - 2x_3}{3}, \frac{-2x_1 + x_2 - 2x_3}{3}, \frac{-2x_1 - 2x_2 + x_3}{3})$$

Ejercicio 1. Sean los vectores $\vec{u}=(5,-2,4)$ y $\vec{v}=(-3,6,0)$ y sea la transformación lineal $g:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ que le asigna a cada vector de $\mathbf{R}^3$ su imagen especular con respecto al plano π. Se conoce que $g(\vec{u})=\vec{v}$.



- **a)** ¿La información dada es suficiente para definir el plano π? Justificar la respuesta y en caso de ser posible dar la ecuación de dicho plano.
- **b)** Identificar y definir mediante sus respectivas ecuaciones a los subespacios Imagen y Núcleo de g.
- **c)** Si A es la matriz asociada a la transformación g, ¿es A una matriz involutiva? ¿Es A una matriz idempotente? Justificar y en caso de responder afirmativamente, indicar el índice.
- **d)** Si $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ es la transformación lineal que proyecta ortogonalmente sobre el plano π, calcular $f(\vec{u})$.