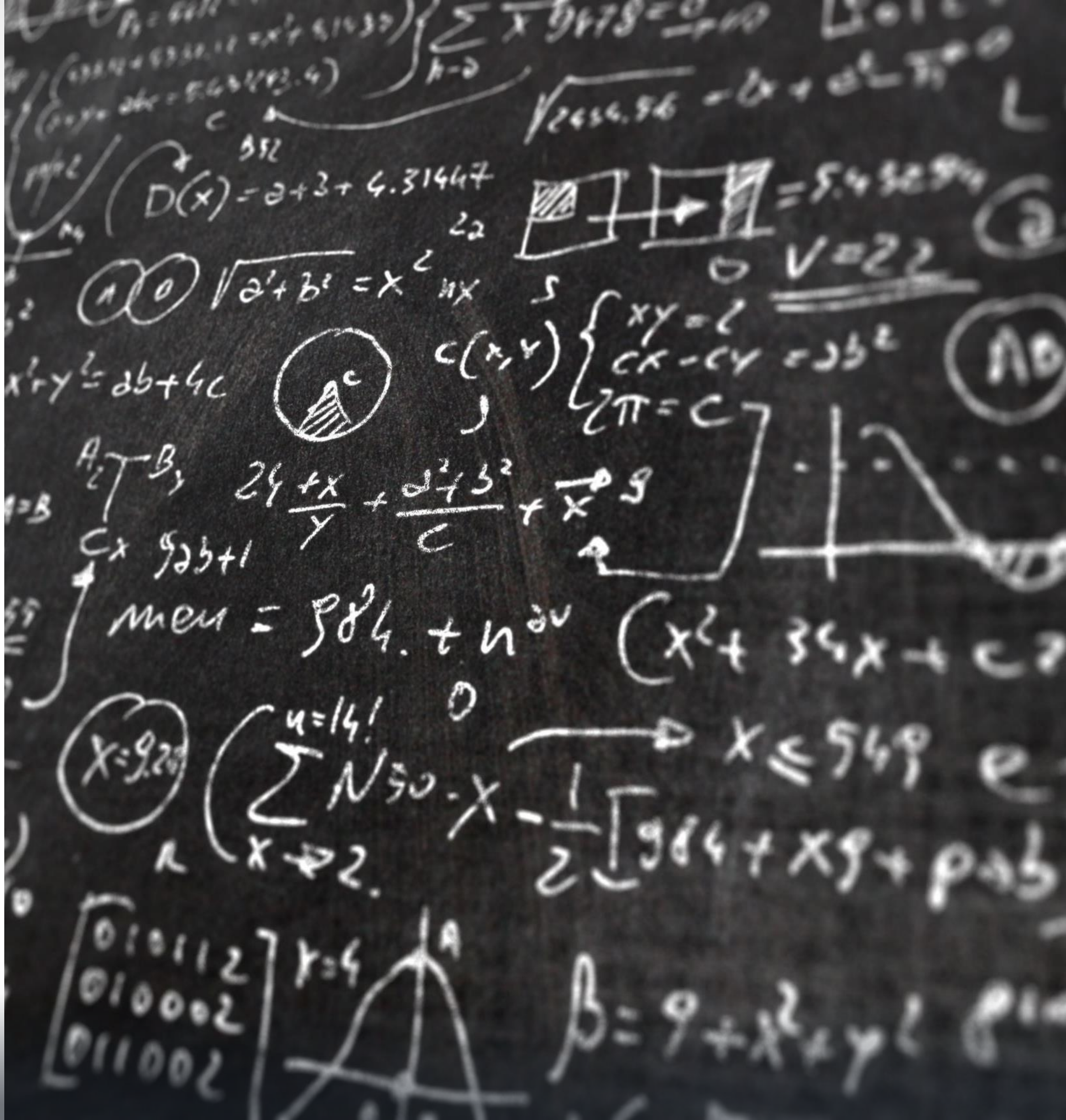
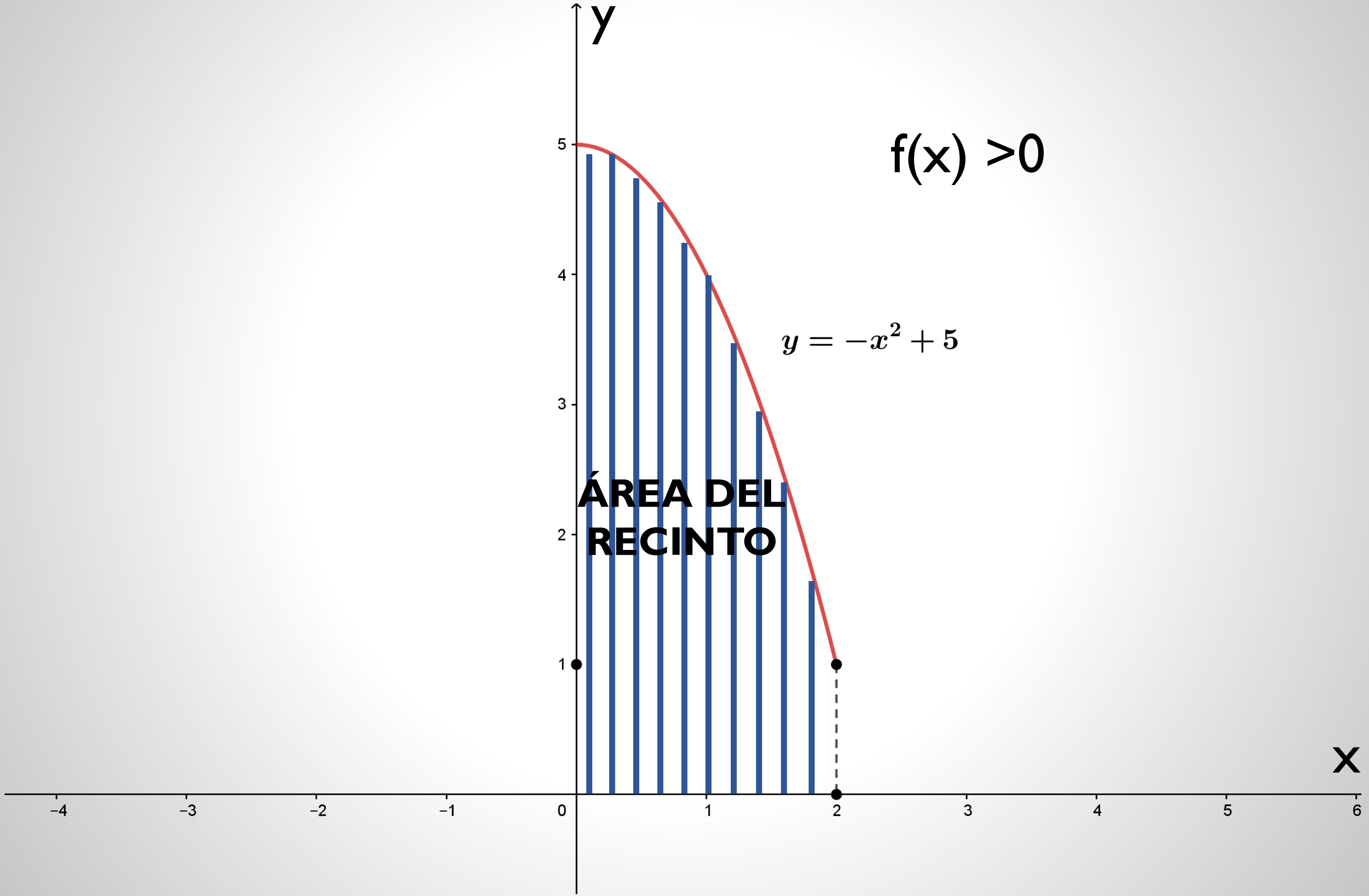
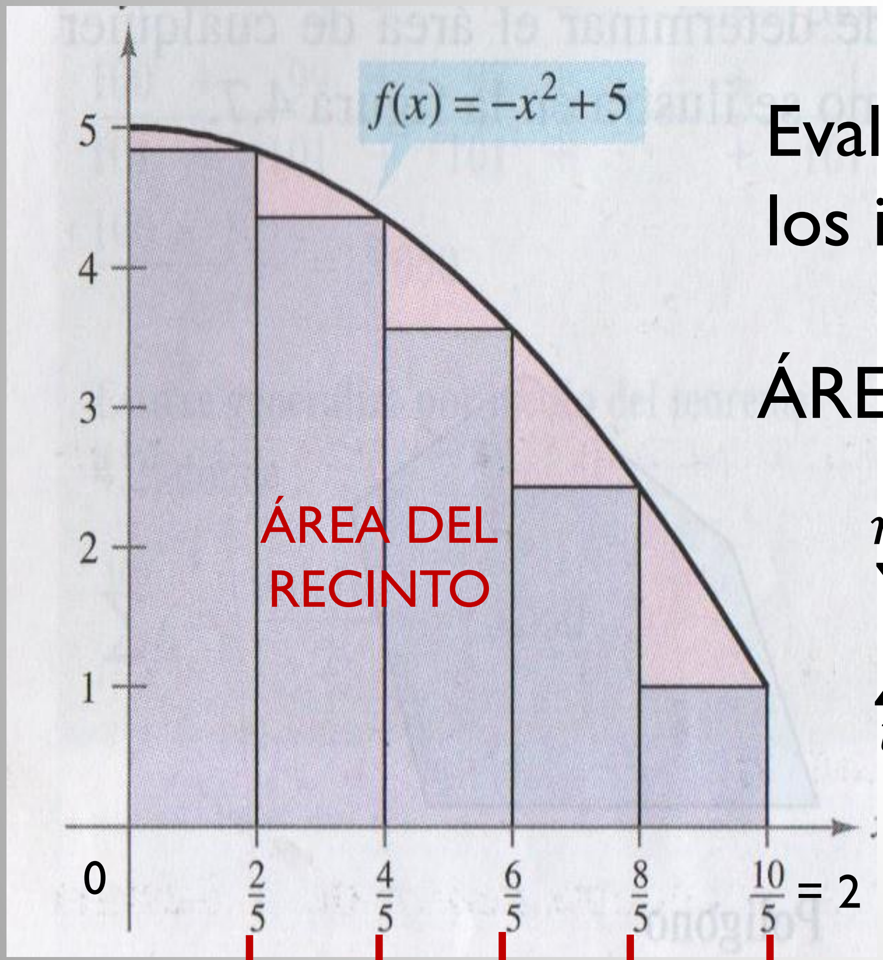
INTEGRA
DEFINI



EL ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA



APROXIMACIÓN DEL ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA



i=1 i=2 i=3 i=4 i=5

$$\frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{5} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

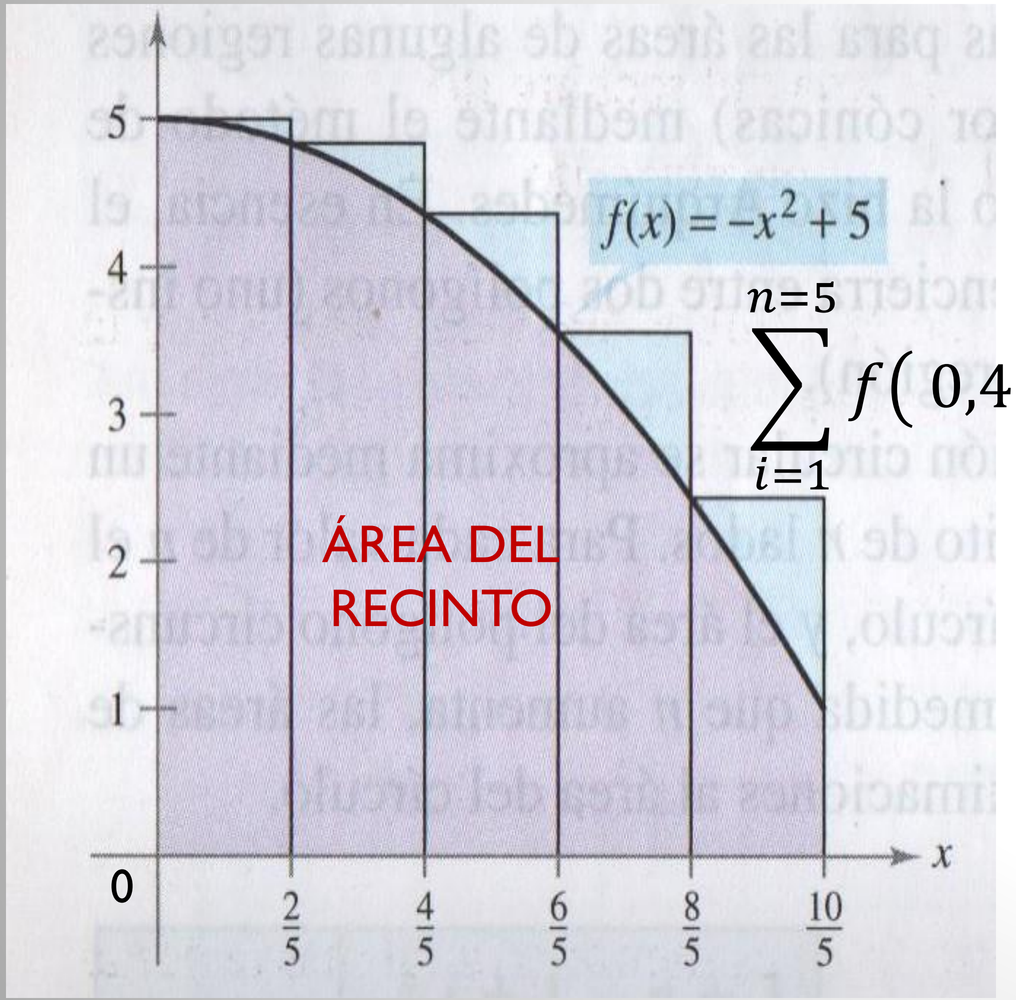
Evaluamos f en los puntos terminales de la derecha de los intervalos

ÁREA= 0,4. f(0,4)+ 0,4.f(0,8)+0,4.f (1,2)+0,4.f(1,6)+0,4.f(2)

$$\sum_{i=1}^{n=5} \underbrace{f(\,0{,}4\,i)}_{\text{ALTURA}}.\underbrace{0{,}4}_{\text{ANCHO}} = \sum_{i=1}^{n=5} [-(0{,}4i)^2 + 5] \cdot 0{,}4 = 6{,}48$$

Evaluamos f en los puntos terminales de la izquierda de los intervalos

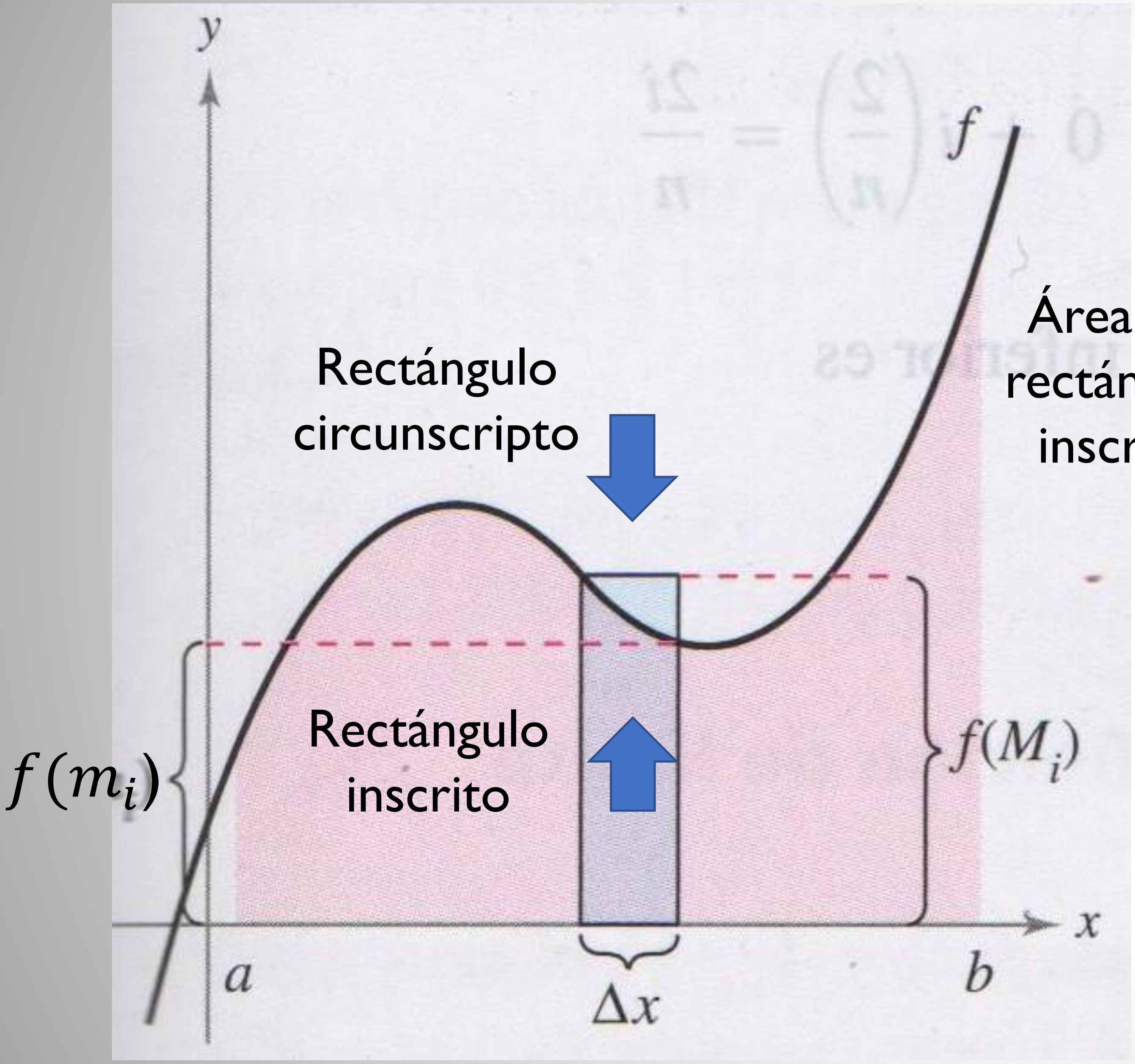
ÁREA= 0,4. f(0)+ 0,4.f(0,4)+0,4.f (0,8)+0,4.f(1,2)+0,4.f(1,6)



$$\sum_{i=1}^{n=5} f\big(0{,}4\,(i-1)\big).\,0{,}4 = \sum_{i=1}^{n=5} [-(0{,}4i - 0{,}4)^2 + 5] \cdot 0{,}4 = 8{,}08$$

6,48 < Área de la región < 8,08

El intervalo [a,b] se divide en n subintervalos de ancho $\Delta x = \frac{b-a}{n}$



Área del rectángulo inscrito = $f(m_i).\Delta x \leq f(M_i).\Delta x =$ Área del rectángulo circunscripto

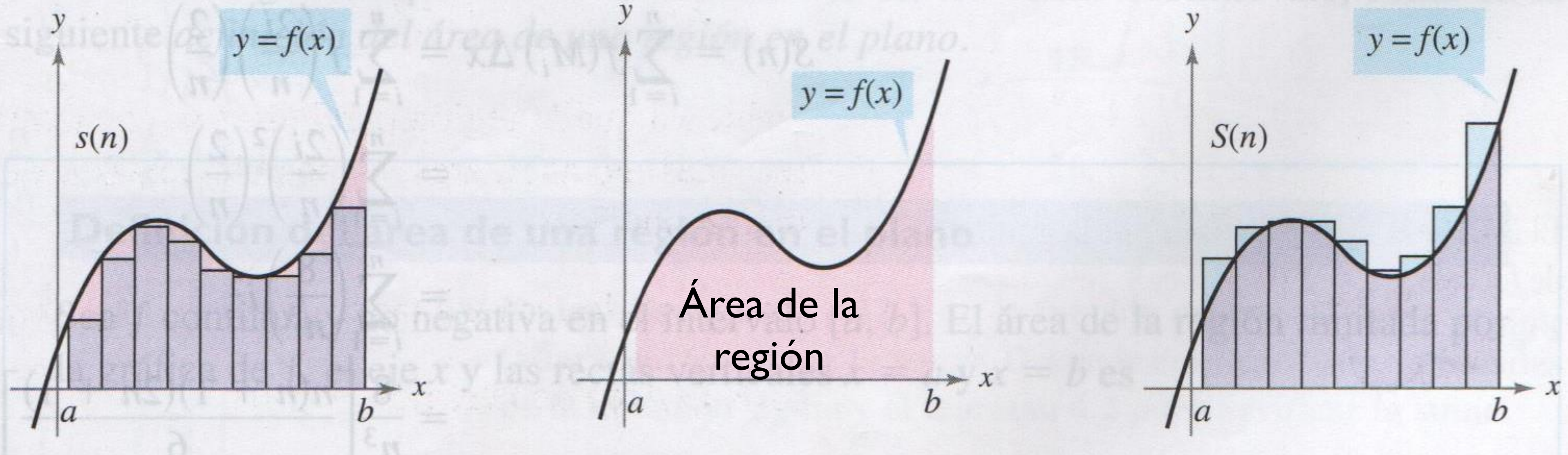
- Suma de las áreas de los rectángulos inscriptos recibe el nombre de suma inferior
- Suma de las áreas de los rectángulos circunscriptos recibe el nombre de suma superior

Suma inferior = s(n) = $\sum_{i=1}^{n} f(m_i).\Delta x$

ÁREA DE RECTÁNGULOS INSCRIPTOS

Suma Superior = S(n) = $\sum_{i=1}^{n} f(M_i).\Delta x$

ÁREA DE RECTÁNGULOS CIRCUNSCRIPTOS



El área de los rectángulos inscritos es menor que el área de la región $\leq$ Área de la región $\leq$ El área de los rectángulos circunscritos es mayor que el área de la región

LÍMITES DE LAS SUMAS SUPERIOR E INFERIOR

- Sea f continua y no negativa en el intervalo [a,b]

$$\lim_{n\to\infty} s(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(m_i).\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(M_i).\Delta x = \lim_{n\to\infty} S(n)$$

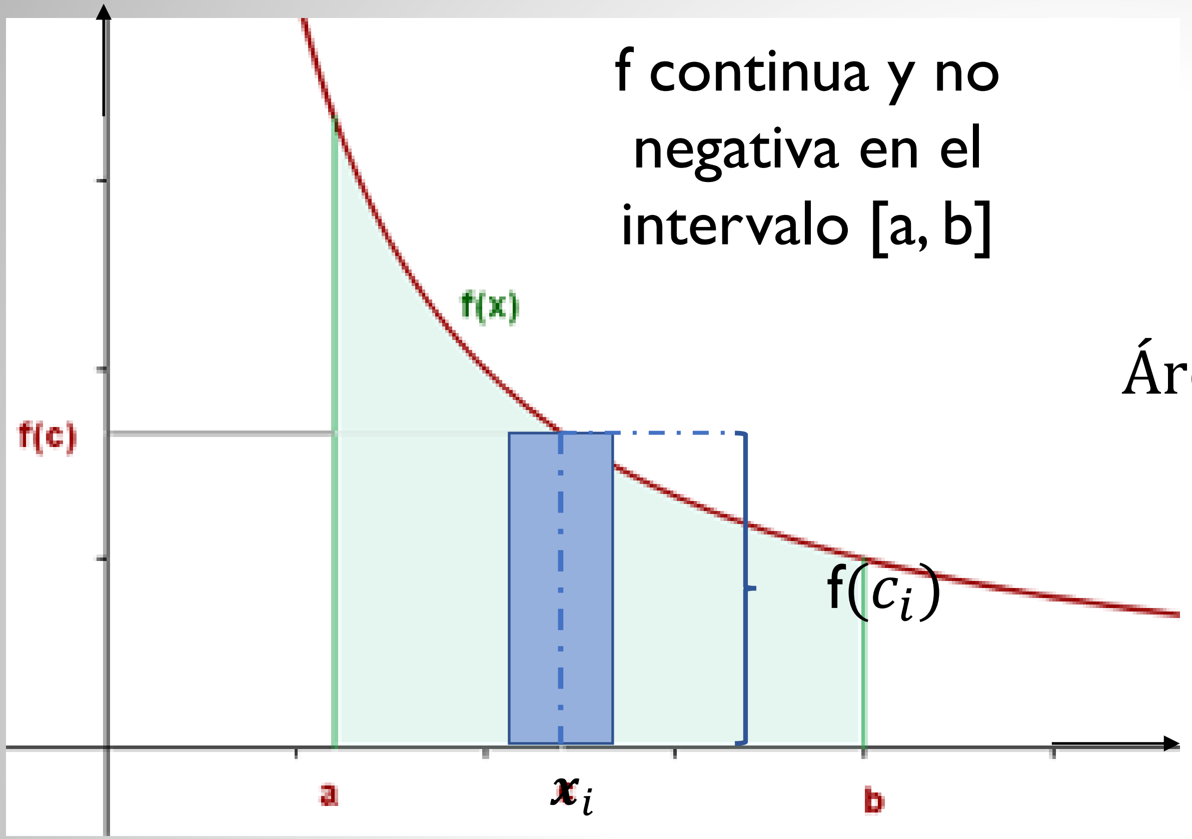
$\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

$f(m_i)$ valor mínimo del intervalo

$f(M_i)$ valor máximo del intervalo

Por el **teorema del encaje**, la elección de x en el i-ésimo intervalo no afecta al límite.

Por lo tanto podemos elegir cualquier valor de x arbitrario en el i-ésimo intervalo.



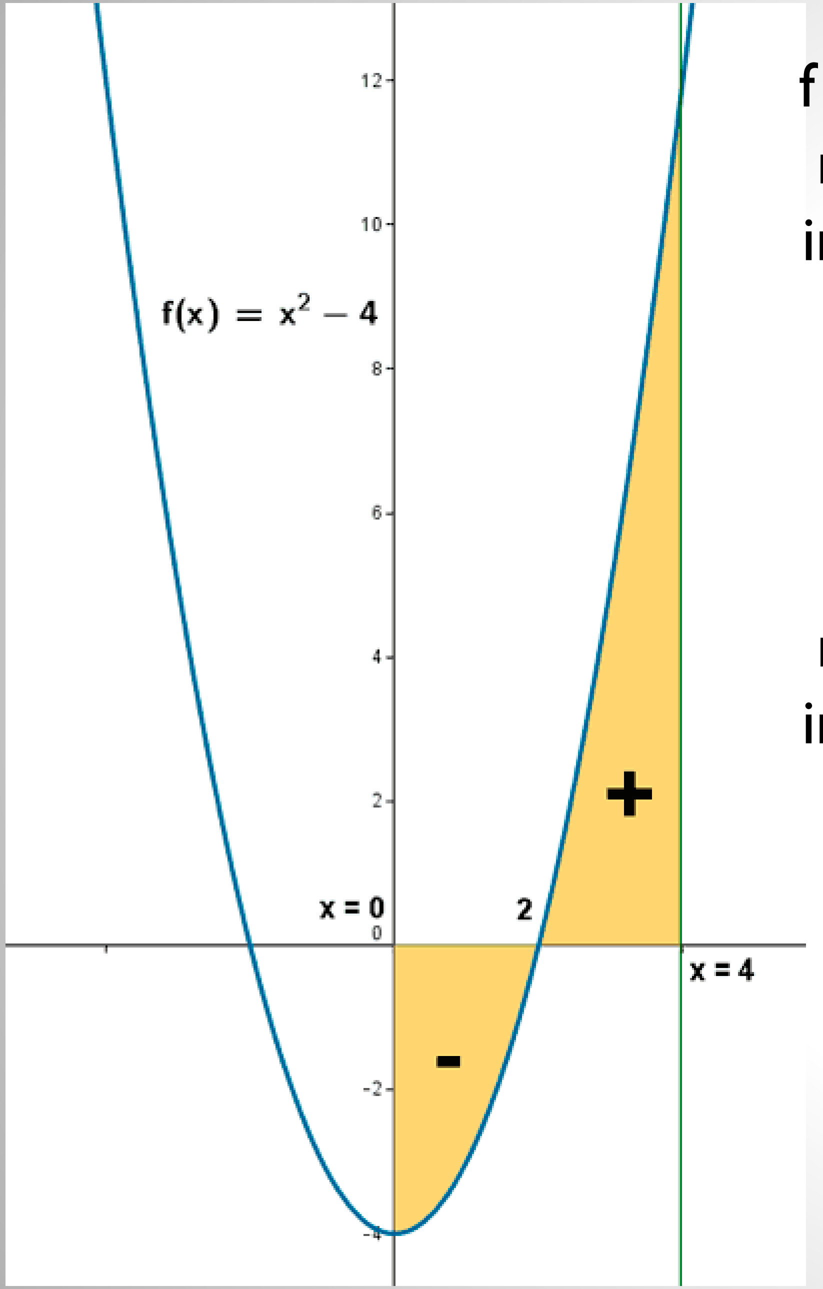
$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$$

$$\text{Área aproximada} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i$$

$$\text{Área} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Integral definida de **a** a **b**

- a es el límite inferior de integración
- b es el límite superior de integración



f continua y no negativa en el intervalo [2, 4]

$$\text{ÁREA}_1 = \int_2^4 f(x)dx$$

f continua y negativa en el intervalo [0, 2]

$$\text{ÁREA}_2 = -\int_0^2 f(x)dx$$

$$\textbf{ÁREA} = \textbf{ÁREA}_1 + \text{ÁREA}_2$$

INTEGRAL INDEFINIDA $\neq$ INTEGRAL DEFINIDA

ES UNA FAMILIA DE FUNCIONES (PRIMITIVAS O ANTIDERIVADAS)

ES UN NÚMERO

La continuidad implica integrabilidad

Si una función f es continua en el intervalo [a,b] entonces f es integrable en [a,b].

Propiedades de la integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Si se permutan los extremos de integración, se obtiene el número opuesto

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Si los límites que integración coinciden, la **integral definida** vale **cero**.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Si c es un punto interior del intervalo [a,b] la i**ntegral definida** se descompone como una suma de dos integrales extendidas a los intervalos [a,c] y [c,b]

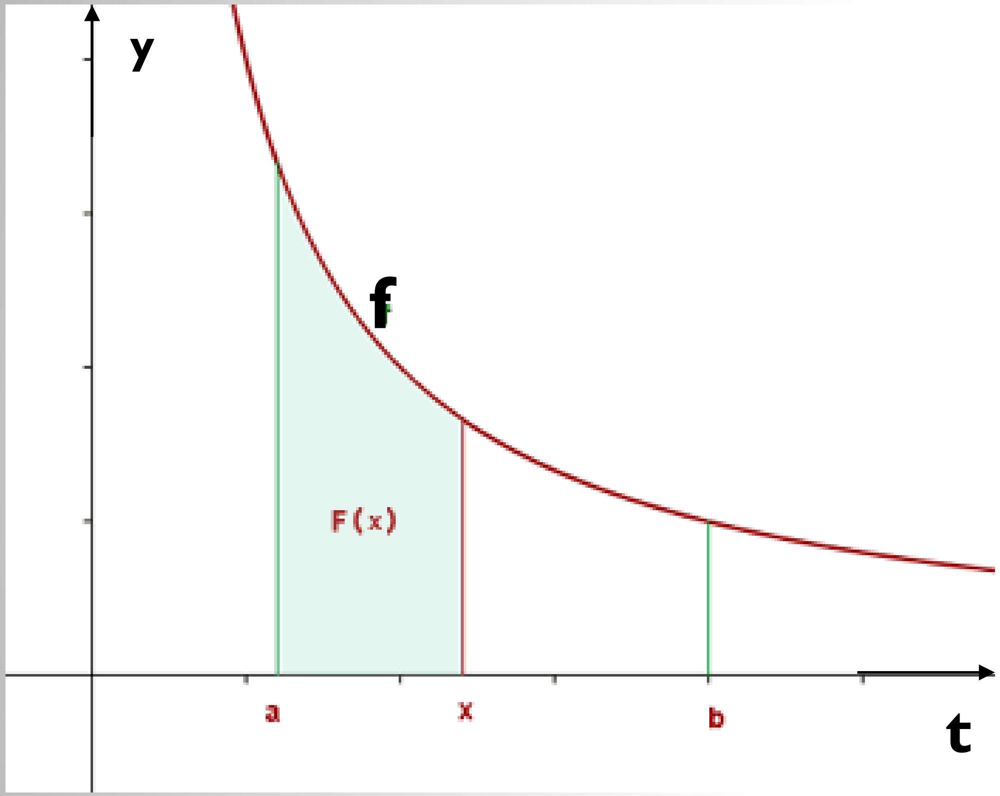
$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$$

La **integral definida** de una suma de funciones es igual a la suma de integrales·

$$\int_a^b k \cdot f(x) = k \cdot \int_a^b f(x)\, dx$$

La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función

FUNCIÓN INTEGRAL



F se llama *función integral* y su valor depende del extremo superior x.

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt$$

Geométricamente la **función integral** , **F(x)** representa el área del recinto limitado por la curva f(t) el eje de abscisas y las rectas t=a y t= x

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL

Si f es continua en [a,b] , ***la función integral*** $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ **es derivable** y su derivada F' (x_0) en cualquier punto $x_0 \in [a, b]$ es f (x_0)

Simbólicamente:

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ entonces F' (x_0) = f (x_0)

Ejemplo:

$$F(x) = \int_1^x sen^2 t \, dt$$

Hallar F '(π)

$\mathrm{F}'(\mathrm{x}) = \mathrm{sen}^2\mathrm{x}$ Por T. F. C. I $\longrightarrow$ F '(x)$= sen^2 \pi = 0$

PROPIEDADES

a) Sea la función F(x) = $\int_{a}^{u(x)} f(t)dt$ entonces F’ (x) = f(u(x)). u’(x)

b) Sea la función F(x) = $\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt$ entonces F’ (x) = f(u(x)). u’(x) –f(v(x).v´’(x)

EJEMPLOS

Si F(x) =$\int_{1}^{x^2} arc\ \mathrm{tg}\, t\ dt$, hallar F ‘(1)

F’(x) = arc tg (x^2). $2x$ ➡ F’(1) = arc tg (1^2). 2.1 $= \frac{\pi}{4}.2 = \frac{\pi}{2}$

$$a) F(x) = \int_{1}^{x} ln(t+1)dt \rightarrow F´(x) = ln(x+1)$$

$$b) F(x) = \int_{-2}^{x} sen^2(2t)dt \rightarrow F´(x) = sen^2(2x)$$

$$c) F(x) = \int_{x}^{3} (t^2+1)dt = -\int_{3}^{x} (t^2+1)dt = \rightarrow F´(x) = -(x^2+1) = -x^2-1$$

Ejemplos: b)

$$F(\mathrm{x}) = \int_{ln\,x}^{senx} (t^2+1) \quad)dt = \rightarrow F´x = (sen^2x+1).\cos x) - (ln^2 x+1).\frac{1}{x})$$

REGLA DE BARROW

Si f es continua en [a,b] y G(x) es una primitiva de f(x) , entonces:

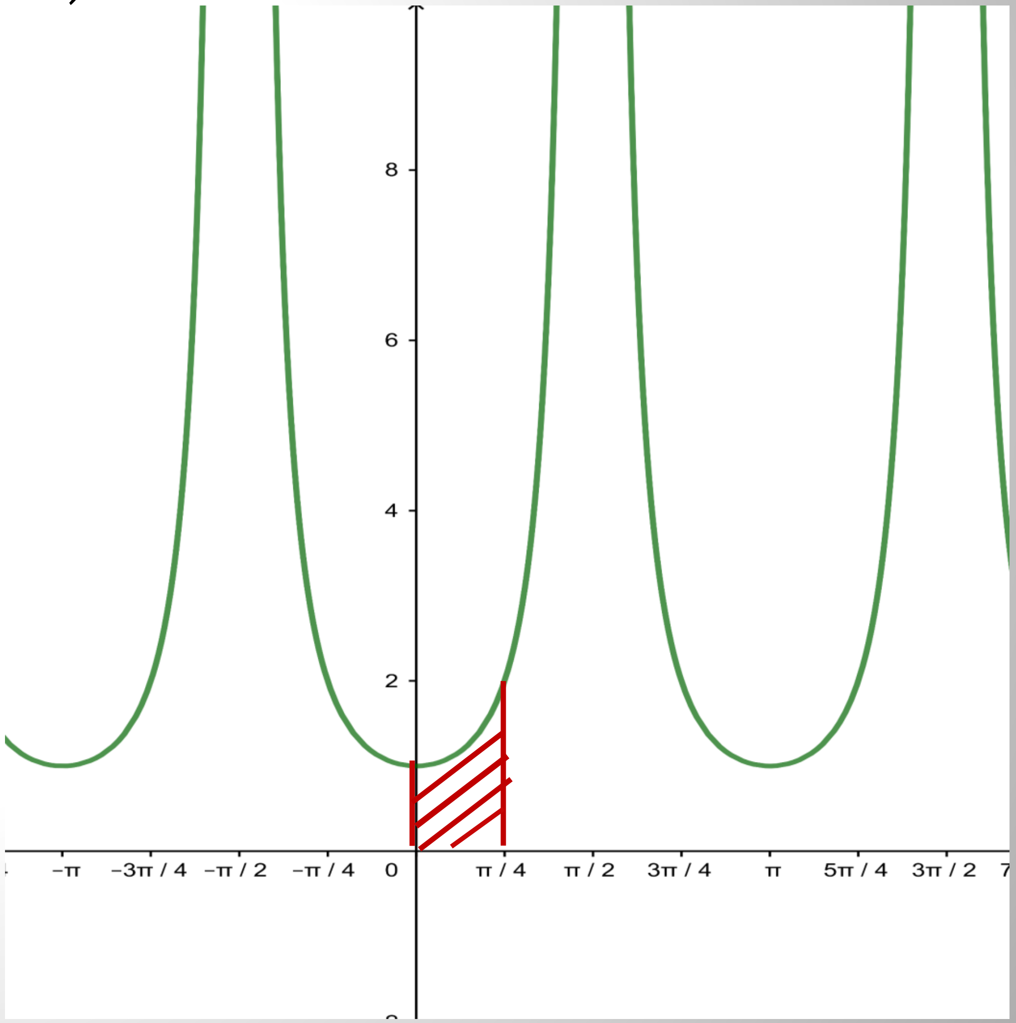
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)}$$

IMPORTANTE:
El número real obtenido representa el área bajo la curva únicamente si la función f(x) es positiva en $[a,b]$

Cálculo de la integral definida

$$\int_1^2 (x^2 - 3)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 6\right) - \left(\frac{1}{3} - 3\right) = -\frac{2}{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} sec^2 x\, dx = [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - 0 = 1$$

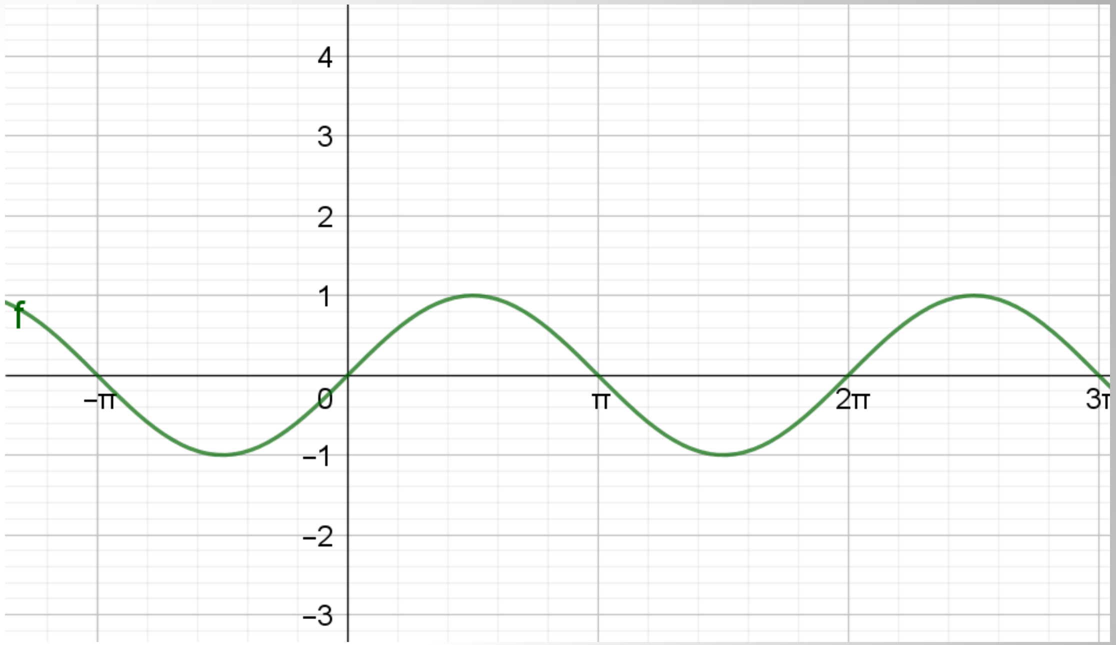


Integral definida

$$\int_0^{2\pi} senxdx = -\cos x \Big]_0^{2\pi}$$

$$\int_0^{2\pi} senxdx = -\cos(2\pi) - (-\cos 0)$$

$$\int_0^{2\pi} senxdx = -1 + 1 = 0$$



Área bajo la curva

$$A = 2\int_0^{\pi} senxdx = -2\cos x \Big]_0^{\pi}$$

$$A = 2\int_0^{\pi} senxdx = -2(\cos(\pi) - (-\cos 0))$$

$$A = \int_0^{2\pi} senxdx = -2.(-1) = 2u^2$$