RESUMEN:

Dominio de una función

Para obtener el conjunto dominio de una función, de acuerdo con la condición planteada, tenemos que resolver una ecuación o inecuación.

Si tenemos que resolver una inecuación:

Una forma práctica y de resolución rápida podría ser la propuesta.

a) Buscamos los ceros o raíces de la expresión algebraica que hemos CONDICIONADO
b) Ubicamos en una recta (eje x) o tabla, los ceros o raíces
c) Analizamos el signo de la expresión en cada subconjunto en que queda divida la recta (eje x)
d) Expresamos el conjunto dominio como un intervalo, unión de intervalos o diferencia de conjuntos (ej. $\mathcal{R} - \{1, -1\}$)

Conjunto de positividad y negatividad

Tenemos que buscar los valores de x que hacen que el valor de **Y** se positivo o negativo. O sea, tenemos que resolver una INECUACION.

Una forma práctica y de resolución rápida podría ser la propuesta.

a) Buscamos los ceros o raíces de la expresión algebraica (fórmula) de la función
b) Ubicamos en una recta / tabla, los ceros o raíces y el DOMINIO de la función
c) Analizamos el signo de la expresión en cada subconjunto en que queda dividida la recta (eje x)
d) Expresamos el conjunto de positividad y negatividad como un intervalo, unión de intervalos (abiertos)

EJEMPLO:

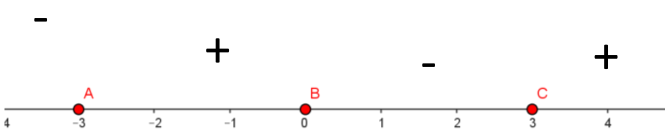
y= $2 \ \log_3(x^3 - 9x) - 6$

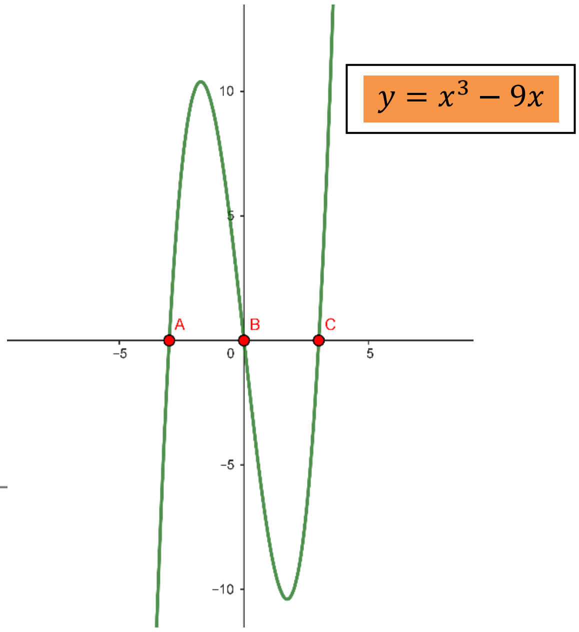
DOMINIO

Condición: $x^3 - 9x > 0$

a) Buscamos los ceros o raíces de la expresión algebraica que hemos CONDICIONADO

$x^3 - 9x = 0 \rightarrow x(x^2$- 9) = 0, ceros o raíces: $x = 0$; $x = 3$; $x = -3$





D f = $(-3,0) \cup (3,+\infty)$

<u>CONJUNTO DE POSITIVIDAD</u> <u>CONJUNTO DE NEGATIVIDAD</u>

$2.\log_2(x^3 - 9x) - 6 > 0$ $2\ \log_3(x^3 - 9x) - 6 < 0$

a) Buscamos los ceros o raíces de la expresión algebraica (fórmula) de la función

$2.\log_2(x^3 - 9x) - 6 = 0 \rightarrow \log_2(x^3 - 9x) = 3 \rightarrow (2)^3 = \ x^3 - 9x = 0 \rightarrow x^3 - 9x - 8 = 0$

<u>Aplico Método de Gauss/ intento con un posible cero o raíz</u>

x= -1 es un cero o raíz, bajo un grado realizando la división según esta propiedad:

Si x=a es cero o raíz de P(x) entonces (x-a) es divisor exacto de P(x)

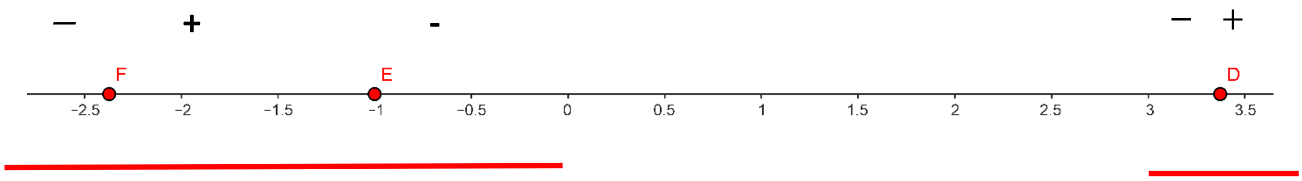
	1	0	-9	-8
-1		**- 1**	**1**	**8**
	1	**- 1**	**-8**	$\boxed{\mathbf{0}}$

$x^3 - 9x - 8 = (x+1).(x^2 - x - 8) = 0$
Buscamos los ceros o raíces de $(x^2 - x - 8) = 0$, con la formula resolvente/ calculadora nos da:

$x_1 = \frac{1+\sqrt{1-4.(-8)}}{2} = \frac{1+\sqrt{33}}{2}$ $x_2 = \frac{1-\sqrt{33}}{2}$

b) Ubicamos en una recta / tabla, los ceros o raíces y el DOMINIO de la función

c) Analizamos el signo de la expresión en cada subconjunto en que queda dividida la recta (eje x) (con línea roja marque el dominio de la función)



$$C^+ = \left(\frac{1-\sqrt{33}}{2}\ ;\ -1\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{33}}{2}\ ;\ +\infty\right)$$
$$C^- = \left(-\infty;\ \frac{1-\sqrt{33}}{2}\right) \cup \left(3; \frac{1+\sqrt{33}}{2}\right)$$

PARA UNA LECTURA UN POCO MÁS EXTENSA

¿CÓMO RESOLVEMOS ECUACIONES O INECUACIONES?

Ecuación e inecuación lineales

a) ax+b=0
b) ax+b>0 (Podemos utilizar los siguientes símbolos de desigualdad $\leq, <, \geq$)

Estrategia de resolución: despejar x ¿Cómo?

Utilizando Axiomas del conjunto de números reales (llamadas propiedades)
1) Propiedad uniforme
Nos permite en ambos miembros de la igualdad afectar con una misma operación (adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación) y seguir manteniendo la relación de igualdad. Nosotros necesitamos afectar con la suma, o sea necesitamos sumar –c o multiplicar por c

En símbolos: si a=b $\Leftrightarrow$ a+ (-c) =b+ (-c) o si a=b y $c \neq 0 \Leftrightarrow$ a.c=b.c

2) Existencia de inverso aditivo (neutro)
a+ (-a) =0
3) Existencia de inverso multiplicativo
$$a\,.\frac{1}{a}=1$$

ax+b + (-b) = 0 + (-b) $\Leftrightarrow ax=-b \Leftrightarrow \mathrm{a}.\frac{1}{a}x=-b.\frac{1}{a} \Leftrightarrow x=\frac{-b}{a}$ Para resolver la ecuación aplicamos propiedad 1), 2) y 3)

En la práctica escribimos solamente los números que necesitamos agregar en el segundo miembro. Se conoce como pasaje de términos y factores.

Por ejemplo:
2x+3=x-5 $\Leftrightarrow 2x-x+3+5=0 \Leftrightarrow x+8=0 \Leftrightarrow x=-8$

c) Si tenemos una inecuación lineal también vamos a despejar x, teniendo en cuenta las propiedades de la desigualdad que se cumplen en los números reales.

$a \in \Re, b \in \Re, c \in \Re$

1)Si a<b entonces a+c < b+c

2) Si a<b y c>0 entonces a.c < b.c

3) Si a<b y c<0 entonces a.c > b.c

Por ejemplo:

2x-3>4x+2 $\Leftrightarrow 2x+(-4x)-3+(-2) > 4x+(-4x)+2+(-2)$

$\Leftrightarrow 2x-4x-3-2>0 \Leftrightarrow -2x-5>0 \Leftrightarrow -2x-5+5>+5 \Leftrightarrow -2x.\frac{-1}{2} < 5.\frac{-1}{2} \Leftrightarrow x < -\frac{5}{2}$

Se aplicaron las propiedades 1) y 3)
Por supuesto que se despeja x en forma práctica, solamente escribimos los términos que necesitamos sumar o restar o multiplicar o dividir en el segundo miembro.

Ecuación e inecuación cuadráticas

a) $ax^2+bx+c=0$ $ax^2+bx+c>0$ (cualquier símbolo de desigualdad es válido ($\leq, \geq, <, >$)

Para resolver una ecuación cuadrática utilizamos la formula resolvente

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Inecuación cuadrática $ax^2+bx+c > 0$

¿Cómo la resolvemos en forma práctica?

Tenemos en cuenta los signos en una multiplicación.

a) $+.+ = +$ $b)$ $-.- = +$
$c) +.- = -$ $d)$ $-.+ = -$

Por lo tanto, para aplicar la regla de signos debemos tener un producto de factores.
La expresión en el primer miembro de la desigualdad es un polinomio de grado 2 completo ax^2+bx+c, el segundo miembro es cero. Lo factoreamos. ¿Cómo?

$ax^2+bx+c = a\,(x-x_1).(x-x_2)$ siendo x_1 y x_2 los ceros o raíces que las hallamos con la fórmula resolvente de una ecuación cuadrática.

Ejemplo

$x^2 - 5x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2).(x-3) \geq 0$
O sea, el producto de los dos factores puede **ser positivo o cero**
Para que sea positivo los factores pueden ser ambos positivos o ambos negativos.

<u>FORMA PRÁCTICA (siempre el segundo miembro igualado a cero)</u>

Podemos organizar la información que vamos a obtener en una **tabla o recta numérica.**

1) Ubicamos los ceros o raíces de la ecuación cuadrática. **En esos valores el producto da 0.**
2) Analizamos los signos de la multiplicación en los tres subconjuntos en los cuales. Consideramos un valor en cada subconjunto y lo probamos en la inecuación.
3) Nos queda dividida la recta en subconjuntos. Consideramos un valor cualquiera en cada subconjunto y evaluamos su signo en la expresión.

$x < 2$ | $2 < x < 3$ | $x > 3$

Positivo (+) | 2 | Negativo (-) | 3 | Positivo (+)

Solución= $(-\infty,2] \cup [3,+\infty)$

<u>OTRAS FORMAS PARA RESOLVER LAS ECUACIONES O INECUACIONES DE GRADO 2</u>

Tenemos que resolver la Inecuación entera de grado 2 **incompleta**

$-2x^2 + 8 \geq 0$ ¿cómo la resolvemos?

Como es un polinomio de grado 2 incompleto vamos a utilizar las siguientes propiedades, según corresponda:

a) $|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k \Leftrightarrow x \in [-k,k]$

b) $\sqrt{x^2} = |x|$

c) Si a<b y c<0 $\Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$ o Si a>b y c<0 $\Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$

Comenzamos por despejar x

$-2x^2 \geq -8 \Leftrightarrow -2 \div (-2) \cdot x^2 \leq -8 \div (-2) \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{8}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{4} \Leftrightarrow |x| \leq -2 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow x \in [-2,2]$

Escribimos:

S=$[-2,2]$

<u>Resolvemos la ecuación de grado 3</u>

c) $x^3 + 2x^2 = 0$

Observamos que podemos factorear y aplicar la propiedad:

Si a. b=0 entonces a=0 ó b=0

Sacamos factor común x^2

$x^2(x+2)=0 \Leftrightarrow x^2=0$ ó $x+2=0 \Leftrightarrow x=0$ ó $x=-2$

Resolvemos la inecuación de grado 3

$x^3+2x^2>0 \Leftrightarrow x^2(x+2)>0$ producto de 2 factores

FORMA PRÁCTICA (siempre el segundo miembro igualado a cero)

1) Obtenemos los ceros o raíces de cada factor: $x^2=0$ ó $x=-2$
2) Ubicamos los ceros o raíces de la ecuación cuadrática. En esos valores el producto da 0.
3) Analizamos los signos de la multiplicación en los tres subconjuntos en los cuales queda divida la recta. Elegimos **cualquier valor numérico** (por ejemplo: 3, -1 y 3) en cada subconjunto y evaluamos la expresión $x^3+2x^2>0$

x<-2		-2<x<0		x>0
Negativo x=-3	-2	Positivo x=-1	0	Positivo x= 3

Escribimos el conjunto solución:

$S=(-2;0)\cup(0;+\infty)$

Inecuación fraccionaria

$\frac{x-1}{3x+2}>0$ ¿Cómo podría resolver?

Si tenemos una división que nos tiene que dar un resultado positivo tenemos dos posibilidades:

1) Que el numerador y denominador sean ambos positivos
   o
2) Que el numerador y denominador sean ambos negativos

FORMA PRÁCTICA (siempre el segundo miembro igualado a cero)

1) Buscamos los ceros del numerador y del denominador

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$3x+2=0 \Rightarrow x=\frac{-2}{3}$

2) Ubicamos $x=1$ y $x=\frac{-2}{3}$ en una recta numérica, nos queda dividida en tres subconjuntos. Analizamos que signo toma la cuenta de dividir en cada subconjunto:

1) Para valores de x> 1 (consideramos cualquier número mayor a 1, por ejemplo, x=2. Realizamos la cuenta con ese valor. $\frac{2-1}{3\cdot 2+2}=\frac{1}{8}$ o sea, nos da un valor **positivo**. Por lo tanto, para cualquier valor de x mayor a 1, el resultado de la división será siempre **positiva.**

2) Para valores de x comprendidos entre $\frac{-2}{3}$ y 1. O sea $\frac{-2}{3}$<x<1. Por ejemplo, podemos considerar x=0. Realizamos la cuenta con ese valor. $\frac{0-1}{3\cdot 0+2}=-\frac{1}{2}$ o sea, nos da un valor **negativo**. Por lo tanto, para cualquier valor de x comprendido entre $\frac{-2}{3}$ y 1 el resultado de la división será siempre **negativa**.

3) Para valores de x< $\frac{-2}{3}$. Consideramos por ejemplo x=-1. Realizamos la cuenta con ese valor $\frac{-1-1}{3\cdot(-1)+2}=2$ o sea nos da un valor **positivo**. Por lo tanto, para cualquier valor de x menor a, $\frac{-2}{3}$ el resultado de la división será siempre **positiva**.

Como estamos buscando valores de x que arrojen un valor positivo de la cuenta de dividir, nos quedamos con los siguientes intervalos que formarán nuestro dominio.

$$S=\left(-\infty,\frac{-2}{3}\right)\cup(1,+\infty)$$

Inecuaciones con valor absoluto

Utilizamos las propiedades notables

a) $|x|\le k \Leftrightarrow -k\le x\le k \Leftrightarrow x\in[-k,k]$

$|x|< k \Leftrightarrow -k< x< k \Leftrightarrow x\in(-k,k)$

b) $|x|\ge k \Leftrightarrow x\le -k \ o \ \ x\ge k \Leftrightarrow x\in(-\infty,-k]\cup[k,+\infty)$

$|x|> k \Leftrightarrow x< -k \ o \ \ x> k \Leftrightarrow x\in(-\infty,-k)\cup(k,+\infty)$

Por ejemplo: $\left|\frac{x}{x-1}\right|<2 \Leftrightarrow -2<\frac{x}{x-1}<2 \Leftrightarrow \frac{x}{x-1}>-2 \quad y \quad \frac{x}{x-1}<2$

Resolvemos cada una de las inecuaciones fraccionarias aplicando la FORMA PRÁCTICA (siempre igualado a cero el segundo miembro)

$$\frac{x}{x-1}>-2 \Leftrightarrow \frac{x}{x-1}+2>0 \Leftrightarrow \frac{x-2(x-1)}{x-1}>0 \Leftrightarrow \frac{x-2x+2}{x}>0 \Leftrightarrow \frac{-x+2}{x}>0$$

1) Buscamos ceros o raíces del numerador y denominador

-x+2 = 0 →2=x
x=0

2) Ubicamos en una recta numérica

x<0	0<x<2	x>0
x=-1 $\frac{-(-1)+2}{-1}=-3$ **0**	x=1 $\frac{-1+2}{1}=1$ **2**	x= 3 $\frac{-3+2}{3}=\frac{-1}{3}$
NEGATIVO	POSITIVO	NEGATIVO

Estamos buscando valores de x que hagan que nuestra cuenta $\frac{-x+2}{x}$ nos dé un resultado positivo (o sea mayor a cero). Esos valores se encuentran en los intervalos: $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$

$$\frac{x}{x-1}<2 \Leftrightarrow \frac{x}{x-1}-2<0 \Leftrightarrow \frac{x-(x-1)}{x-1}<0 \Leftrightarrow \frac{x-x+1}{x}<0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}<0$$

1) Buscamos ceros o raíces del denominador (obviamente del numerador no porque es 1) x=0
2) Ubicamos en una recta numérica

x<0	x>0
$\frac{1}{-1}=-1$ 0	x=1 $\frac{1}{1}=1$
NEGATIVO	POSITIVO

Estamos buscando valores de x que hagan que nuestra cuenta $\frac{-x+2}{x}$ nos dé un resultado negativo (o sea menor a cero). Esos valores se encuentran en el intervalo: $(-\infty;0)$

¿Cómo escribimos finalmente los valores de x que cumplen la condición dada: $\left|\frac{x}{x-1}\right|<2$?

Debemos tener en cuenta que la expresión $\frac{x}{x-1}>-2 \quad y \quad \frac{x}{x-1}<2$nos indica a través de "y "que debemos hallar la intersección entre los intervalos hallados:

$(-\infty;0)\cup(2;+\infty) \cap (-\infty;0) = (-\infty;0)$ = Solución