Para curiosear en el Mathematica la resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Resolución de algunos sistemas de ecuaciones lineales

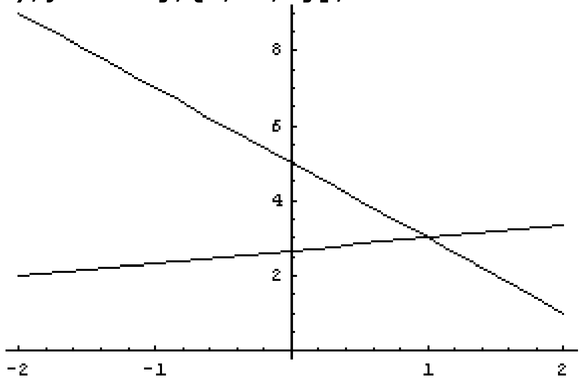
Ejercicio 1. Hallar la intersección de los siguientes pares de rectas y graficar

1.a) Sistema a resolver $\begin{cases} x-3y=-8 \\ 2x+y=5 \end{cases}$

```
Solve[{x - 3 y,2 x + y}=={-8, 5},{x, y}]
Out[1]= {{x → 1, y → 3}}
```

Rta.: El sistema es compatible determinado y las rectas se cortan en el punto del plano (1,3)

```
Plot[{y=(-8-x)/(-3),y=5-2 x},{x,-2,2}];
```



Proponemos a continuación otro esquema de resolución,utilizando sólo las matrices. Esto es con la orden LinearSolve[m,b] donde m es la matriz de los coeficientes del sistema y b la de los términos independientes

```
LinearSolve[{{1,-3},{2,1}},{-8,5}]
Out[3]= {1, 3}
(*Esto corresponde a una solución particular*)
NullSpace[{{1,-3},{2,1}}]
Out[4]= {}
(*La respuesta al sistema homogéneo no tiene base, por lo tanto su solución es sólo la trivial*)
```

La respuesta al sistema inhomogéneo es la suma de la particular más la solución correspondiente al sist. homogéneo. En este caso, estamos frente a un sistema compatible determinado pues:
Rta. sist. inhom.=solución particular+ rta. sist. hom.
Rta. sist. inhom: (x, y) = (1, 3)+(0, 0) ==> (x, y) = (1, 3)

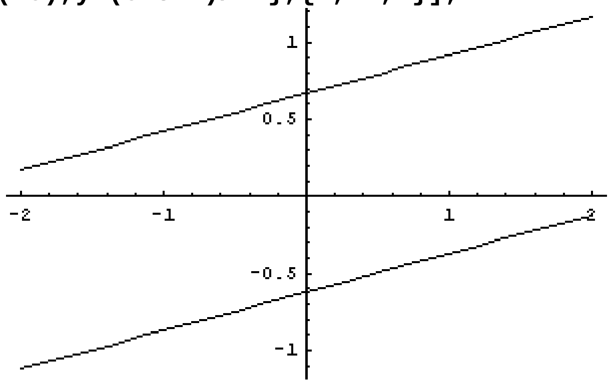
```
Clear[x, y]
```

1.b) Sistema a resolver $\begin{cases} 2x-8y=5 \\ -3x+12y=8 \end{cases}$

```
Solve[{2 x - 8 y,-3 x + 12 y}=={5, 8},{x, y}]
Out[6]= {}
```

Rta.: El sistema no tiene solución, las rectas son paralelas no coincidentes

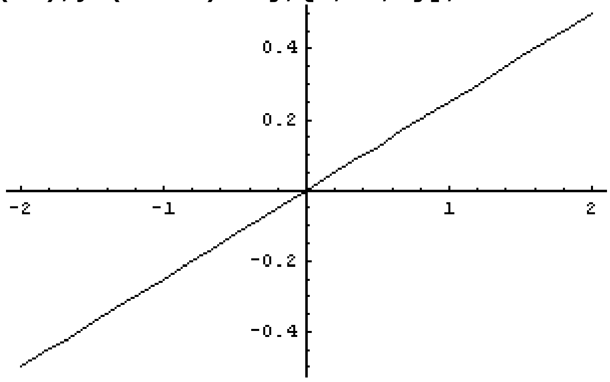
```
Plot[{y=(5-2 x)/(-8),y=(8+3 x)/12},{x,-2,2}];
```



Otra forma de resolución

```
LinearSolve[{{2,-8},{-3,12}},{5,8}]
LinearSolve::nosol :
 Linear equation encountered which has no solution.
Out[8]= LinearSolve[{{2, -8}, {-3, 12}}, {5, 8}]
(*Como es de esperar el homogéneo tiene infinitas soluciones,es equivalente a trasladar ambas rectas hasta que pasen por el origen*)

NullSpace[{{2,-8},{-3,12}}]
Out[9]= {{4, 1}}
Plot[{y=(0-2 x)/(-8),y=(0+3 x)/12},{x,-2,2}];
```



```
Clear[x,y]
```

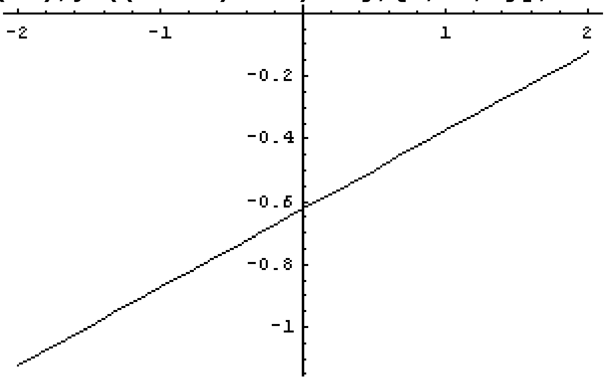
1.c) Sistema a resolver $\begin{cases} 2x-8y=5 \\ -3x+12y=-15/2 \end{cases}$

```
Solve[{2 x - 8 y,-3 x + 12 y}=={5, -15/2},{x, y}]
Solve::svars : Equations may not
   give solutions for all "solve" variables.
```

Out[12]= $\left\{\left\{x \to \frac{5}{2} + 4\,y\right\}\right\}$

Rta.:El sistema tiene infinitas soluciones, su respuesta indica que la variable "y" ha sido tomada como independiente y da la relación que vincula a la variable dependiente x con la variable independiente. Se trata de dos rectas paralelas coincidentes. Grado de libertad del sistema: 1.

```
Plot[{y=(5-2 x)/(-8),y=((-15/2)+3 x)/12},{x,-2,2}];
```



Otra forma de resolución

```
LinearSolve[{{2,-8},{-3,12}},{5,-15/2}]
```

Out[14]= $\left\{\frac{5}{2}, 0\right\}$

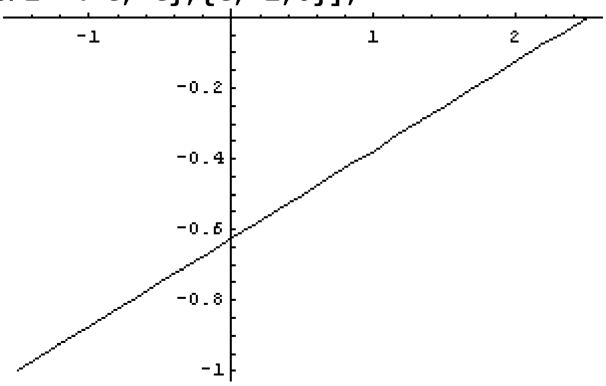
```
(*Esto es la solución particular del sist. inhomogéneo*)
NullSpace[{{2,-8},{-3,12}}]
```

Out[15]= {{4, 1}}

```
(*Esto es la base de soluciones para el sist.inhomog.*)
```

Rta. El sistema es compatible indeterminado,su respuesta es:
Rta. sist. inhom.= (5/2, 0)+infinitas soluciones del hom.
(x, y)= (5/2, 0) + t (4, 1), donde t es un número real cualquiera.
Se puede comparar gráficamente con la rta. anterior

```
ParametricPlot[{5/2+ 4 t, t},{t,-1,0}];
```



Ejercicio 2 Resolver el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$

Primera propuesta de resolución

```
Solve[{x1+x2+x3-x4, x1-x2+x3+2 x4, 2 x1+x3-x4, x1+x2+3x3}=={1,2,0,4},
{x1,x2,x3,x4}]
```

Out[17]= {{x1 → 0, x2 → 1, x3 → 1, x4 → 1}}

Indica que es sistema es compatible determinado, solución única

Segunda propuesta de resolución

```
LinearSolve[{{1,1,1,-1},{1,-1,1,2},{2,0,1,-1},{1,1,3,0}},{1,2,0,4}]
Out[18]= {0, 1, 1, 1}
```

Corresponde a una solución particular del sist. inhom.

```
NullSpace[{{1,1,1,-1},{1,-1,1,2},{2,0,1,-1},{1,1,3,0}}]
Out[19]= {}
```

Esto indica que la solución del homogéneo es sólo la trivial, sin base, y por tanto la respuesta del inhomogéneo es directamente la solución particular
(x1, x2, x3, x4) = (0, 1, 1, 1)

```
Clear[x1,x2,x3,x4]
```

Ejercicio 3. Resolver el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = -1 \\ 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}$

Primera propuesta de resolución

```
Solve[{x1-x2+x3-3 x4,2 x1 + x2 -3 x3 +x4,3 x2+5 x3-7 x4,
x1 +2 x2 -4 x3+4 x4}=={2,-1,3,-3},{x1,x2,x3,x4}]
Solve::svars : Equations may not
   give solutions for all "solve" variables.
```

Out[21]= $\left\{\left\{x1 \to \frac{13}{15} + \frac{8\,x4}{5},\ x2 \to -\frac{1}{3},\ x3 \to \frac{4}{5} + \frac{7\,x4}{5}\right\}\right\}$

El sist. de ecuaciones resulta compatible indeterminado, con grado de libertad 1, habiéndose elegido la variable x4 como variable independiente y obteniendo la relación de dependencia de las restantes variables con ella

Segunda propuesta de resolución

```
LinearSolve[{{1,-1,1,-3},{2,1,-3,1},{0,3,5,-7},{1,2,-4,4}},{2,-1,3,-
3}]
```

Out[22]= $\left\{\frac{13}{15},\ -\frac{1}{3},\ \frac{4}{5},\ 0\right\}$

Solución particular del sist. inhomogéneo

```
NullSpace[{{1,-1,1,-3},{2,1,-3,1},{0,3,5,-7},{1,2,-4,4}}]
Out[23]= {{8, 0, 7, 5}}
```

Base de las soluciones del sistema homogéneo

La respuesta es:

(x1, x2, x3, x4)=(13/15,-1/3, 4/5, 0) + t (8, 0, 7, 5)

donde t es cualquier número real. Observar que este conjunto de soluciones es equivalente al obtenido en el primer procedimiento

```
Clear[x1, x2, x3, x4]
```

Ejercicio 5. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x-3y+2z-4v+w=10 \\ x+2y+4z+8v-5w=3 \\ 5x+3y-6z+4v-3w=-4 \\ x-y+z-2v+2w=6 \\ 3x+2y-3z+2v-w=-1 \end{cases}$

```
Clear [x,y,z,v,w]
```

Primera propuesta

```
Solve[{2 x - 3 y + 2 z-4 v + w, x +2 y+4 z+8 v-5 w, 5 x+ 3 y -6 z+4 v-3 w, x - y + z - 2 v +2 w, 3 x+2 y - 3z+2 v - w}=={10,3,-4,6,-1},{x,y,z,v,w}]
```

Out[26]= $\left\{\left\{x\to 2,\ y\to -1,\ z\to \frac{3}{2},\ v\to \frac{1}{4},\ w\to 1\right\}\right\}$

El sistema resulta compatible determinado

Segunda propuesta

```
ms={{2,-3,2,-4,1},{1,2,4,8,-5},{5,3,-6,4,-3},{1,-1,1,-2,2},{3,2,-3,2,-1}};
MatrixForm[ms]
```

Out[28]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & -5 \\ 5 & 3 & -6 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

```
mi={10,3,-4,6,-1}
```

Out[29]= {10, 3, -4, 6, -1}

```
LinearSolve[ms,mi]
```

Out[30]= $\left\{2,\ -1,\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{4},\ 1\right\}$

Solución particular del sist. inhomogéneo

```
NullSpace[ms]
```

Out[31]= { }

Para el sist. hom. solo corresponde la solución trivial, por tanto la solución al sist. es solo la solución particular

```
(*Este caso también puede resolverse con el método de la matriz inversa*)
Det[ms]
```

Out[33]= -172

Distinto de cero, por lo tanto existe la matriz inversa de los coeficientes del sistema. La calculamos:

```
Inverse[ms]. mi
```

Out[34]= $\left\{2,\ -1,\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{4},\ 1\right\}$

Se obtiene la misma respuesta (x, y, z, v, w) = (2, -1, 3/2, 1/4 ,1).

Algunas consideraciones para trabajar con parámetros en sistemas de ecuaciones lineales

Comencemos por ver lo que sucede cuando el sistema es incompatible. Presentamos dos ecuaciones con una incógnita e indicamos el nombre de la variable:

```
Solve[{x==1,x==2},x]
Out[1]= {}
```

De esta forma aparece que no existe solución. Al agregar un parámetro:

```
Solve[{x==1,x==a},x]
Out[2]= {}
```

Esto nos indica que, en general, el sistema es incompatible. Pero sabemos que para a=1, el sistema tiene respuesta. Existe una sentencia que permite obtener todas las soluciones posibles del sistema:

```
Reduce[{x==1,x==a},x]
Out[3]= a == 1 && x == 1
```

Debemos aprender a leer los símbolos utilizados en esta respuesta: && indica simultaneidad de condiciones. Para este caso significa:
cuando a vale 1, x es igual a 1
Como no se presenta más opciones:
no existe otra posibilidad de solución. Si a es distinto de 1, no hay solución.

Agreguemos un parámetro más.

```
Solve[{a x == b},x]
```

Out[4]= $\left\{\left\{x \to \frac{b}{a}\right\}\right\}$

No está completo aquí el análisis paramétrico del sistema. Para ello usamos:

```
Reduce[{a x == b},x]
```

Out[5]= $a == 0\ \&\&\ b == 0\ ||\ x == \frac{b}{a}\ \&\&\ a \neq 0$

La interpretación de esta respuesta requiere conocer el significado de dos nuevos símbolos: | | y ! =. Los mismos son:
| | indica que a partir de allí se presenta otra alternativa
! = no igual, distinto de

Así, las alternativas para el sistema propuesto son:
cuando a y b son simultáneamente iguales a cero, x puede tomar cualquier valor (debido a que no aparecen condiciones sobre x)
cuando a es distinto de 0, x toma el valor b/a cualquiera sea b
No está aquí escrita la tercer opción para el sistema (incompatibilidad) puesto que el resultado sólo da las soluciones. Debemos agregar entonces (implícitamente está):
cuando a es 0 pero b es distinto de 0, el sistema es incompatible.

Veamos que sucede al proponer una ecuación con dos incógnitas

```
Solve[x+y==2,{x,y}]
```

Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables.

Out[6]= $\{\{x \to 2 - y\}\}$

Está claro que no puede resolver completamente el sistema en ambas variables. Elige entonces despejar unas en función de las otras, trabajando con el concepto de variables dependientes e independientes. En este caso x es la variable dependiente de la otra, y, que puede tomar cualquier valor. Aquí no agregará nada usar la orden:

```
Reduce[x+y==2,{x,y}]
```

Out[7]= $2 - y == x$

Agregando parámetros:

```
Solve[a x + b y == 0,{x, y}]
```

Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables.

Out[8]= $\{\{x \to -\frac{b\,y}{a}\}\}$

```
Reduce[a x + b y == 0, {x,y}]
```

Out[9]= $a == 0\ \&\&\ b == 0\ ||\ a == 0\ \&\&\ y == 0\ ||\ x == -\frac{b\,y}{a}\ \&\&\ a \neq 0$

Interpretamos las opciones de la siguiente manera:
cuando a y b valen simultáneamente 0, tanto x como y pueden tomar cualquier valor (grado de libertad del sistema:2)
cuando a es distinto de 0, x es igual a (- b y / a) cualquiera sea el valor de b, mientras que la variable y puede tomar cualquier valor (grado de libertad: 1)
cuando a es 0, siempre que b sea distinto de 0, la variable y vale 0 mientras que la variable x es la independiente (grado de liberad:1)
No existe valores de los parámetros para los cuales el sistema sea incompatible.

Agreguemos un parámetro al término independiente

```
Reduce[a x + b y == c,{x,y}]
```

Out[10]= $x == \frac{c - b\,y}{a}\ \&\&\ a \neq 0\ ||\ a == 0\ \&\&\ b == 0\ \&\&\ c == 0\ ||\ a == 0\ \&\&\ y == \frac{c}{b}\ \&\&\ b \neq 0$

Si se leen atentamente las opciones presentadas en la respuesta, se encuentra que aquí sí falta una opción que corresponderá al caso incompatible:
cuando a y b valen simultáneamente 0, mientras que c es distinto de 0.
(Complete la lectura para los otros casos)

Proponemos a continuación otro sistema

```
Solve[{a x+y+z==1,x+a y+z==1,x+y+a z==1},{x,y,z}]
```

Out[11]= $\{\{x \to \frac{1}{2 + a},\ y \to \frac{1}{2 + a},\ z \to \frac{1}{2 + a}\}\}$

Está indicado aquí el caso compatible determinado, valdrá cuando
2 – 3 a + a^3 sea distinto de cero
Para un detalle mayor:

```
Reduce[{a x+y+z==1,x+a y+z==1,x+y+a z==1},{x,y,z}]
```

Out[12]= $a == 1 \&\& x == 1 - y - z \,||\, x == \frac{1}{2+a} \&\&$

$y == \frac{1}{2+a} \&\& z == \frac{1}{2+a} \&\& -1 + a \neq 0 \&\& 2 + a \neq 0$

Las posibilidades son:

si a es igual a 1, el sistema es compatible indeterminado con grado de libertad 2. Tomando como variables independientes a z y a y, la variable x debe ser igual a (1−y−z).

si es distinto de 1 y también distinto de (−2), el sistema es compatible determinado (grado de libertad 0) y su respuesta es x = 1/(2+a) , y = 1/(2+a) , z = 1/(2+a). Si se factorean las expresiones obtenidas como respuesta con la sentencia Solve, se podrá constatar que son coincidentes, en este caso, con las aquí escritas.

El caso incompatible para este sistema se presenta cuando a es igual a (−2). Esto se deduce por no ser un caso contemplado en las opciones para las respuestas.

Analice el siguiente sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas, en función del parámetro a. Detalle cada posibilidad.

```
Reduce[{x+2 y-z+a t==1-a,-2 y+3 z-a t==a+1,a z-t==1-a,
(a-1) (a-2) t==a (a-2) (a+4)},{x,y,z,t}]
```

Out[13]= $a == 2 \&\& x == 3 - t \&\&$

$y == \frac{1}{4}(-9 - t) \&\& z == \frac{1}{2}(-1 + t) \,||$

$t == \frac{a(4+a)}{-1+a} \&\& x == \frac{2(1 - 7a + a^2)}{(-1+a)\,a} \&\&$

$y == \frac{-3 + 19a - 5a^3 - a^4}{2(-1+a)\,a} \&\&$

$z == \frac{-1+6a}{(-1+a)\,a} \&\& -1 + a \neq 0 \&\& a \neq 0$

Ídem para el siguiente sistema de dos parámetros.

```
Reduce[{-a x+y+2 z==0,x+z==b,-a x+2y+b z==a},{x,y,z}]
```

Out[14]= $a == -3 \&\& b == 1 \&\& y == -2 - x \&\& z == 1 - x \,||$

$a == 0 \&\& b == 4 \&\& y == 2(-4 + x) \&\& z == 4 - x \,||$

$x == \frac{a + 4b - b^2}{4 + a - b} \&\& y ==$

$a\left(2 + a - \frac{6}{4+a-b} - \frac{5a}{4+a-b} - \frac{a^2}{4+a-b} + b\right) \&\&$

$z == \frac{a(-1+b)}{4+a-b} \&\& -4 - a + b \neq 0$